目 录

第一章　连续谱辐射

1.1. 静电场

两个静止点电荷 q_1 与 q_2 间的库仑力 $\boldsymbol{F}$，实验上确定为(Coulomb, 1785)：

$$\boldsymbol{F}=\frac{q_1q_2}{R^2}\boldsymbol{n}_r, \tag{1-1}$$

式中 R 是电荷之间的距离，$\boldsymbol{n}_r$ 是从一个点电荷指向另一个点电荷的单位矢量。一个点电荷 q_1 的静电场 $\boldsymbol{E}$ 的定义是：

$$\boldsymbol{F}=q_2\boldsymbol{E} \qquad \text{其中 } \boldsymbol{E}=\frac{q_1}{R^2}\boldsymbol{n}_r, \tag{1-2}$$

式中 R 是从 q_1 算起的距离。将(1-2)式对一个封闭球面进行积分，我们即得到高斯(Gauss)定律：

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}dS=4\pi q=4\pi\int_V \rho dV, \tag{1-3}$$

式中 ρ 是电荷密度，$\oint_S$ 表示对闭合面进行积分，$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}$ 为 $\boldsymbol{E}$ 在面元 dS 法线方向的分量，以及 $\int_V \rho dV$ 为闭合面内的电荷量。应用矢量分析公式，(1-3)式可以用泊松方程(Poisson, 1813)来表示：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=-\nabla^2\varphi=4\pi\rho, \tag{1-4}$$

式中

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi, \tag{1-5}$$

而 φ 称为电势。对于一个静止的点电荷 q 来说，可得

$$\varphi=q/R, \tag{1-6}$$

式中 R 是从电荷算起的径向距离。对于由两个沿 z 轴分开距离为 a 的电荷 $(+q,\ -q)$ 组成的静电偶极子来说，

$$\varphi=aq\cos\theta/R^2, \tag{1-7}$$

所以

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{E}_r&=\frac{2d}{R^3}\cos\theta\boldsymbol{n}_r;\\ \boldsymbol{E}_\theta&=\frac{d\sin\theta}{R^3}\boldsymbol{n}_\theta;\\ \boldsymbol{E}_\varphi&=0,\end{aligned}\right\} \tag{1-8}$$

式中偶极矩 $d=aq$，角度 θ 是 z 轴与径向之间的夹角，R 是从偶极子算起的径向距离，$\boldsymbol{n}_\theta$ 及 $\boldsymbol{n}_r$ 分别是在 θ 方向及径向的单位矢量。

1.2. 静磁场

两个电流元 $I_1d\boldsymbol{l}_1/c$ 与 $I_2d\boldsymbol{l}_2/c$ 间的磁力 $\boldsymbol{F}$，实验上确定为(Ampère, 1827)：

$$\boldsymbol{F}=\frac{I_1I_2}{c^2R^2}d\boldsymbol{l}_2\times(d\boldsymbol{l}_1\times\boldsymbol{n}_r), \tag{1-9}$$

式中 I_1 及 I_2 是电流，$d\boldsymbol{l}_1$ 及 $d\boldsymbol{l}_2$ 是长度的单位矢量元，它们的方向与电流方向相同，R 是两

个电流元之间的距离，$\boldsymbol{n}_r$ 是从长度元 $d\boldsymbol{l}_1$ 指向 $d\boldsymbol{l}_2$ 的单位矢量。例如，在两条长直的平行金属线之间每单位长度的吸引力为：

$$\boldsymbol{F}=\frac{2I_1I_2}{c^2D},\tag{1-10}$$

式中 D 是金属线之间的垂直距离。电流元 $I_1d\boldsymbol{l}_1/c$ 的静磁场 $\boldsymbol{B}$ 可以定义为(Biot 和 Savart, 1820)：

$$\boldsymbol{F}=\frac{I_2d\boldsymbol{l}_2}{c}\times\boldsymbol{B}\qquad \text{其中 } \boldsymbol{B}=\frac{I_1}{c}\,\frac{d\boldsymbol{l}_1\times\boldsymbol{n}_r}{R^2}。\tag{1-11}$$

将(1-11)式对闭合回路进行积分，即得安培定律

$$\oint_C\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l}=\frac{4\pi}{c}I=\frac{4\pi}{c}\int_S\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{n}dS,\tag{1-12}$$

式中 $\oint_C$ 表示对闭合回路进行积分，I 是穿过闭合回路的电流，$\int_S$ 表示对以闭合曲线为边界的任何一个开曲面进行积分，$\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{n}$ 是电流密度 $\boldsymbol{J}$ 在面元 dS 法线方向的分量。应用矢量分析公式，(1-12)式可以用微分形式表示：

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J}。\tag{1-13}$$

例如，由(1-12)式直接得出，沿 z 轴伸展载有电流 I 的长导线产生的磁场为：

$$\boldsymbol{B}_\varphi=\frac{2I}{cR}\boldsymbol{n}_\varphi,\tag{1-14}$$

式中 R 是到 z 轴的垂直距离，$\boldsymbol{n}_\varphi$ 是球面坐标 φ 方向的单位矢量，球面坐标 z 轴的正方向为电流方向。由(1-11)式直接得出，静磁场 $\boldsymbol{B}$ 可以用一个磁矢量势 $\boldsymbol{A}$ 表示：

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}\qquad \text{其中 } \boldsymbol{A}=\frac{Id\boldsymbol{l}}{cR},\tag{1-15}$$

所以

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=\nabla\cdot\nabla\times\boldsymbol{A}=0。\tag{1-16}$$

对于矢量 $\boldsymbol{A}$ 的每一个笛卡儿坐标，可得：

$$\nabla^2\boldsymbol{A}=\frac{-4\pi}{c}\boldsymbol{J}$$

以及

$$\boldsymbol{A}=\frac{1}{c}\int_V\frac{\boldsymbol{J}}{R}dV,\tag{1-17}$$

式中 R 是到体积元 dV 的距离。例如，考虑一个电流为 I 及半径为 a 的环，置于 xy 平面而其圆心在 z 轴上。利用(1-15)式，我们得出：

$$\boldsymbol{A}=\frac{\pi a^2I}{cR^2}\sin\theta\boldsymbol{n}_\varphi,\tag{1-18}$$

所以

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{B}_r=\frac{2m\cos\theta}{R^3}\boldsymbol{n}_r\quad(\text{当 } R\gg a);\\&\boldsymbol{B}_\theta=\frac{m\sin\theta}{R^3}\boldsymbol{n}_\theta\quad(\text{当 } R\gg a);\\&\boldsymbol{B}_\varphi=0,\end{aligned}\right\}\tag{1-19}$$

式中磁偶极矩 $m=\pi a^2I/c$，角度 θ 是 z 轴与径向之间的夹角，R 是离环中心的径向距离，$\boldsymbol{n}_\varphi$、$\boldsymbol{n}_\theta$ 和 $\boldsymbol{n}_r$ 是以电流环中心为球心并取 z 轴垂直于环平面的球面坐标系的三个方向的单位矢量。对于一个半径为 r 的球体来说，总是常常应用纬度 $\lambda=\pi/2-\theta$，静磁场的偶极矩由下式

给出：

$$m=r^3B_p/2, \tag{1-20}$$

式中 B_p是球表面上的极区磁场强度。对地球来说，$m=$*7.94×10²⁵ 高斯·厘米³，这相当于极区磁场强度为 0.62 高斯。在表 4 中给出了其他物体的表面磁场强度。

1.3. 在物质中的电磁场——本构关系

欧姆(Ohm, 1826)解释了在受到外加电势的金属中电流流动的实验(Davy, 1821)。欧姆定律表明电流密度 $\boldsymbol{J}$ 由下式给出：

$$\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E}, \tag{1-21}$$

式中常数 σ 称为电导率，$\boldsymbol{E}$ 是电场强度。开尔文(Kelvin, 1850)提出，由磁化力 $\boldsymbol{H}$ 在物质中所感生的磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 由下式给出：

$$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}, \tag{1-22}$$

式中 μ 称为磁导率。类似地，麦克斯韦(Maxwell, 1861)提出，电动力作用到物质上引起的电位移 $\boldsymbol{D}$ 由下式给出：

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}, \tag{1-23}$$

式中 ε 称为介电常数或电容率。在大多数天体物理情况中$\mu=1$，即磁导率在真空中的值。在真空中，$\sigma=0$ 及$\varepsilon=1$。常数 ε 及 μ 确定了电导率为零的介质在无磁场时的折射率 n 为：

$$n=\sqrt{\varepsilon\mu}\,。 \tag{1-24}$$

对导电介质及在有磁场的情况下的介质的折射率将分别在第 1.12 节及第 1.13 节中讨论。

洛伦兹(Lorentz, 1880)与洛伦茨(Lorenz, 1881)把宏观常数 ε 与物质的原子性质联系起来。他们论证了一个包括大量原子或分子的区域的平均电场或测量到的电场 $\boldsymbol{E}$ 与作用在各个分子上的有效电场 $\boldsymbol{E}'$ 是不同的。假定在 $\boldsymbol{E}'$ 的作用下，分子本身极化而形成一个偶极矩：

$$\boldsymbol{d}=\alpha\boldsymbol{E}, \tag{1-25}$$

式中常数称为极化率。由(1-8)式可知，在一个球形分子的表面，总的偶极场为：

$$\boldsymbol{E}_S=\frac{\boldsymbol{d}}{a^3}=\frac{\alpha\boldsymbol{E}}{a^3}, \tag{1-26}$$

式中 a 是分子的半径。因此测量到的具有数密度为 N 个分子的各向同性介质产生的场是：

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}'-N\left[\frac{4}{3}\pi a^3\boldsymbol{E}_S\right]=\left[1-\frac{4\pi}{3}N\alpha\right]\boldsymbol{E}'。 \tag{1-27}$$

介质的总的电极化 $\boldsymbol{P}$ 由下式给出：

$$\boldsymbol{P}=N\alpha\boldsymbol{E}'=\chi_e\boldsymbol{E}=\left[\frac{N\alpha}{1-\frac{4}{3}\pi N\alpha}\right]\boldsymbol{E}, \tag{1-28}$$

式中 $\boldsymbol{P}$ 是电偶极矩的体密度，常数 χ_e 称为电极化率。介电常数 ε 由下式引进：

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}+4\pi\boldsymbol{P}=(1+4\pi\chi_e)\boldsymbol{E}, \tag{1-29}$$

极化率 α 由下式给出：

$$\alpha=\frac{3}{4\pi N}\,\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}=\frac{3}{4\pi N}\,\frac{n^2-1}{n^2+2}, \tag{1-30}$$

式中 N 是分子的数密度，n 是折射率。(1-4)式中除去电偶极子电荷贡献后的宏观形式是

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=4\pi\rho_{\circ} \tag{1-31}$$

类似地，可以定义磁化率 χ_m，因此 $\boldsymbol{H}$ 由下式给定：

$$\boldsymbol{M}=\chi_m\boldsymbol{H}, \tag{1-32}$$

式中磁化强度 $\boldsymbol{M}$ 是磁偶极矩的体密度。这样，就得到：

$$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}+4\pi\boldsymbol{M}_{\circ} \tag{1-33}$$

在(1-13)式中除去磁偶极子电流密度，它的宏观形式是：

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\frac{4\pi\boldsymbol{J}}{c}。 \tag{1-34}$$

1.4. 感生电磁场

法拉第(Faraday, 1843)首先证明在一个切割磁铁的磁力线运动的回路中会感生出电势，感生电势的法拉第定律是：

$$\oint_C \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_S \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}dS, \tag{1-35}$$

式中 $\oint_C$ 表示对闭合回路进行积分，$\boldsymbol{B}$ 称为磁感应强度，$\int_S$ 表示对以闭合回路为边界的任何一个开曲面进行积分，$\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}$ 表示 $\boldsymbol{B}$ 在表面元 dS 法线方向的分量。(1-35)式中的线积分称为感生电动势，磁通量(或磁力线数)定义为：

$$\Phi=\int_S \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}dS_{\circ}$$

应用矢量分析公式，(1-35)式的微分形式是：

$$\nabla\times\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=0。 \tag{1-36}$$

这里电场矢量 $\boldsymbol{E}$ 和磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 是对同一个参照系定义的。

1.5. 电荷守恒的连续性方程

电荷守恒由下列连续性方程表示：

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho dV+\oint_S \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{n}dS=0, \tag{1-37}$$

式中 ρ 是电荷密度，$\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{n}$ 是电流密度在面元 dS 的法线方向上的分量，$\oint_S$ 表示对一个闭合曲面进行积分，$\int_V \rho dV$ 是对闭合曲面内的体积进行积分。这个方程式表明流过一个闭合曲面的电流等于在该曲面内的电荷随时间的变化率，这是法拉第(Faraday, 1843)首先用实验证实的。应用矢量分析公式，(1-37)式的微分形式是：

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{J}=0。 \tag{1-38}$$

1.6. 麦克斯韦方程组

麦克斯韦(Maxwell, 1861, 1873)首先注意到：对于随时间变化的电荷和电流来说，静电方程(1-13)式及(1-34)式与连续性方程(1-38)式并不一致。他提出加上一项位移电流 $(1/4\pi)\partial D/\partial t$，以使静场方程(1-16)式、(1-31)式及(1-34)式与随时间变化的场方程(1-35)式一起确定电磁场方程：

$$\nabla\times\boldsymbol{H}-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}=\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J} \quad 或 \quad \oint_C\boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l}-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_S\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{n}dS=\frac{4\pi}{c}\int_S\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{n}dS, \tag{1-39}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=0 \quad 或 \quad \oint_C\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_S\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}dS=0, \tag{1-40}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=4\pi\rho \quad 或 \quad \oint_S\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{n}dS=4\pi\int_V\rho dV \tag{1-41}$$

以及

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \quad 或 \quad \oint_S\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}dS=0。 \tag{1-42}$$

因此 5 个矢量描述了电磁场及其对物质的作用。5 个矢量是电矢量 $\boldsymbol{E}$、磁矢量 $\boldsymbol{H}$、电位移 $\boldsymbol{D}$、磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 及电流密度 $\boldsymbol{J}$。假定电荷守恒的连续性方程(1-38)式是成立的，并且电流密度由下式给出：

$$\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E}+\rho\boldsymbol{v}=\boldsymbol{J}_\sigma+\boldsymbol{J}_c, \tag{1-43}$$

式中传导电流 $\boldsymbol{J}_\sigma=\sigma\boldsymbol{E}$ 是对电导率为 σ 的物质而言的，对流电流 $\boldsymbol{J}_c=\rho\boldsymbol{v}$ 是对以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动的密度为 ρ 的电荷而言的。

1.7. 边界条件

麦克斯韦方程组(1-39)～(1-42)式应用于介电常数 ε 和磁导率 μ 是连续的物质。在 ε 和(或)μ 有突变的界面上，突变面两侧的电磁场之间的关系可以从积分形式的麦克斯韦方程组直接得出：

$$\boldsymbol{n}_{12}\cdot(\boldsymbol{B}_2-\boldsymbol{B}_1)=0; \tag{1-44}$$

$$\boldsymbol{n}_{12}\cdot(\boldsymbol{D}_2-\boldsymbol{D}_1)=4\pi\rho_S; \tag{1-45}$$

$$\boldsymbol{n}_{12}\times(\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_1)=0; \tag{1-46}$$

$$\boldsymbol{n}_{12}\times(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)=4\pi\boldsymbol{J}_S/c, \tag{1-47}$$

式中 $\boldsymbol{n}_{12}$ 是垂直于突变面的单位矢量，其方向为从介质 1 指向介质 2。(1-44)式及(1-45)式适用于 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 在界面上的法向分量，而方程(1-46)式及(1-47)式适用于 $\boldsymbol{E}$ 及 $\boldsymbol{H}$ 在界面上的切向分量。ρ_S 及 $\boldsymbol{J}_S$ 分别表示在分界面上的电荷密度及电流密度。

1.8. 电磁场的能量密度

电磁场的总能量密度 U 为(Kelvin, 1853; Maxwell, 1861, 1873)：

$$U=U_E+U_H=\frac{\varepsilon}{8\pi}E^2+\frac{\mu}{8\pi}H^2=\frac{1}{8\pi}[\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}], \tag{1-48}$$

式中 U_E 及 U_H 分别是电能密度及磁能密度；ε 及 μ 分别是介质的介电常数及磁导率，E 及 H 分别是电矢量 $\boldsymbol{E}$ 及磁矢量 $\boldsymbol{H}$ 的大小。

1.9. 坡印廷能通量

对于随时间变化的电磁场来说，单位时间内通过垂直于电矢量 $\boldsymbol{E}$ 和磁矢量 $\boldsymbol{H}$ 的单位面积上能量的大小由坡印廷矢量(Poynting, 1884)

$$\boldsymbol{S}=\frac{c}{4\pi}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}) \tag{1-49}$$

给定。

1.10. 电磁动量及辐射压力

电磁场的动量密度为(Maxwell, 1861)：

$$\boldsymbol{g}=\frac{\boldsymbol{S}}{c^2}=\frac{(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})}{4\pi c}。\tag{1-50}$$

辐射压力 $\boldsymbol{P}$ 由每单位面积上的动量净迁移率给出。于是由(1-50)式得到:

$$\boldsymbol{P}=\frac{\boldsymbol{S}}{c}=\frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}}{4\pi}。\tag{1-51}$$

1.11. 洛伦兹力定律

电磁场作用在一个以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动的电荷 q 上的力 $\boldsymbol{F}$ 为(Heaviside, 1889; Lorentz, 1892):

$$\boldsymbol{F}=q\left(\boldsymbol{E}+\frac{\mu}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}\right)。\tag{1-52}$$

当 $\boldsymbol{H}$ 为1时,$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}$ 的大小为速度在垂直于磁场方向上的分量。

假定一个荷电为 q 的粒子,它的初速度在垂直及平行于一个均匀恒定磁场 $\boldsymbol{H}$ 方向上的分量分别为 $v_\perp$ 和 $v_\parallel$。由(1-52)式可知,当存在 $\boldsymbol{H}$ 时,粒子的运动将是沿 $\boldsymbol{H}$ 方向上的恒定速度 $v_\parallel$ 和在垂直于 $\boldsymbol{H}$ 平面内的圆周运动两者的迭加。正如亥维赛(Heaviside, 1904)首先指出的,圆周运动角频率(回转频率)由下式给出:

$$\omega_H=\frac{q\mu H}{\gamma mc}=\frac{qB}{\gamma mc},\tag{1-53}$$

以及回转半径(拉莫尔半径)为:

$$r_H=\frac{v_\perp}{\omega_H}=\frac{mc\gamma v_\perp}{qB},\tag{1-54}$$

式中 m 是粒子的质量,粒子的动量是 $\boldsymbol{p}=\gamma m\boldsymbol{v}$,这里 $\gamma=[1-(v^2/c^2)]^{-1/2}$。当速度低时,$v\ll c$,得到 $\gamma\approx1$。

在有均匀恒定电场 $\boldsymbol{E}$(其方向沿 x 轴)的情况下,一个荷电为 q、动量为 γmv、总能量为 γmc^2、动能为 $(\gamma-1)mc^2$ 的粒子,它的运动轨道由(1-52)式确定:

$$x=\frac{\gamma mc^2}{qE}\cosh\left(\frac{eEy}{\gamma mvc}\right)\approx\frac{qE}{2mv^2}y^2\quad(\text{当 } v\ll c \text{ 时}),\tag{1-55}$$

式中的初始速度 v 是在 xy 平面内。

在有均匀恒定电场 $\boldsymbol{E}$ 及磁场 $\boldsymbol{H}$ 的情况下,一个带电粒子的合运动是沿着垂直于这两个场的方向的。平均漂移速度是:

$$\boldsymbol{v}=\frac{c\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}}{H^2},\tag{1-56}$$

式中已假设 $v\ll c$ 和 $\boldsymbol{E}\ll\boldsymbol{H}$。

1.12. 平面电磁波

在没有电荷和电流的真空中(电导率为零以及没有磁场),麦克斯韦方程组(1-39)～(1-42)式化成下列形式:

$$\nabla^2E-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2E}{\partial t^2}=0$$

和

$$\nabla^2H-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2H}{\partial t^2}=0,\tag{1-57}$$

其中 ε 及 μ 分别是介电常数及磁导率。方程(1-57)式是具有传播速度

$$v=c/\sqrt{\varepsilon\mu}\tag{1-58}$$

的电磁波的波动方程。

特别重要的是(1–57)式的谐波解:

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0\exp[i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)], \tag{1–59}$$

式中 t 是时间变数。谐波频率 ω 与传播矢量，即波矢 $\boldsymbol{k}$ 有如下关系:

$$\boldsymbol{k}=\frac{2\pi}{\lambda}\boldsymbol{s}=\frac{\omega}{c}n\boldsymbol{s}, \tag{1–60}$$

式中 λ 是波长; $\boldsymbol{s}$ 是波传播方向，它垂直于 $\boldsymbol{E}$; n是折射率。波的相速度是:

$$v_p=\frac{\omega}{k}=\frac{c}{n}=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}; \tag{1–61}$$

而群速度由微分给出:

$$v_g=\frac{d\omega}{dk}。 \tag{1–62}$$

从麦克斯韦方程组直接得出: 一旦电矢量 $\boldsymbol{E}$ 由(1–59)式给定，则磁矢量 $\boldsymbol{H}$ 就由下式确定:

$$\boldsymbol{H}=\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{1/2}\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{E},$$

式中 $\boldsymbol{s}$ 是单位矢量，表示波的传播方向。可见平面波的场矢量是相互垂直的，并且也垂直于传播方向的，所以称它们为横平面波。

由(1–49)式，在平面波中的能通量是:

$$S=\frac{c}{4\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E^2=\frac{c}{4\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}H^2, \tag{1–63}$$

它的方向沿波的传播方向。由(1–48)式，在平面波中的能量密度 U 为:

$$U=\frac{\varepsilon E^2}{4\pi}=\frac{\mu H^2}{4\pi}。 \tag{1–64}$$

当介质具有非零的传导率 σ 时，传播矢量 k 是复数，并由下式给出:

$$\begin{aligned}k&=\left[\varepsilon\mu\frac{\omega^2}{c^2}\left(1+i\frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon}\right)\right]^{1/2}\\&\approx\sqrt{\mu\varepsilon}\,\frac{\omega}{c}+i\,\frac{2\pi}{c}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,\sigma\quad(\text{当 }\sigma\ll\omega\varepsilon\text{ 时})\\&\approx(1+i)\,\frac{\sqrt{2\pi\omega\mu\sigma}}{c}\quad(\text{当 }\sigma\gg\omega\varepsilon\text{ 时}),\end{aligned} \tag{1–65}$$

波随距离按指数规律衰减。波的相速度是 $v_p=\omega/\alpha=c/n$, 其中 α 是 k 的实部, n 是折射率。当存在磁场时，k 有附加的实数项和虚数项，这些项将在1.33节中给出。

1.13. 平面波的偏振——斯托克斯参量

如果一个谐平面波的传播方向沿笛卡儿坐标的 z 轴的话，则电矢量的分量就为:

$$\left.\begin{aligned}E_x&=a_1\cos(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+\delta_1);\\E_y&=a_2\cos(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+\delta_2);\\E_z&=0,\end{aligned}\right\} \tag{1–66}$$

式中 a_1 和 a_2 是标量振幅，ω 是谐频率，t 是时间变数，$\boldsymbol{k}$ 是波矢, $\boldsymbol{r}$ 是矢径，δ_1 和 δ_2 是任意位相。从(1–66)式直接得出 E_x 和 E_y 的关系为:

$$\left(\frac{E_x}{a_1}\right)^2+\left(\frac{E_y}{a_2}\right)^2-\frac{2E_xE_y}{a_1a_2}\cos\delta=\sin^2\delta, \tag{1–67}$$

式中 $\delta=\delta_2-\delta_1$。(1–67)式描述了一个椭圆，其长轴与 x 轴的交角为 ψ; 长轴的长度为 $2a$; 短

轴的长度为 $2b$，它们之间的关系为：

$$\left.\begin{aligned}\tan 2\psi &= (\tan 2\alpha)\cos\delta;\\ \tan\chi &= \pm b/a;\\ a^2+b^2 &= a_1^2+a_2^2;\\ \sin 2\chi &= (\sin 2\alpha)\sin\delta;\end{aligned}\right\} \tag{1-68}$$

其中 $$\tan\alpha = a_2/a_1。$$

一般说来波是椭圆偏振的。当 $\delta=\delta_2-\delta_1=m\pi$（$m$ 为整数），椭圆退化为一条直线，就说波是线偏振的。当 $a_1=a_2=a$ 和 $\delta=\pm\pi/2+2m\pi$（m 为整数），就说波是圆偏振的，而且按照定义取符号"+"或"−"就分别表示了波是右旋或左旋圆偏振的。

波的斯托克斯参量[1]是(Stokes, 1852)：

$$\left.\begin{aligned}I &= a_1^2+a_2^2;\\ Q &= a_1^2-a_2^2 = I\cos 2\chi\cos 2\psi;\\ U &= 2a_1a_2\cos\delta = I\cos 2\chi\sin 2\psi;\\ V &= 2a_1a_2\sin\delta = I\sin 2\chi;\end{aligned}\right\} \tag{1-69}$$

式中 $$I^2 = Q^2+U^2+V^2,$$

I 代表波的强度。当 I、Q、U 和 V 用时间平均值来表示时，任一个电磁波的偏振度 π 定义为：

$$\pi = [Q^2+U^2+V^2]^{1/2}/I。 \tag{1-70}$$

1.14. 平面波的反射及折射

考虑电磁场的边界条件(1–44)～(1–47)式就可以得到谐平面波的反射及折射定律。当一个平面波射到两种均匀介质分界面上时，入射波的传播方向与界面法线方向间的交角 θ_i 和透射波的传播方向与界面法线方向间的交角 θ_t 之间的关系，由斯涅耳(Snell, 1621)折射定律给出：

$$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_t} = \left(\frac{\varepsilon_2\mu_2}{\varepsilon_1\mu_1}\right)^{1/2} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2}, \tag{1-71}$$

式中 ε 是介电常数，μ 是磁导率，$n=\sqrt{\varepsilon\mu}$ 称为折射率，v 是相速度，下标 1 和 2 分别表示入射介质和波被透射的介质。入射波和反射波与界面法线方向间的交角 θ_i 和 θ_r 之间的类似的关系式为：

$$\sin\theta_i = \sin\theta_r。 \tag{1-72}$$

这是从费马原理(Fermat, 1627)得出的，费马原理说：光线沿着需时最少的路径传播。

反射波能量与入射波能量的比值由下式给出(Fresnel, 1822)：

$$\left.\begin{aligned}R_{/\!/} &= \frac{\tan^2(\theta_i-\theta_t)}{\tan^2(\theta_i+\theta_t)};\\ R_{\perp} &= \frac{\sin^2(\theta_i-\theta_t)}{\sin^2(\theta_i+\theta_t)},\end{aligned}\right. \tag{1-73}$$

式中反射系数 $R_{/\!/}$ 和 $R_{\perp}$ 分别是对在入射平面内和垂直于入射平面的线偏振波而言的。利用斯涅耳定律(1–71)式并假定 $\mu=1$，这些公式就化成为：

1) 1973 年 8 月国际天文学联合会决定斯托克斯参量的参照系是赤经、赤纬取电矢量极大的位置角 θ，从北开始，向东增加。椭圆偏振的定义与国际电气和电子工程师协会标准 211 号(1969)的定义一致，即入射辐射的偏振是在空间一个固定点测量的电矢量的位置角 θ 是随时间而增加的，就描述为右旋的或正的。——译者注

$$R_{\perp}=\left[\frac{\cos\theta_i-(\varepsilon-\sin^2\theta_i)^{1/2}}{\cos\theta_i+(\varepsilon-\sin^2\theta_i)^{1/2}}\right]^2;$$
$$R_{/\!/}=\left[\frac{\varepsilon\cos\theta_i-(\varepsilon-\sin^2\theta_i)^{1/2}}{\varepsilon\cos\theta_i+(\varepsilon-\sin^2\theta_i)^{1/2}}\right]^2, \tag{1-74}$$

式中 ε 是介质的介电常数。海尔斯等(Heiles 和 Drake, 1963; Clark 和 Kuzmin, 1965; Berge 和 Greisen, 1969; 以及 Muhleman, 1969)曾讨论过利用(1-74)式来确定月球及金星的介电常数。

透射波的能量与入射波的能量之比由透射系数给出：

$$T_{/\!/}=1-R_{/\!/} \quad 及 \quad T_{\perp}=1-R_{\perp}。 \tag{1-75}$$

对于正入射，(1-74)式及(1-75)式简化为：

$$R=\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 \quad 及 \quad T=\frac{4n}{(n+1)^2}, \tag{1-76}$$

式中
$$n=\frac{n_2}{n_1}=\left(\frac{\varepsilon_2\mu_2}{\varepsilon_1\mu_1}\right)^{1/2}。$$

当一个波从真空正入射到 $\mu=1$ 的介质上时，反射系数成为：

$$R_0=\left[\frac{1-\sqrt{\varepsilon}}{1+\sqrt{\varepsilon}}\right]^2。 \tag{1-77}$$

如果介质是电导率为 σ 的部分导电介质，则(1-77)式中所出现的 ε 项必须代之以

$$\frac{1}{\mu}\left[\varepsilon+\frac{i\sigma}{2\pi\nu}\right], \tag{1-78}$$

式中 ν 是波的频率。在这种情况下，透射波的振幅在下述皮层厚度距离以内减少到初始值的 $1/e$：

$$\delta=c/\sqrt{4\pi^2\mu\nu\sigma}=c/\sqrt{2\pi\mu\omega\sigma}。 \tag{1-79}$$

雷达天文工作者经常测量雷达截面，它由下式给出：

$$\sigma_r=gR_0\pi r^2, \tag{1-80}$$

式中 r 是行星的半径，系数 g 与行星表面的粗糙度有关。金星、水星、火星和月球的雷达截面的测量是由伊万斯(Evans, 1969)作出的。对于一个具有均方根斜率值为 a 的高斯分布的表面，系数 $g=1+a^2$。

特别重要的是布儒斯特入射角，在以该角入射时，反射辐射的电矢量是线偏振的，其偏振面与入射平面垂直。这个角度由下式给出(Brewster, 1815)：

$$\tan\theta_i=n=\frac{n_2}{n_1}=\left(\frac{\varepsilon_2\mu_2}{\varepsilon_1\mu_1}\right)^{1/2}, \tag{1-81}$$

当从真空入射到 $\mu=1$ 的介质上时，上式就为 $\sqrt{\varepsilon}$。

(1-51)式、(1-64)式、(1-72)式及(1-73)式合在一起就能给出在反射面上的净辐射压力。

$$P_N=\frac{E^2}{4\pi}(1+R)\cos^2\theta_i;$$
$$P_T=\frac{E^2}{4\pi}(1-R)\sin\theta_i\cos\theta_i, \tag{1-82}$$

式中 $E^2/4\pi$ 是波的能量密度，P_N 及 P_T 分别表示压力的法向分量及切向分量，R 是反射系数，θ_i 是入射角。

1.15. 色散关系

荷电为 e、质量为 m 的一个电子是一个原子系统的一部分，它的行为象一个谐振子，它

在 x 方向的运动为：

$$x(t)=x_0\cos(\omega_0 t),$$

式中 t 是时间变量，ω_0 是谐振荡的角频率。当这个振子受到角频率为 ω 的一个谐平面波作用时，它的运动方程就由洛伦兹力定律（(1-52)式）确定为：

$$m\ddot{x}+m\omega_0^2 x=eE(t)=eE_0\exp[i\omega t], \tag{1-83}$$

式中 E_0 是电场矢量 $\boldsymbol{E}$ 的振幅，假定 $\boldsymbol{E}$ 的方向为 x 方向，"··"表示对时间的二阶导数。(1-83)式的解为：

$$x(t)=\frac{eE(t)}{m(\omega_0^2-\omega^2)},$$

所以偶极矩是：

$$d(t)=ex(t)=\frac{e^2E(t)}{m(\omega_0^2-\omega^2)}。 \tag{1-84}$$

利用(1-25)式、(1-30)式及(1-84)式，束缚电子密度为 N 的介质的折射率 n 由下列色散关系式给出：

$$\frac{n^2-1}{n^2+2}=\frac{4\pi Ne^2}{3m(\omega_0^2-\omega^2)}。 \tag{1-85}$$

对于 $n\approx1$ 的气体，我们得出：

$$n\approx\left[1-\frac{4\pi Ne^2}{m(\omega_0^2-\omega^2)}\right]^{1/2}, \tag{1-86}$$

麦克斯韦(Maxwell, 1899)首先导出了这个关系式。对于一个有 N 个原子的系统来说，(1-86)式的量子力学形式为(Ladenburg, 1921; Kramers, 1924)：

$$n\approx\left[1-\frac{Ne^2}{\pi m}\sum_k\frac{f_{1k}}{\nu_{1k}^2-\nu^2}\right]^{1/2}, \tag{1-87}$$

式中 f_{1k} 和 ν_{1k} 分别是从基态能级跃迁到 k 能级的振子的强度和振子的频率。振子强度由 2.4 节的爱因斯坦跃迁几率来确定。对于自由电子密度为 N_e 的气体来说，(1-86)式成为：

$$n\approx\left[1-\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2\right]^{1/2}, \tag{1-88}$$

式中等离子体频率 ω_p 由下式给出：

$$\omega_p=\left(\frac{4\pi N_e e^2}{m}\right)^{1/2}。$$

当必须考虑吸收时，折射率的表达式变得更复杂，如 1.33 节所示。然而，克喇末和克朗尼格 (Kramers 和 Kronig, 1928) 首先导出了折射与吸收之间的普遍关系。若电极化率 $\chi=\chi_1+i\chi_2$，其中 χ_1 和 χ_2 是实数，于是克喇末-克朗尼格关系式是：

$$\begin{aligned}\chi_1(\omega_0)&=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\omega\chi_2(\omega)\,d\omega}{\omega^2-\omega_0^2};\\ \chi_2(\omega_0)&=-\frac{2\omega_0}{\pi}\int_0^\infty\frac{\chi_1(\omega)\,d\omega}{\omega^2-\omega_0^2},\end{aligned} \tag{1-89}$$

式中 ω_0 就是我们正要计算的 χ_1 或 χ_2 处的频率。当一介质具有的总消光截面为 σ_e 时，则(1-89)式成为：

$$\chi_1(\omega_0)=\frac{2c}{\pi V}\int_0^\infty\frac{\sigma_e(\omega)\,d\omega}{\omega^2-\omega_0^2}, \tag{1-90}$$

式中 V 是介质的体积。正如费恩伯格(Feenberg, 1932)首先得出的那样，具有吸收截面为 σ_a、散射截面为 σ_S 的物质，消光截面是 $\sigma_e=\sigma_a+\sigma_S$。

1.16. 洛伦兹坐标变换

洛伦兹变换是一种方法，按照这种方法，一个物理事件在惯性系(K 系)中的坐标 x、y、z、t 能够变换成另一个惯性系(K' 系)中的坐标 x'、y'、z'、t'。一个惯性系的定义是：在这个参照系中自由运动的物体始终保持匀速运动，按照狭义相对论的第一个假设，自然定律相对于一个惯性系到另一个惯性系的洛伦兹变换是协变的。设 K 系沿 x 轴以匀速度 v 离开 K' 系运动，则洛伦兹变换(Lorentz, 1904)为：

$$x'=\gamma[x-vt];\ y'=y,\ z'=z;\ t'=\gamma[t-(xv)/c^2], \tag{1-91}$$

式中

$$\gamma=\left[1-\frac{v^2}{c^2}\right]^{-1/2}。$$

洛伦兹在1904年发表的论文中证明：麦克斯韦方程组在洛伦兹变换下是不变的。

1.17. 电磁场的洛伦兹变换

如果 K 系中有电磁场 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$，则利用洛伦兹变换就可以求出以速度 $\boldsymbol{v}$ 相对于 K 系运动的 K' 系中的场 $\boldsymbol{E}'$ 和 $\boldsymbol{H}'$。$\boldsymbol{E}$ 及 $\boldsymbol{H}$ 在平行于运动方向上的分量是保持不变的，而垂直于 $\boldsymbol{v}$ 的分量由下式给出：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}'&=\gamma[\boldsymbol{E}+(\boldsymbol{v}/c)\times\boldsymbol{H}];\\ \boldsymbol{H}'&=\gamma[\boldsymbol{H}-(\boldsymbol{v}/c)\times\boldsymbol{E}],\end{aligned} \tag{1-92}$$

式中 $\gamma=[1-(v^2/c^2)]^{-1/2}$，我们假定 $\mu=1$，就象在真空中那样。在许多天体物理学问题中，$\boldsymbol{E}\ll\boldsymbol{H}$ 及 $v\ll c$，所以(1-92)式成为：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}'&\approx\boldsymbol{E}+(\boldsymbol{v}/c)\times\boldsymbol{H};\\ \boldsymbol{H}'&\approx\boldsymbol{H}。\end{aligned} \tag{1-93}$$

1.18. 在运动物质或旋转物质中的感生电场[单极(同极)感应]

根据(1-93)式和(1-45)式、(1-47)式所给出的边界条件，一块以速度 v 运动着的理想导电物质的均匀薄片，在穿过磁场 $\boldsymbol{B}$ 时所具有的感生电场由

$$\boldsymbol{E}=-\frac{\boldsymbol{v}}{c}\times\boldsymbol{B} \tag{1-94}$$

给出，其电力线终止处的面电荷密度为：

$$\rho_s=E/4\pi, \tag{1-95}$$

同样在该表面上也必定存在有面电流密度

$$J_s=cB/4\pi。 \tag{1-96}$$

类似地，置于磁场 $\boldsymbol{B}$ 中的一个半径为 R、以角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ 转动的球，在其表面上感生的电场 $\boldsymbol{E}$ 是：

$$\boldsymbol{E}=-\frac{\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{R}}{c}\times\boldsymbol{B}, \tag{1-97}$$

这也可从洛伦兹力定律((1-52)式)得到。当磁场是一个磁偶极子场((1-19)式)时，从(1-97)式得出：在纬度 λ 与赤道处所感生的电势之差是：

$$V=\frac{\Omega B_p R^2}{2}(\cos^2\lambda-1), \tag{1-98}$$

式中 R 是球半径，B_p 是极区磁场强度。

1.19. 匀速运动的点电荷的电磁场

一个静止的点电荷 q 是不会产生磁场的,其电场由(1-2)式给出:

$$\boldsymbol{E}=\frac{q}{R^2}\boldsymbol{n}_r,$$

式中 R 是与电荷 q 的径向距离,$\boldsymbol{n}_r$ 是沿径向的单位矢量。当电荷以 v 匀速运动时,洛伦兹变换给出(Poincaré, 1905):

$$\boldsymbol{E}=\frac{q}{R^2}\frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta\right)^{3/2}}\boldsymbol{n}_r;$$

$$\boldsymbol{H}=-(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E})/c, \tag{1-99}$$

式中 θ 是运动方向与径向单位矢量 $\boldsymbol{n}_r$ 间的夹角。

1.20. 矢势和标势(推迟势和利纳德-维谢尔势)

因为任何一个矢量的旋度的散度是零,因此从(1-42)式得出,磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 可以用下式表示为:

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}, \tag{1-100}$$

式中 $\boldsymbol{A}$ 称为磁矢势。于是,由(1-40)式得出:

$$\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}-\nabla\varphi, \tag{1-101}$$

式中 φ 称为标量电势。$\boldsymbol{A}$ 和 φ 可用下列洛伦兹条件联系起来(Lorentz, 1892):

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0。 \tag{1-102}$$

当应用洛伦兹条件时,从麦克斯韦方程组(1-39)～(1-42)式可知,在真空中($\varepsilon=\mu=1$),磁矢势和标量电势满足下列波动方程:

$$\begin{aligned}\nabla^2\boldsymbol{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}&=-\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J};\\ \nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}&=-4\pi\rho,\end{aligned} \tag{1-103}$$

式中 $\boldsymbol{J}$ 是电流密度和 ρ 是电荷密度。这些方程具有推迟解(Lorentz, 1892):

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(R,\ t)&=\frac{1}{c}\int\frac{\boldsymbol{J}\left(t-\frac{R}{c}\right)}{R}dV;\\ \varphi(R,\ t)&=\int\frac{\rho\left(t-\frac{R}{c}\right)}{R}dV,\end{aligned} \tag{1-104}$$

式中积分是在推迟时间 $t'=t-R/c$ 时的电荷及电流密度的体积分,R 是径向距离。

如果每个荷电体积元以速度 v 运动,那末在(1-104)式中的体积分必须用变化的电荷密度来作修正。考虑距离积分所选取的坐标原点为 R、厚度为 dr 的一个球形壳层。在时间 $dt=dr/c$ 内,流过壳层内表面的电荷量是:

$$\rho\boldsymbol{n}_r\cdot\boldsymbol{v}\,dt=\rho\frac{\boldsymbol{n}_r\cdot\boldsymbol{v}}{c}dr, \tag{1-105}$$

其中 $\boldsymbol{n}_r$ 是径向单位矢量,$\boldsymbol{v}$ 是速度矢量。在体积元 dV 中电荷元 dq 的总和是:

$$dq=\rho\left[1-\frac{\boldsymbol{n}_r\cdot\boldsymbol{v}}{c}\right]dV。\tag{1-106}$$

对于一个以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动的点电荷 q,(1-104) 式与 (1-106) 式给出利纳德-维谢尔势(Liénard, 1898; Wiechert, 1901):

$$\begin{aligned}\varphi(R,\ t)&=\left.\frac{q}{R\left[1-\frac{\boldsymbol{n}_r\cdot\boldsymbol{v}}{c}\right]}\right|_{t'=t-R/c};\\ \boldsymbol{A}(R,\ t)&=\left.\frac{q\boldsymbol{v}}{cR\left[1-\frac{\boldsymbol{n}_r\cdot\boldsymbol{v}}{c}\right]}\right|_{t'=t-R/c},\end{aligned}\tag{1-107}$$

式中 R 是与电荷的距离。

1.21. 加速点电荷的电磁辐射

由(1-101)式和(1-107)式直接得出:一个沿 z 轴以速度 $v\ll c$ 运动的点电荷的电场矢量 $\boldsymbol{E}$ 和磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 由下式给出:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}&=\left.\frac{q\dot{v}}{c^2R}\sin\theta\boldsymbol{n}_\theta\right|_{t'=t-R/c};\\ \boldsymbol{B}&=\left.\frac{q\dot{v}}{c^2R}\sin\theta\boldsymbol{n}_\varphi\right|_{t'=t-R/c},\end{aligned}\tag{1-108}$$

式中"·"表示对时间的一阶导数,$\dot{v}$ 是加速度,θ 是 z 轴与到观测点的径向矢量间的夹角,$\boldsymbol{n}_\theta$ 和 $\boldsymbol{n}_\varphi$ 是由球面坐标系所确定的 θ 和 φ 方向上的单位矢量,并假定径向距离 R 很大。于是从(1-63)式和(1-64)式得出,每单位时间每单位立体角 $d\Omega$ 内总的辐射能是:

$$\frac{dP}{d\Omega}=\left.\frac{q^2\dot{v}^2}{4\pi c^3}\sin^2\theta\right|_{t'=t-R/c},\tag{1-109}$$

而每单位时间内在所有方向辐射的总能量是:

$$P=\left.\frac{2}{3}\frac{q^2}{c^3}\dot{v}^2\right|_{t'=t-R/c}。\tag{1-110}$$

这个结果首先是由拉莫尔(Larmor, 1897)得到的。

当速度较大时,其修正结果是(Liénard, 1898; Jackson, 1962)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}&=\left[q\left.\frac{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta})(1-\beta^2)}{(1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^3R^2}\right|_{t'=t-R/c}+\frac{q}{c}\left[\frac{\boldsymbol{n}\times\{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}\}}{(1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^3R}\right]\right|_{t'=t-R/c};\\ \boldsymbol{H}&=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E};\\ \frac{dP}{d\Omega}&=\left.\frac{q^2}{4\pi c}\frac{|\boldsymbol{n}\times\{(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}\}|^2}{(1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^5}\right|_{t'=t-R/c};\\ P&=\left.\frac{2}{3}\frac{q^2}{c}\gamma^6[(\dot{\boldsymbol{\beta}})^2-(\boldsymbol{\beta}\times\dot{\boldsymbol{\beta}})^2]\right|_{t'=t-R/c},\end{aligned}\tag{1-111}$$

式中 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{v}/c$,观测方向上的单位矢量为 $\boldsymbol{n}$,而 $\gamma=[1-(v/c)^2]^{-1/2}$。

1.22. 电偶极子和磁偶极子的电磁辐射

一个电荷 q 的电偶极矩 $d(t)$ 与其加速度 $\dot{v}(t)$ 的关系是 $\dot{v}(t)=\ddot{d}(t)/q$。所以由(1-108)式可知,对于一个沿 z 轴取向的电偶极子,其电矢量及磁矢量为:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}&=\left.\frac{\ddot{d}(t)}{c^2R}\sin\theta\boldsymbol{n}_\theta\right|_{t'=t-R/c};\\ \boldsymbol{H}&=\left.\frac{\ddot{d}(t)}{c^2R}\sin\theta\boldsymbol{n}_\varphi\right|_{t'=t-R/c},\end{aligned}\tag{1-112}$$

式中距离 R 是较大的，θ 是 z 轴与到观测点的径向矢量间的交角，$\boldsymbol{n}_\theta$ 及 $\boldsymbol{n}_\varphi$是在 θ 及 φ 方向的单位矢量。同样，由(1–63)式与(1–64)式可知，每单位时间每单位立体角所辐射的总能量为：

$$\frac{dP}{d\Omega}=\frac{[\ddot{d}(t)]^2}{4\pi c^3}\sin^2\theta\Big|_{t'=t-R/c}, \tag{1–113}$$

而每单位时间在所有方向上所辐射的总能量为：

$$P=\frac{2}{3}\frac{[\ddot{d}(t)]^2}{c^3}\Big|_{t'=t-R/c}。 \tag{1–114}$$

例如，对于一个在 x–y 平面内以角速度 Ω 转动的电偶极子来说，每单位时间每单位立体角所辐射的总能量为(Landau 和 Lifshitz, 1962)：

$$\frac{dP}{d\Omega}=\frac{d_0^2\Omega^4}{8\pi c^3}(1+\cos^2\theta), \tag{1–115}$$

而每单位时间在所有方向上所辐射的总能量为：

$$P=\frac{2d_0^2\Omega^4}{3c^3}, \tag{1–116}$$

式中 d_0 是偶极矩 $d(t)$ 的最大值，并且上式中各量都已取为一个转动周期的平均值。作为另一个例子，对于一个荷电为 q 的谐振荡来说，在振荡频率为 ν_0 时，每单位时间所辐射的总能量为：

$$P=\frac{64\pi^4\nu_0^4}{3c^3}\left|\frac{qx_0}{2}\right|^2, \tag{1–117}$$

式中 $|qx_0/2|$ 是偶极矩的均方根值，x_0 是谐振位移的峰值。对于一个磁偶极矩为 $m(t)$ 的磁偶极子来说，以 $m(t)$ 代替 $d(t)$ 代入(1–112)～(1–117)式就给出相应的各个量，只是此时 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的地位互换而已。也就是说，在电偶极子的 $\boldsymbol{E}$ 公式中用 $m(t)$来代替 $d(t)$，就可得到磁偶极的 $\boldsymbol{H}$ 公式。当偶极子的速度 v 可与光速 c 相比拟时，其相应的方程首先由亥维赛(Heaviside, 1902)得出。

(1–112)～(1–117)式是对远场($R\gg c\dot{d}/\ddot{d}$ 和 $R>cd/\dot{d}$)所得到的解。赫兹(Hertz, 1889)得出了一个偶极子的电磁场的通解，在球面坐标轴的各个方向上的场分量是：

$$\left.\begin{aligned}
E_r&=2\left(\frac{[d]}{R^3}+\frac{[\dot{d}]}{cR^2}\right)\cos\theta;\\
E_\theta&=\left(\frac{[d]}{R^3}+\frac{[\dot{d}]}{cR^2}+\frac{[\ddot{d}]}{c^2R}\right)\sin\theta;\\
H_\varphi&=\left(\frac{[\dot{d}]}{cR^2}+\frac{[\ddot{d}]}{c^2R}\right)\sin\theta,
\end{aligned}\right\} \tag{1–118}$$

式中[ ]表示在推迟时间 $t'=t-(R/c)$ 求出的值，偶极子方向是沿 z 轴的，θ 是 z 轴与到观测点的径向矢量间的[1]夹角，R 是到观测点的距离。用 $m(t)$ 代替 $d(t)$、H 代替 E 和 E 代替 H，(1–118)式就给出磁偶极矩为 $m(t)$ 的一个磁偶极子场。

1.23. 黑体的热辐射

一个处在温度为 T 的热动平衡之中的黑体(完全吸收体)，它所辐射的亮度 $B_\nu(T)$ 为(Planck, 1901, 1913; Wien, 1893, 1894; Rayleigh, 1900, 1905; Jeans, 1905, 1909; Milne, 1930)：

1) 原文遗漏"径向矢量间的"。——译者注

$$B_\nu(T)=\frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{n_\nu^2}{[\exp(h\nu/kT-1)]} \quad \text{普朗克定律} \tag{1-119}$$

$$=\frac{2h\nu^3n_\nu^2}{c^2}\exp(-h\nu/kT) \quad (\text{若}h\nu\gg kT) \quad \text{维恩定律} \tag{1-120}$$

$$=\frac{2n_\nu^2\nu^2kT}{c^2} \quad (\text{若}\ h\nu\ll kT) \quad \text{瑞利-琼斯定律,} \tag{1-121}$$

式中 n_ν 是介质在频率 ν 处的折射率，c 是光速，h 和 k 分别是普朗克常数和玻耳兹曼常数。瑞利-琼斯近似式是用在频率 $\nu=10^9$ 赫的无线电频段，即当判据 $h\nu\ll kT$ 或 $\nu<2\times10^{10}T$ 成立时适用。维恩近似式有时用于光学频段，即 $\nu\approx10^{15}$ 赫。温度 T 称为等效亮温度，亮度单位是尔格·秒$^{-1}$·厘米$^{-2}$·赫$^{-1}$·弧度$^{-2}$。$B_\nu(T)$ 随 T 变化的曲线如图 1 所示。

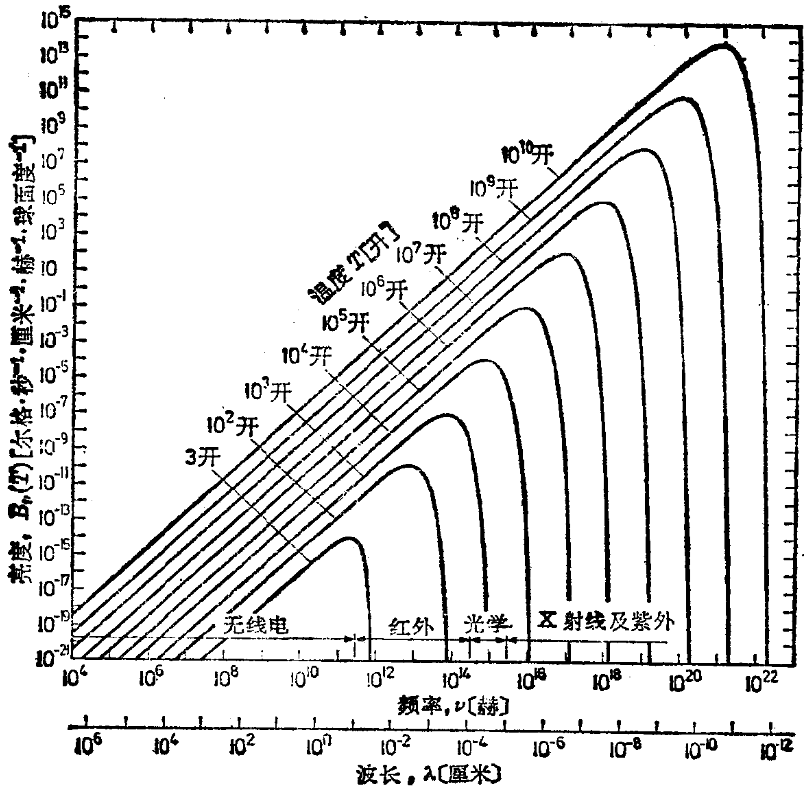


图 1 频率为 ν、温度为 T 的黑体辐射的亮度 $B_\nu(T)$。普朗克函数 $B_\nu(T)$ 由(1-119)式给出

相应于亮度为最大的频率 ν_{max} 由下式给出(Wien, 1894)：

$$\nu_{max}\approx\frac{3kT}{h}\approx6\times10^{10}T\ \text{赫} \quad \text{维恩位移定律} \tag{1-122}$$

或 $$\lambda_{max}\approx0.51T^{-1},$$

式中 λ_{max} 是最大亮度的波长，单位是厘米。当亮度以单位波长而不是以单位频率表示时，$\lambda_{max}\approx0.29T^{-1}$ 厘米。

只要将 $B_\nu(T)$ 对所有频率积分，就可得到黑体的总发射率 B (Stefan, 1879; Boltzmann, 1884; Milne, 1930)：

$$B=\sigma T^4n^2 \quad \text{斯忒藩-玻耳兹曼定律,} \tag{1-123}$$

式中 n 是介质的折射率，斯忒藩-玻耳兹曼常数 $\sigma=2\pi^5k^4/(15c^2h^3)=$ *5.67032×10^{-5} 尔格·

厘米$^{-2}$·秒$^{-1}$·开$^{-4}$。所以黑体总强度 I 由下式给出:

$$I=\frac{\sigma n^2}{\pi}T^4={}^*1.804919\times10^{-5}T^4 \text{ 尔格·厘米}^{-2}\text{·秒}^{-1}\text{·球面度}^{-1}, \tag{1-124}$$

而辐射能量密度 U 是:

$$U=aT^4n^3, \tag{1-125}$$

式中辐射密度常数 $a=4\sigma/c={}^*7.565660\times10^{-15}$ 尔格·厘米$^{-3}$·开$^{-4}$。

对一个灰体来说,有效温度 $T_{\text{有效}}$ 由下式给出:

$$T_{\text{有效}}=[1-R_0(\lambda)]T, \tag{1-126}$$

式中 $R_0(\lambda)$ 是在观测波长 λ 时的反射系数,它由(1-77)式或(1-78)式给出;$[1-R_0(\lambda)]$ 称为发射率,T 是黑体温度。

一个没有导热性及没有大气的行星,它的有效温度为:

$$T_{\text{有效}}=T_\odot\left(\frac{R_\odot}{a}\right)^{1/2}(1-A)^{1/4}={}^*393.56(1-A)^{1/4}a^{-1/2}, \tag{1-127}$$

式中太阳温度 $T_\odot={}^*5770$ 开;太阳半径 $R_\odot={}^*6.9599\times10^{10}$ 厘米; 行星轨道半长径为 a,单位是天文单位距离[1],以近似数值表示;而一颗行星的邦德反照率(Bond, 1863)A 定义为行星在所有方向反射的辐射能总量与它接收到的来自太阳的能量之比。若行星缓慢自转,并且主要从它的日射面辐射的话,其有效温度为:

$$T_{\text{有效}}=\frac{T_\odot}{(2)^{1/4}}\left(\frac{R_\odot}{a}\right)^{1/2}(1-A)^{1/4}={}^*330.95(1-A)^{1/4}a^{-1/2}, \tag{1-128}$$

而对于快速自转的大行星来说,

$$T_{\text{有效}}=\frac{T_\odot}{\sqrt{2}}\left(\frac{R_\odot}{a}\right)^{1/2}(1-A)^{1/4}={}^*278.29(1-A)^{1/4}a^{-1/2}。 \tag{1-129}$$

行星温度的实测值综合于表 1,在表 57 中列出了反照率及由(1-127)式给出的温度。

对于一个半径为 r 及距离地球为 D 的黑体,入射到地球上的流量密度 $S_\nu(T)$ 是:

$$S_\nu(T)=\Omega_S B_\nu(T)\approx\frac{\pi r^2}{D^2}B_\nu(T), \tag{1-130}$$

式中 Ω_S 是源所张的立体角,$B_\nu(T)$ 是源在频率为 ν、温度为 T 时的亮度。具有效率为 η_A、射束面积为 Ω_A 的天线,它所观测到的流量 $S_{0\nu}(T)$ 由下式给出:

$$S_{0\nu}(T)=\eta_A\Omega_S B_\nu(T) \quad (\text{若 } \Omega_S<\Omega_A) \tag{1-131}$$

或

$$\eta_A\Omega_A B_\nu(T) \quad (\text{若 } \Omega_S\geqslant\Omega_A)。 \tag{1-132}$$

在无线电频段,应用瑞利-琼斯近似式于(1-131)式就可得出:

$$S_{0\nu}(T)=3.07\times10^{-37}\eta_A\Omega_S\nu^2T \text{ 尔格·秒}^{-1}\text{·厘米}^{-2}\text{·赫}^{-1} \quad (\text{若 } \Omega_S<\Omega_A)。 \tag{1-133}$$

射电天文工作者以流量单位[2]量度流量密度,这里 1 流量单位 $=10^{-23}$ 尔格·秒$^{-1}$·厘米$^{-2}$·赫$^{-1}$ $\doteq10^{-26}$ 瓦·米$^{-2}$·赫$^{-1}$。

在光学频段,可以应用维恩近似式于(1-131)式,这就得出:

$$S_{0\nu}(T)=1.47\times10^{-47}\eta_A\Omega_S\nu^3\exp\left(-4.8\times10^{-11}\frac{\nu}{T}\right)\text{尔格·秒}^{-1}\text{·厘米}^{-2}\text{·赫}^{-1}。 \tag{1-134}$$

光学天文工作者以视星等 m 量度光通量。对于视星等为 m_1 和 m_2 的两颗恒星,量度来自它们的总通量之比的 s_1/s_2 由下列关系式给出:

---

1) 原文为"天文单位",系"天文单位距离"的旧称。——译者注

2) 1973 年 8 月国际天文学联合会决定,采用央斯基(Jansky)为射电天文学中流量密度的单位,简写为央(Jy),1 央$=10^{-26}$ 瓦·米$^{-2}$·赫$^{-1}$,并加入国际单位制。——译者注

表 1 月球及行星在射电波段的亮度温度[1]

波长 (厘米)	月球 (开)	水星 (开)	金星 (开)	火星 (开)	木星 (开)	土星 (开)	天王星 (开)	海王星 (开)
0.10	229			171±31	155±15	140±15		
0.12					155±80			
0.13	216			184±50				
0.15	265							
0.18	240							
0.225			240±40					
0.32	210				111±15	97±50		
0.33	196	227±53		178±18				
0.34			296±30	198±40		130±15		
0.35							133±23	84±13
0.387								
0.40	230							
0.43					105±15	133±24		
0.80	211					132±9		
0.815			380±40	173±18				
0.85			350±40		144±23			
0.86	225		425±40	240±42	113±11	96±20		
1.18	220		400±36		128±11			
1.25	215							
1.28					116±10			
1.34					98±11			
1.37	220							
1.43			451±40		106±11			
1.46			440±50					
1.50						141±15		
1.53		450±60		165±33				
1.58			477±57		105±21			
1.65	207			196±16	165±12		201±16	194±24
1.90		288±46			180±27	140±15		
1.94			495±25	168±17				
2.00	190						205±35	155±30
2.70				186±12	201±13		212±16	225±20
3.00					171±30			
3.10			592±40			137±12	158±20	115±36
3.14	195			211±28	145±26			
3.17					173±30			
3.20	216							
3.40						106±21		
3.60		390±100						
3.70						159±16		
3.75			675±20	210±11	226±34			
4.52			653±30					
6.00			700±35	196±27	291±25	176±10	210±17	227±33
7.50			630±30					
9.00						165±25		
9.40	220				658±58	177±30		
9.60	230							
10.0			640±35	184±18	690±62	196±55		

(续表)

波 长 (厘米)	月球 (开)	水 星 (开)	金 星 (开)	火 星 (开)	木 星 (开)	土 星 (开)	天王星 (开)	海王星 (开)
10.2					640±85			
10.3								
10.6			650±40		826	172±20		
11.0	214			169±19		200±30		
11.3		300±15	630±20	170±19	706	196±20	130±40	
20.8	205				1,312			
21.0	232				3,570	200±30		
21.2			587±25	233±65	2,745	286±37		
21.3			590±20	163±35		303±50		
21.6					3,043			
22.0	270				2,979			
25.0	226							
30.2	227							
31.0					5,447			
31.25	227							
32.3	233							
35.2	223							
40.0	224							
42.9					11,280			
48.4					14,320			
49.0					14,990			
49.1					11,880			
54.0	218.5							
60.24	216.5							
68.0					23,790			
69.8					27,190			
70.16	217				20,000	1690±430		
73.0					28,120			
75.0					28,050			
154.0					138,650			
168.0					135,000			
368.0					579,440			

[1] 数据取自迪克尔等(Dickel, Degioanni 和 Goodman, 1970; Epstein, 1971; Hagfors, 1970; Kellermann, 1970; Mayer, 1970; Mayer 和 McCullough, 1971; Morrison, 1970; Pollack 和 Morrison, 1970; 以及 Troitskii, 1970)的文献。在波长小于 10 厘米时，已观测到月球、水星、金星及火星的亮度温度随相位而变化。当波长从 3 厘米减至 0.1 厘米时，月球亮度温度的可变分量从 15 开增至 115 开，而水星、金星及火星的可变分量分别约为 90 开、50开及 40开。

$$m_1 - m_2 = -2.5\log(s_1/s_2)。\tag{1-135}$$

一个星等等于负 4 分贝。在地球上观测，太阳的校准目视星等 $m_\odot = -26.73 \pm 0.03$，而 $S_\odot = {}^*1.360 \times 10^6$ 尔格·秒$^{-1}$·厘米$^{-2}$。流量密度和星等同光度关系的进一步的公式，以及星等的修正公式将在第 5 章中给出。

莫森盖尔 (Mosengeil, 1907) 首先应用洛伦兹变换 (1-91) 式计算来自一个以速度 v 远离观测者运动的黑体的辐射。在辐射源处，在频率范围 $d\nu$、立体角 $d\Omega$ 内射辐的总通量 s 为:

$$s = B_\nu(T)\, d\nu d\Omega,\tag{1-136}$$

式中 $B_\nu(T)$ 是温度为 T、频率为 ν 的黑体的亮度。所观测到的频率 $\nu_{观}$ 由下式给出(Lorentz,

1904):

$$\nu_{观}=\frac{\nu}{(1-\beta^2)^{1/2}}(1-\beta\cos\theta), \tag{1-137}$$

这里已考虑了运动源的频移，它是由多普勒(Doppler, 1843)首先得出的。其中 $\beta=v/c$, θ 表示速度矢量与辐射源的波矢之间的夹角。观测到的立体角 $d\Omega_{观}$ 由下式给出:

$$d\Omega_{观}=\frac{1-\beta^2}{(1-\beta\cos\theta)^2}d\Omega。 \tag{1-138}$$

由(1-92)式与(1-119)式可知，观测者测量到的总通量密度 $S_{观}$ 和亮度 $B_{\nu观}(T_{观})$ 分别为:

$$S_{观}=B_\nu(T)\frac{(1-\beta\cos\theta)^2}{(1-\beta^2)}d\nu d\Omega=B_{\nu观}(T_{观})d\nu_{观}d\Omega_{观}, \tag{1-139}$$

$$B_{\nu观}(T_{观})=\frac{B_\nu(T)(1-\beta\cos\theta)^3}{(1-\beta^2)^{3/2}}$$

$$=\frac{2h\nu_{观}^3}{c^2\exp\{[h\nu_{观}/(kT)][(1-\beta^2)^{1/2}/(1-\beta\cos\theta)]\}-1}。 \tag{1-140}$$

由(1-140)式可见，所测量到的光谱就是处在温度为 $T_{观}=T(1-\beta\cos\theta)(1-\beta^2)^{-1/2}$ 的一个黑体辐射体的光谱。对于 $\beta\ll1$ 及一个膨胀着的背景辐射，我们就可得到 $T_{观}\approx T(1+\beta\cos\theta)$。

1.24. 辐射转移和观测亮度

一束强度为 I_0 的辐射，通过一团厚度为 L 的吸收云后，它的辐射强度就由下式给出:

$$I_{0\nu}=I_0\exp(-\tau_\nu), \tag{1-141}$$

式中光学深度 $\tau_\nu=\int_0^L\alpha_\nu dx$, 在云中每单位长度的吸收系数是 α_ν, 下标 ν 表示随频率而异。

一个吸收体同样会发出辐射，其发射系数 ε_ν 定义为单位体积的物质在每秒每单位立体角内所辐射的处在频率为 ν 至 $\nu+d\nu$ 的总能量。所以单位截面积、长度为 L 的气体柱发射的总强度 I_ν 为:

$$I_\nu=\int_0^L\varepsilon_\nu\exp[-\alpha_\nu x]dx。 \tag{1-142}$$

对于处在温度为 T 的热动平衡之中的物质来说，我们得出(Kirchhoff, 1860; Milne, 1930):

$$\varepsilon_\nu=n_\nu^2\alpha_\nu B_\nu(T) \qquad (基尔霍夫定律), \tag{1-143}$$

式中 $B_\nu(T)$ 是处在温度为 T 的黑体的真空亮度，n_ν 是介质的折射率。

由(1-142)式和(1-143)式得出:

$$\begin{aligned}B_{c\nu}(T)&=B_\nu(T)[1-\exp(-\tau_\nu)]\\&=B_\nu(T)\quad(若\ \tau_\nu\gg1,\ 光学厚)\\&=\tau_\nu B_\nu(T)\quad(若\ \tau_\nu\ll1,\ 光学薄),\end{aligned} \tag{1-144}$$

式中 $B_{c\nu}(T)$ 称为云在频率为 ν 时的亮度，并且假设折射率等于1。

若一个处在频率 ν、亮度 $B_{s\nu}(T)$ 的源照射着一团云的话，那末该团云的总亮度 $B_{0\nu}(T)$ 将为:

$$B_{0\nu}(T)=B_{s\nu}(T)\exp[-\tau_\nu]+B_{c\nu}(T), \tag{1-145}$$

式中 $B_{c\nu}(T)$ 由(1-144)式给出。当观测一气体云时，由天线所观测到的流量密度仍由(1-131)式或(1-132)式给出，只是把 $B_{c\nu}(T)$ 或 $B_{0\nu}(T)$ 代换 $B_\nu(T)$ 而已。

1.25. 单电子的磁轫致辐射或回转辐射(回磁辐射及同步加速辐射)

当一个电子以速度 v 和加速度 $\dot{v}$ 作直线运动时，每单位立体角辐射的总功率是

(Liénard, 1898):

$$\frac{dP}{d\Omega}=\frac{e^2\dot{v}^2}{4\pi c^3}\frac{\sin^2\theta}{(1-\beta\cos\theta)^5}, \tag{1-146}$$

式中 $\beta=v/c$, θ 是视线与 v 和 $\dot{v}$ 的共同方向间的夹角(这里我们假定了加速度矢量平行于速度矢量)。在低速度时这种分布成为拉莫尔分布((1-109)式)。在高速度时，分布形成一个狭窄圆锥，该圆锥的半角 θ 由下式给出:

$$\theta=\gamma^{-1}=[1-\beta^2]^{1/2}=mc^2E^{-1}={}^*8.187241\times10^{-7}E^{-1}\text{ 弧度}, \tag{1-147}$$

式中 $\beta=v/c$, E 是电子的总能量。这个定向辐射束是典型的，不管加速度和速度矢量间的关系如何。

当电子沿半径为 ρ 的圆形轨道运动时，观测者看到一个辐射脉冲，其持续时间在电子的参照系中近似为 $\rho/(\beta c\gamma)$，而在观测者自己的参照系中近似为 $\rho/(\beta c\gamma^3)$。因此每一个辐射脉冲包含有直到临界频率 ν_c 的一切频率，ν_c 由下式给出:

$$2\pi\nu_c=\left(\frac{c\beta}{\rho}\right)\gamma^3\approx6\times10^{28}\frac{E^3}{\rho}\text{ 赫}。 \tag{1-148}$$

若假定电子的运动是周期性圆周运动的话，那末所观测到的辐射将由转动频率 c/ρ 的各种谐波(直到临界谐波 γ^3 为止)构成。

辐射的总功率 P_r 由下式给出(Jackson, 1962):

$$P_{r\parallel}=\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\dot{v}^2\gamma^6, \tag{1-149}$$

式中 $\dot{v}$ 表示速度 v 对时间的一阶导数。(1-149)式的下标 $\parallel$ 表示加速度矢量与速度矢量平行。当它们互相垂直时，辐射的总功率为:

$$P_{r\perp}=\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\dot{v}^2\gamma^4。 \tag{1-150}$$

这个结果首先由利纳德(Liénard, 1898)得到。

当一个电子在强度为 H 的磁场中以速度 v 运动时，回转频率 ω_H 为(Heaviside, 1904):

$$\omega_H=\frac{c\beta}{\rho}=\frac{eH}{\gamma mc}\sin\psi={}^*1.758805\times10^7\frac{H}{\gamma}\sin\psi\text{ 赫}={}^*14.37582\frac{H}{E}\sin\psi\text{赫}, \tag{1-151}$$

式中螺距角 ψ 是 H 矢量与速度矢量间的夹角。这就是说回转半径 ρ 为:

$$\rho=\frac{v}{\omega_H}={}^*2.085394\times10^9EH^{-1}\text{ 厘米}\quad(\text{当 } v\approx c\text{ 时})。 \tag{1-152}$$

当 $v\ll c$ 时，总的回转辐射称为回磁辐射。当电子速度是相对论性的，辐射称为同步加速辐射。在这种情况，辐射主要是在垂直于磁场的方向，并且形成宽度为 γ^{-1} 的狭窄射束。阿耳文和赫洛夫森(Alfvén 和 Herlofson, 1950)首先提出宇宙射电源可能辐射同步加速辐射。后来，金兹堡(Ginzburg, 1953)提出蟹状星云的光学辐射是同步加速辐射，并且将会看到它们是偏振的——杜勃罗夫斯基(Dombrovskii, 1954)在光学波段和奥尔特等(Oört 和 Walraven, 1956)在射电波段的确观测到了偏振。

如爱泼斯坦等(Epstein 和 Feldman, 1967)所指出的，对于单个电子的同步加速辐射的常用公式，必须用下述多普勒频移的回转频率 ω_{DH} 来加以修正:

$$\omega_{DH}=\frac{\omega_H}{(1-\beta\cos^2\psi)}\approx\frac{\omega_H}{\sin^2\psi}。 \tag{1-153}$$

当考虑电子系综的辐射时(Scheuer, 1968)，这些效应就相互抵消了，为此，在以后的讨论中就不再考虑多普勒频移的效应。

同步加速辐射达到最大的频率称为临界频率，它定义为：

$$\nu_c=\frac{3}{4\pi}\frac{eH}{mc}\gamma^3\sin\psi=*6.264030\times10^{18}HE^2\sin\psi \text{ 赫。} \tag{1-154}$$

当 H 用微高斯、E 用京电子伏和 ν 用兆赫作单位时，(1-154)式中的常数是 *16.07983。由(1-150)式及(1-151)式得出辐射总功率 P_r 为：

$$P_r=\frac{2}{3}\frac{e^4}{m^2c^3}\beta^2\gamma^2H^2\sin^2\psi=*2.367648\times10^{-3}H^2E^2\sin^2\psi \text{ 尔格·秒}^{-1} \tag{1-155}$$

$$=*1.586910\times10^{-15}H^2\gamma^2\sin^2\psi \text{ 尔格·秒}^{-1}\text{。}$$

奥德尔等(O'Dell 和 Sartori, 1970)注意到只有在 $\gamma\sin\psi\gg1$ 或角频率 $\omega\gg10^7H/\sin\psi$ 时，此式及下列类似式才成立。由(1-155)式，在以最大频率为中心的每单位频率间隔 ν 至 $\nu+d\nu$ 间辐射的总功率为：

$$P(\nu_m)d\nu\approx\frac{P_r}{\nu_c}\approx*3.779752\times10^{-22}H \text{ 尔格·秒}^{-1}\text{·赫}^{-1}\text{。} \tag{1-156}$$

由于辐射阻尼，电子的寿命 τ_r 为：

$$\tau_r\approx\frac{E}{P_r}=*422.3601E^{-1}H^{-2} \text{ 秒。} \tag{1-157}$$

肖特(Schott, 1912)首先对一个作圆周运动的相对论性粒子的辐射进行了详尽的计算。当对一个在磁场中作超相对论性运动($E\gg mc^2$)的电子，应用这些方程时(Vladimirskii, 1948; Schwinger, 1949; Westfold, 1959)，就得出了下列公式。

在所有方向每单位频率间隔辐射的平均功率，可以按照平行于或垂直于 H 场线在垂直观测方向平面内的投影而分成两个分量 $P_1(\nu)$ 和 $P_2(\nu)$：

$$P_1(\nu)d\nu=\frac{\sqrt{3}e^3H}{2\pi mc^2}\frac{\nu}{2\nu_c}\left[\int_{\nu/\nu_c}^{\infty}K_{5/3}(\eta)d\eta-K_{2/3}\left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)\right]d\nu; \tag{1-158}$$

$$P_2(\nu)d\nu=\frac{\sqrt{3}e^3H}{2\pi mc^2}\frac{\nu}{2\nu_c}\left[\int_{\nu/\nu_c}^{\infty}K_{5/3}(\eta)d\eta+K_{2/3}\left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)\right]d\nu, \tag{1-159}$$

式中假定了电子具有与朝观测者辐射相应的螺距角；K 是修正的贝塞耳函数(具有虚自变数的第二类贝塞耳函数)。

所以在频率 ν 与 $\nu+d\nu$ 间的每单位频率间隔辐射的总功率由下式给出：

$$P(\nu)d\nu=\frac{\sqrt{3}e^3}{mc^2}H_\perp\frac{\nu}{\nu_c}\int_{\nu/\nu_c}^{\infty}K_{5/3}(\eta)d\eta d\nu$$

$$\approx5.04\times10^{-22}H_\perp\left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)^{1/3}d\nu \text{ 尔格·秒}^{-1}\text{·赫}^{-1} \quad (\text{当 } \nu\ll\nu_c) \tag{1-160}$$

$$\approx2.94\times10^{-22}H_\perp\left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)^{1/2}\exp\left(\frac{-\nu}{\nu_c}\right)d\nu \text{ 尔格·秒}^{-1}\text{·赫}^{-1} \quad (\text{当 } \nu\gg\nu_c),$$

式中 $H_\perp$ 是 H 在垂直于速度矢量方向的分量。函数 $P(\nu)d\nu$ 的最大值是在 $\nu=0.3\nu_c$ 处，功率频谱分布如图 2 所示。

对于超相对论性运动($E\gg mc^2$)来说，总的角谱(即角分布)同样能够按照偏振方向是平行或垂直于磁场在垂直观测方向平面内的投影而分解成 $P_1(\psi)$ 和 $P_2(\psi)$ 两个分量(Westfold, 1959; Ginzburg 和 Syrovastkii, 1965)：

$$P_2(\psi)=\frac{3}{4\pi^2r^2}\frac{e^3H}{mc^2\zeta}\left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)^2\left(1+\frac{\psi^2}{\zeta^2}\right)^2[K_{2/3}(g_\nu)]^2;$$

$$P_1(\psi)=\frac{3}{4\pi^2r^2}\frac{e^3H}{mc^2\zeta}\left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)^2\frac{\psi^2}{\zeta^2}\left(1+\frac{\psi^2}{\zeta^2}\right)[K_{1/3}(g_\nu)]^2, \tag{1-161}$$

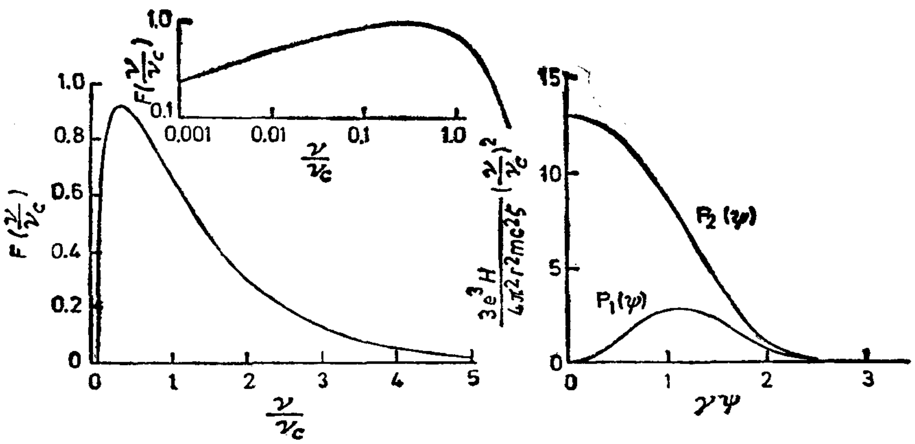


图 2 以线性坐标及对数坐标两者表示的函数 $F(\nu/\nu_c)=(\nu/\nu_c)\int_{\nu/\nu_c}^{\infty}K_{5/3}(\eta)d\eta$，它表征单电子的同步加速辐射的频谱分布(参看 Vladimirskii, 1948; Schwinger, 1949)。(1-160)式给出每单位频率间隔的同步加速辐射总功率与 $F(\nu/\nu_c)$ 的关系，(1-154)式给出临界频率 ν_c。图中所画出的 $P_1(\psi)$ 及 $P_2(\psi)$，分别是在与磁场在垂直观测方向平面内的投影相平行及相垂直方向上的单电子同步加速辐射的角谱(取自 Ginzburg 和 Syrovatskii, 1965)。角度 ψ 是观测方向与辐射锥的最外边的速度矢量之间的夹角。H 是磁场强度，r 是到辐射电子的距离。$\gamma=\zeta^{-1}=[1-(v/c)^2]^{-1/2}$，其中 v 是电子的速度，$P_1(\psi)$ 及 $P_2(\psi)$ 由(1-161)式给出。所画出的角谱曲线是对 $\nu/\nu_c=0.29$ 而言的

式中
$$g_\nu=\frac{\nu}{2\nu_c}\left(1+\frac{\psi^2}{\zeta^2}\right)^{3/2}。$$
已加上 r^2 项以表示辐射的功率随到源的距离 r 而变；$\zeta=\gamma^{-1}=mc^2/E$；ψ 不是螺距角而是观测方向与辐射锥最外边的速度矢量间的夹角。图 2 画出了 $P_1(\psi)$ 和 $P_2(\psi)$。因此，一般说来是椭圆偏振，其长轴及短轴分别平行及垂直于磁场在垂直观测方向平面上的投影。依照 ψ 大于或小于零而确定椭圆是右旋的还是左旋的。只有当 $\psi=0$ 时，才是线偏振的。在一个给定的频率 ν 处，每单位频率间隔的总功率的偏振度是(Westford, 1959)：
$$\pi=\frac{K_{2/3}(\nu/\nu_c)}{\int_{\nu/\nu_c}^{\infty}K_{5/3}(\eta)d\eta}$$
$$\approx\frac{1}{2}\quad(\text{当 }\nu\ll\nu_c) \tag{1-162}$$
$$\approx1-\frac{2\nu_c}{3\nu}\quad(\text{当 }\nu\gg\nu_c)。$$

这里偏振度 π 与观测到的强度的最大值 P_{max} 及最小值 P_{min} 的关系为 $\pi=(P_{max}-P_{min})/(P_{max}+P_{min})$。$\pi$ 与斯托克斯参量的关系见(1-70)式。莱格等(Legg 和 Westford, 1968)给出了一个超相对论性电子的同步加速辐射的斯托克斯参量的详尽公式。

一个电子由于同步加速辐射损失能量的速率由下式给出
$$\frac{dE}{dt}=-\int_0^{\infty}P(\nu)d\nu=-{}^*2.367648\times10^{-3}H_\perp^2E^2\text{ 尔格·秒}^{-1}, \tag{1-163}$$
式中 $P(\nu)d\nu$ 由(1-160)式给出。作为时间 t 的函数的电子能量 $E(t)$ 由下式给出：
$$E(t)=\frac{E_0}{(1+t/t_{1/2})}, \tag{1-164}$$
式中电子损失了它的初始能量 E_0 的一半所需的时间 $t_{1/2}$ 为：

$$t_{1/2}=\frac{{}^{*}4.223601\times10^{2}}{H_{\perp}^{2}E_{0}}\ 秒。\tag{1-165}$$

式中常数$^{*}4.223601\times10^{2}$一般是用更实用的单位$^{*}8.359157\times10^{9}$年·(微高斯)^{2}·京电子伏来表示。正如高仓达雄(Takakura, 1960)所指出的,当热电子存在时,辐射寿命可能不会象磁撞寿命t_c这么短。例如,对于一个能量为E的电子,在密度为N_i的单种带电离子中穿过时,其基本弛豫时间τ_r由下式给出(Trubnikov, 1965):

$$\tau_r\approx\frac{\sqrt{m}}{15\pi\sqrt{2}\,e^{4}}\frac{E^{3/2}}{N_i}$$

$$\approx10^{8}E^{3/2}N_i^{-1}\ 秒,$$

式中数字近似式是对E以千电子伏为单位、N_i以厘米$^{-3}$为单位而言的。

详尽地计算了一个具有中等能量($E\approx mc^2$)的电子,其平行于H场运动的同步加速辐射的角谱(即角分布)及频谱(Trubnikov, 1958; Takakura, 1960; Bekefi, 1966)。在与H场线成θ角的情况下,每单位立体角中所辐射的n次谐波的总功率为:

$$\frac{dP_n}{d\Omega}=\frac{e^{4}H^{2}(1-\beta)^{2}\gamma^{2}}{2\pi m^{2}c^{3}(1-\beta_{/\!/}\cos\theta)^{2}}\left\{\left(\frac{\cos\theta-\beta_{/\!/}}{\beta_{\perp}\sin\theta}\right)^{2}J_n^{2}(\gamma\sin\theta)+J_n'^{2}(\gamma\sin\theta)\right\},\tag{1-166}$$

式中$\beta^2=\beta_{/\!/}^2+\beta_\perp^2=(v_{/\!/}/c)^2+(v_\perp/c)^2=(v/c)^2$, $v_{/\!/}$及$v_\perp$分别是平行及垂直于磁场的粒子瞬时速度,

$$\gamma=\frac{n\beta_{\perp}}{1-\beta_{/\!/}\cos\theta},$$

J_n是n阶贝塞耳函数,"$'$"表示对自变数的一次导数。(1-166)式表示了在下列临界角频率时的辐射:

$$\omega=\frac{neH(1-\beta^{2})^{1/2}}{mc(1-\beta_{/\!/}\cos\theta)}。$$

图3为一个中等的相对论性电子辐射的角分布。

n次谐波辐射的总功率为:

$$P_n=\frac{2e^{4}H^{2}}{m^{2}c^{3}}\frac{1-\beta_0^{2}}{\beta_0}\left[n\beta_0^{2}J_{2n}'(2n\beta_0)-n^{2}(1-\beta_0)^{2}\int_0^{\beta_0}J_{2n}(2nt)\,dt\right],$$

式中$\beta_0=\beta_\perp/(1-\beta_{/\!/}^2)^{1/2}$。

所有谐波的辐射总功率为:

$$P_r=\frac{2e^{4}H^{2}}{3m^{2}c^{3}}\left[(1-\beta_{/\!/}^{2})(1-\beta^{2})^{-1}-1\right]={}^{*}1.586910\times10^{-15}\frac{\beta_\perp^{2}H^{2}}{1-\beta^{2}}\ 尔格·秒^{-1}。\tag{1-167}$$

在(1-166)式括号{}内的第一项及第二项分别代表平行和垂直于磁场的电矢量所辐射的偏振分量。怀尔德等(Wild 和 Hill, 1971)给出了(1-166)式中贝塞耳函数项的解析近似式,他们得出:

$$\begin{aligned}P_{/\!/}&=Az^{2}\left(\frac{1.5}{n_c}+\frac{0.5033}{n}\right)^{-1/3}n\exp\left(-\frac{n}{n_0}\right);\\P_{\perp}&=A\left(\frac{1.5}{n_c}+\frac{1.193}{n}\right)^{1/3}\left(1-\frac{1}{5n^{2/3}}\right)^{2}\exp\left(-\frac{n}{n_0}\right),\end{aligned}\tag{1-168}$$

式中P是一个相对论性或亚相对论性电子在每单位立体角每单位频率间隔所发射的第n次谐波的功率,

$$z=\frac{(\cos\theta-\beta\cos\varphi)}{(1-\beta\cos\varphi\cos\theta)};$$

$$A=\frac{e^{3}H}{2\pi mc^{2}\sin^{2}\theta}\frac{(1-\beta^{2})^{1/2}}{(1-\beta\cos\varphi\cos\theta)},$$

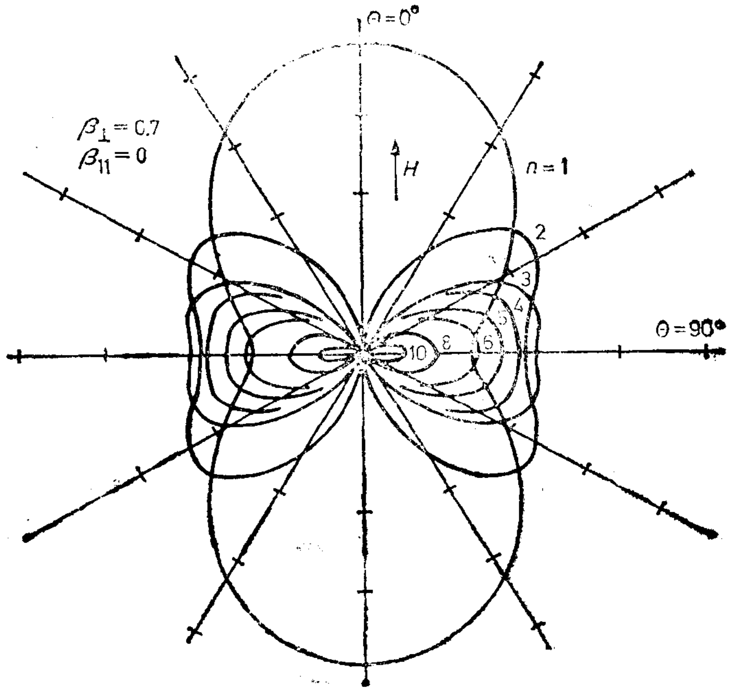


图 3 一个中等相对论性电子辐射强度的角分布(取自 Oster, 1960), 它表示了各次谐波 (n) 的强度分布随 θ 角(磁场 H 和观测方向间的夹角)变化的情况。该图对应于 $\beta_{\perp}=V_{\perp}/c=0.7$ 的一个固定能量的粒子, 其中 V 为电子速度, "⊥"表示垂直于磁场方向的分量。在径向线上的短划线表示强度的等增量, 完整的极坐标面可由此图绕垂直轴旋转 180° 而得到。此图表明, 在由 $\theta=90°$ 所确定的电子轨道平面附近的一个狭窄角范围内发射的频率较高

φ 是电子速度矢量与磁场方向间的夹角, θ 是磁场方向与观测者视线间的夹角, 而

$$n_0=\frac{3}{2}(1-X^2)^{-3/2},$$

$$(2n_0)^{-1}=\ln[1+(1-X^2)^{1/2}]-\ln X-(1-X^2)^{1/2},$$

式中

$$X=\frac{\beta\sin\varphi\sin\theta}{1-\beta\cos\varphi\cos\theta}。$$

中等的相对论性电子的辐射是椭圆偏振的, 椭圆的长轴与短轴之比由下式给出:

$$R_n=-\frac{(\cos\theta-\beta_{/\!/})J_n(\gamma\sin\theta)}{\beta_{\perp}\sin\theta J_n'(\gamma\sin\theta)}。\tag{1-169}$$

在回转辐射的情况下, 电子动能 $E\ll mc^2$, 它在每单位立体角所辐射的第 n 次谐波的总功率表示式(1-166)可简化为:

$$\frac{dP_n}{d\Omega}=\frac{e^4H^2}{2\pi m^2c^3}\frac{(n\beta_{\perp}/2)^{2n}}{[(n-1)!]^2}(\sin\theta)^{2n-2}(1+\cos^2\theta),\tag{1-170}$$

式中 θ 是波传播方向与磁场方向间的夹角, $\beta_{\perp}=(v_{\perp}/c)$ 相当于垂直磁场的速度分量 $v_{\perp}$。就电子动能按照麦克斯韦分布的情况来说, 由于回转辐射所引起的每单位长度的吸收系数 α_{ν} 由下式给出(Sitenko 和 Stepanov, 1957; Wild, Smerd 和 Weiss, 1963):

$$\alpha_{\nu}=\frac{4\pi^{3/2}}{c}\frac{\nu_p^2}{\nu}\frac{(n/2)^{2n}}{n!}\frac{(\sin\theta)^{2n-2}(1+\cos^2\theta)}{\cos\theta}\beta_0^{2n-3}\exp\left[-\frac{(1-n\nu_H/\nu)^2}{\beta_0^2\cos^2\theta}\right],\tag{1-171}$$

式中等离子体频率 $\nu_P=[e^2N_e/(\pi m)]^{1/2}$, 辐射频率是 ν, $\beta_0^2=2kT/(mc^2)$, 回转频率 $\nu_H=eH/(2\pi mc)$。用于光学深度计算时, 热电子层的有效厚度由下式给出 $L=2L_H\beta_0\cos\theta$,

式中磁场的作用范围 $L_H=H/\nabla H$，这是一个特征距离，在此距离内 ν_H 有显著变化。

当一个电子在磁场中的轨道上损失的动能总量达到不可忽略的程度时，就必须考虑量子效应。当下式成立时，就要考虑这种情况(Canuto 和 Chiu, 1971)：

$$\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)\gamma^2\left(\frac{H}{H_q}\right)\gg 1$$

或

$$\gamma^2 H\gg {}^*6.048835\times 10^{15}\ \text{高斯}。$$

这里电子的总能量是 $E=\gamma mc^2$，而 $H_q=m^2c^3/(e\hbar)={}^*4.414046\times 10^{13}$ 高斯。当 $E-mc^2\approx H/H_q$ 或 $H/H_q\gg 1$ 时，量子效应同样变得重要了(Erber, 1966)。当电子轨道是量子化的，那末在磁场中的电子的能量就由下式给出(Rabi, 1928)：

$$E=mc^2\left[1+\left(\frac{p_z}{mc}\right)^2+\frac{2nH}{H_q}\right]^{1/2}, \tag{1-172}$$

式中 p_z 是电子动量在磁场方向的分量，H 是磁场强度，主量子数 $n=0、1、2、\cdots$。电子在两个量子态 n 和 n' 间的跃迁就会发射能量为 $h\nu$ 的光子(Canuto 和 Chiu, 1971)：

$$h\nu=\frac{E-p_zc\cos\theta}{\sin^2\theta}\left\{1-\left[1-\frac{m^2c^4\sin^2\theta(n-n')}{(E-p_zc\cos\theta)^2}\right]^{1/2}\right\}$$

$$\approx mc^2\left\{(n-n')\frac{H}{H_q}+\theta\left[\left(\frac{h\nu}{mc^2}\right)^2\cos^2\theta\right]\right\}\quad(\text{当 } H\ll H_q),$$

式中 θ 是光子发射的方向与磁场方向间的夹角。对从 $n=1$ 到 $n'=0$ 的跃迁来说，所有辐射具有的能量都为 ${}^*1.157676\times 10^{-8}H$ 电子伏，每单位体积辐射的总功率 P 由下式给出(Chiu 和 Fassio-Canuto, 1969)：

$$P=\frac{1}{2}\frac{e^2mc}{\hbar^2}mc^2N_e\left(\frac{h\nu}{mc^2}\right)^2\left(\frac{H}{H_q}\right)(1+\cos^2\theta)$$

$$={}^*2.696600\times 10^{-5}N_eH_8^3(1+\cos^2\theta)\ \text{尔格}\cdot\text{秒}^{-1}\cdot\text{厘米}^{-3},$$

式中 N_e 是量子态 $n=1$ 上的电子的数密度，$H_8=H/10^8$。处在该量子态上的电子的寿命由下式给出：

$$\tau=\left[\frac{2}{3}\frac{e^2}{\hbar c}\frac{mc^2}{\hbar}\left(\frac{H}{H_q}\right)^2\gamma\right]^{-1}={}^*2.647729\times 10^{-19}\left(\frac{H_q}{H}\right)^{-2}\gamma^{-1}\ \text{秒}。$$

1.26. 一个粒子系综的同步加速辐射

一束电子的超相对论性辐射的体发射率，即在每单位频率间隔内在每单位体积每单位立体角中所发射的功率为：

$$\varepsilon(\nu)=\int P(\nu)N(E)dE, \tag{1-173}$$

式中 $P(\nu)$ 是一个电子所发射的每单位频率间隔内的总功率(见(1-160)式)，$N(E)dE$ 是沿视线方向每单位体积每单位立体角内沿着观测者方向运动的电子数，这些电子的能量处在 E 到 $E+dE$ 的范围内。

设所有超相对论性电子具有相同的能量 E，则由(1-160)式与(1-173)式所给出的总强度：

$$I(\nu)\approx 5.04\times 10^{-22}H_\perp\left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)^{1/3}\int N(E)dl\ \text{尔格}\cdot\text{秒}^{-1}\cdot\text{厘米}^{-2}\cdot\text{赫}^{-1}\cdot\text{弧度}^{-2}$$

$$(\text{当 } \nu\ll\nu_c)$$

$$\approx 2.94\times 10^{-22}H_\perp\left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)^{1/2}\exp\left(\frac{-\nu}{\nu_c}\right)\int N(E)dl\ \text{尔格}\cdot\text{秒}^{-1}\cdot\text{厘米}^{-2}\cdot\text{赫}^{-1}\cdot\text{弧度}^{-2}$$

$$(\text{当 } \nu\gg\nu_c),$$

式中 ν 是频率，$\nu_c = {}^*6.264030\times10^{18}H_\perp E^2$ 赫，H 沿视线方向的分量是 $H_\perp$，$\int N(E)dl$ 是沿视线方向每单位立体角每平方厘米的电子数，这些电子的运动方向是向着观测者的。在这种情况下的偏振度由(1-162)式给出：

$$\pi = \frac{1}{2}\left\{1+\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{2}\left(\frac{\nu}{2\nu_c}\right)^{2/3}\right\} \quad (\text{当 } \nu \ll \nu_c)$$

$$= 1-\frac{2}{3}\frac{\nu_c}{\nu} \quad (\text{当 } \nu \gg \nu_c)。$$

由于所观测到的宇宙线为幂律谱，并且由于许多观测到的射电源的谱是幂律的，所以常常假定

$$N(E)dE = KE^{-\gamma}dE, \tag{1-174}$$

式中 K 是一个常数。在强度为 H 的均匀磁场中，一束数目 $N(E)$ 由 (1-174) 式给出的均匀和各向同性分布的电子，它们的超相对论性同步加速辐射的强度可以由 (1-160) 式与 (1-173)式得出：

$$I(\nu) = l\varepsilon(\nu) = Kl\alpha(\gamma)\frac{\sqrt{3}}{8\pi}\frac{e^3}{mc^2}\left[\frac{3e}{4\pi m^3c^5}\right]^{(\gamma-1)/2}H_\perp^{(\gamma+1)/2}\nu^{-(\gamma-1)/2}$$

$$= {}^*0.9327958\times10^{-23}\alpha(\gamma)KlH_\perp^{(\gamma+1)/2}\left(\frac{{}^*6.264030\times10^{18}}{\nu}\right)^{(\gamma-1)/2}$$

$$\text{尔格·秒}^{-1}\text{·厘米}^{-2}\text{·赫}^{-1}\text{·弧度}^{-2}, \tag{1-175}$$

式中 ν 是频率，l 是沿视线方向辐射区的大小，函数 $\alpha(\gamma)$ 随量级为 1 的 γ 的变化是缓慢的，并且由下式给出：

$$\alpha(\gamma) = 2^{(\gamma-3)/2}\frac{\gamma+7/3}{\gamma+1}\Gamma\left(\frac{3\gamma-1}{12}\right)\Gamma\left(\frac{3\gamma+7}{12}\right) \quad \left(\text{当 } \gamma > \frac{1}{3}\right)。$$

在这种情况下，偏振度

$$\pi = (\gamma+1)/\left(\gamma+\frac{7}{3}\right)。 \tag{1-176}$$

如果磁场是随机分布的，$N(E)$ 是由 (1-174) 式给出的，则 $I(\nu)$ 由 (1-175) 式给出，只要用一个量级为 1 的新常数代替 $\alpha(\gamma)$。不过，在这种情况偏振度为零。

通过对一个超相对论性电子($E \gg mc^2$)系综的同步加速辐射的圆偏振度 π_0 的测量，就可确定辐射源的磁场强度 H (Legg 和 Westfold, 1968; Melrose, 1971)。对于一种单能电子的分布，圆偏振度由下式给出：

$$\pi_0 = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\frac{\cot\theta}{F(\nu/\nu_c)}\left(\frac{\nu_H\sin\theta}{\nu}\right)^{1/2}\left\{\left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)^{3/2}K_{1/3}\left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)\right.$$
$$\left.+\left[2+\frac{\varphi'(\theta)}{\varphi(\theta)}\tan\theta\right]\left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)^{-1/2}\left[\frac{\nu}{\nu_c}K_{2/3}\left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)-\frac{1}{2}F\left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)\right]\right\}, \tag{1-177}$$

式中 ν 是辐射频率，回转频率 $\nu_H = eH/(2\pi mc)$，临界频率 ν_c 由(1-154)式给出，K 是修正的贝塞尔函数，角度 $\theta = \alpha-\psi$，其中 α 是螺距角，ψ 是观测方向与电子速度矢量间的夹角，在立体角 $d\Omega = 2\pi\sin\theta d\theta$ 内具有 θ 值在 θ 至 $\theta+d\theta$ 的范围内的电子的比例是 $\varphi(\theta)d\Omega$，$\varphi(\theta)$ 对 θ 的一次导数是 $\varphi'(\theta)$，对各向同性分布来说，$\varphi'(\theta)$ 是 1，并且函数 $F(x)$ 由下式给出：

$$F(x) = x\int_x^\infty K_{5/3}(\eta)d\eta。 \tag{1-178}$$

对于一个电子系综，如果它的能量按照指数 γ 的幂律分布，即能量分布由(1-174)式给定的话，圆偏振度则由下式给出(当 $\gamma>\frac{1}{3}$ 时)：

$$\pi_0=\frac{4}{\sqrt{3}}\frac{\gamma+1}{\gamma\left(\gamma+\frac{7}{3}\right)}\cot\theta\left(\frac{\nu_H\sin\theta}{\nu}\right)^{1/2}\frac{\Gamma\left(\frac{3\gamma+4}{12}\right)\Gamma\left(\frac{3\gamma+8}{12}\right)}{\Gamma\left(\frac{3\gamma-1}{12}\right)\Gamma\left(\frac{3\gamma+7}{12}\right)}\times\left[\gamma+2+\tan\theta\frac{\varphi'(\theta)}{\varphi(\theta)}\right]。\tag{1-179}$$

莱格等(Legg 和 Westfold, 1968)列表给出了 γ 值在 0.4～9.0 范围内的 Γ 函数值。(1-177)式及(1-179)式给出的圆偏振度是第四个斯托克斯参量 V 与第一个斯托克斯参量 I 的比值。梅尔罗斯(Melrose, 1971)已把这些公式推广到包括重吸收和法拉第较差转动对圆偏振度的影响。这两种效应能够使圆偏振略为变小且使偏振方向相反。拉马蒂(Ramaty, 1969)给出了磁性等离子体中回旋-同步加速辐射的偏振计算。

由(1-175)式可见，遵从指数为 $-\gamma$ 的幂律分布的电子，其同步加速辐射相应有正比于 ν^{α} 的幂律频谱，这里的频谱指数 α 由下式给出：

$$\alpha=-\frac{(\gamma-1)}{2}。\tag{1-180}$$

观测表明大多数射电源具有幂律频谱，某些实例如图 4 所示。射电星系及类星体的频谱指数及已知红移都列于表 31 中。

由(1-164)式及(1-174)式可知，电子总能量 U_e 由下式给出：

$$U_e=*422.3601\frac{L}{H^2}\frac{3-\gamma}{2-\gamma}\left(\frac{E_2^{2-\gamma}-E_1^{2-\gamma}}{E_2^{3-\gamma}-E_1^{3-\gamma}}\right)\text{尔格},\tag{1-181}$$

式中 E_1 及 E_2 分别表示电子的最低及最高能量，假设电子能量分布指数 $\gamma\neq2$ 或 3，源的总光度 L 由下式给出：

$$L=4\pi r^2\left(1+\frac{z}{2}\right)^2\frac{S_{\nu_r}}{\nu_\gamma^{\alpha}}\int_{\nu_1}^{\nu_2}\nu^{\alpha}d\nu,\tag{1-182}$$

式中 $r=cz/H_0$ 是到源的度规距离，H_0 是哈勃常数，z 是红移，S_{ν_r} 是以某一参考频率 ν_r 量度的源的流量密度，ν_1 及 ν_2 分别是上、下截止频率，在此频率范围以外，源的辐射是可以忽略不计的。假设每一个电子只在(1-154)式给出的临界频率处辐射，只要 $\alpha\neq-\frac{1}{2}$ 或 -1，则(1-181)式就可以写成：

$$U_e=10^{12}\frac{L}{H^{3/2}}\frac{\nu_2^{1/2+\alpha}-\nu_1^{1/2+\alpha}}{\nu_2^{1+\alpha}-\nu_1^{1+\alpha}}\frac{(2\alpha+2)}{(2\alpha+1)}\text{尔格},\tag{1-183}$$

如 1.38 节所讨论的，同步加速辐射的光度是受逆康普顿效应的限制的。

在源中的总能量 U_T 由下式给出(Burbidge, 1959)：

$$U_T=U_p+U_m=aU_e+\frac{VH^2}{8\pi},\tag{1-184}$$

式中 U_p 是粒子总能量；常数 $a\approx100$，它表示更高能量的重子所增加的能量高于相对论性电子所增加的能量；U_m 是储存在磁场中的能量；而 V 是源的体积。$a=100$ 对宇宙线是典型值。射电星系及类星体的光度范围是 $10^{40}\sim10^{44}$ 尔格·秒$^{-1}$，而对于正常星系的值是 $10^{34}\sim10^{38}$ 尔格·秒$^{-1}$。设 $a=100$，对 $H\approx10^{-4}$ 高斯的一种典型场来说 $U_m\approx U_p\approx10^{60}$。

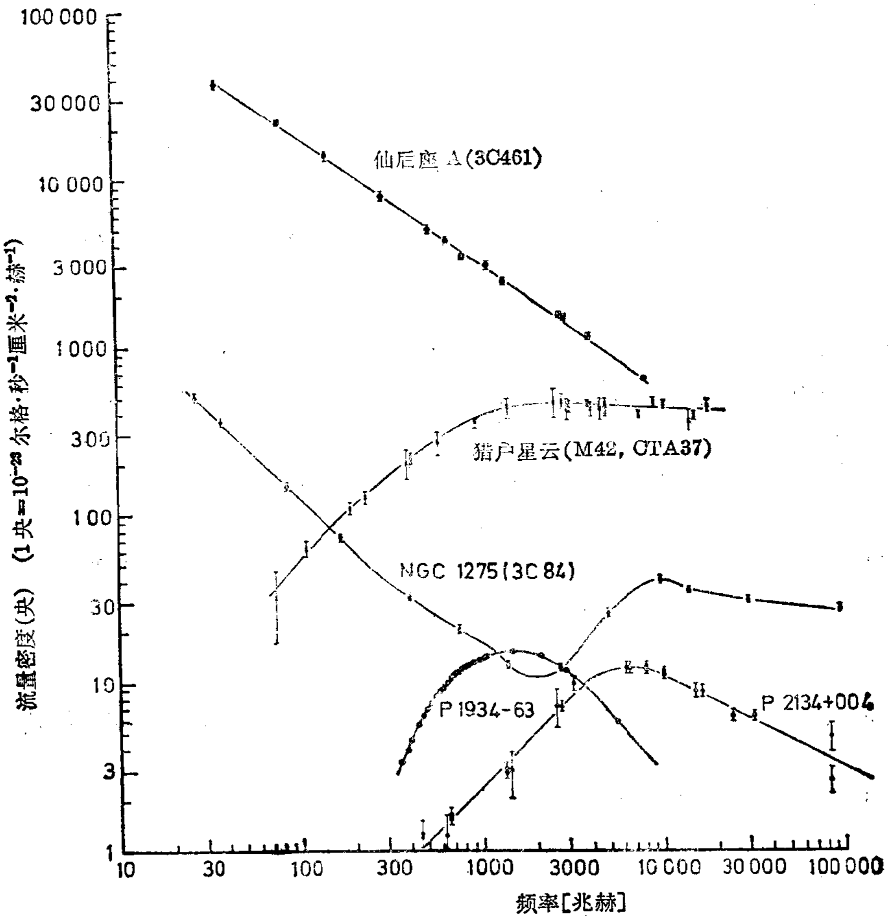


图**4** 源的射电频谱显示同步加速辐射的幂律谱(仙后座A)、具有低频自吸收的热韧致辐射的平坦谱(猎户星云)、异常的高频辐射(NGC1275)及低频吸收过程(P1934-63及P2134+004)。P2134+004的资料取自康克林(E. K. Conklin),而其他资料取自凯勒曼等(Kellermann, 1966; Hjellming和Churchwell, 1969; Terzian和Parrish, 1970; Kellermann, Pauling-Toth和Williams, 1969; 以及Kellermann等, 1971)的文献

1.27. 在等离子体中的同步加速辐射

在等离子体中单个相对论性电子在每单位频率间隔辐射的总功率由下式给出(Ginzburg和Syrovatskii, 1965):

$$P(\nu)\,d\nu=\sqrt{3}\ \frac{e^3 H\sin\psi}{mc^2}\left[1+\left(\frac{\nu_p E}{\nu mc^2}\right)^2\right]^{-1/2}\frac{\nu}{\nu_c'}\int_{\nu/\nu_c'}^{\infty}K_{5/3}(\eta)\,d\eta, \tag{1-185}$$

式中H是磁场强度,ψ是螺距角,E是电子的总能量,ν是同步加速辐射的频率,K是修正的贝塞耳函数,临界频率ν_c'由下式给出:

$$\nu_c'=\frac{3eH\sin\psi}{4\pi mc}\ \frac{mc^2}{E}\left[1-\left(\frac{n_\nu v}{c}\right)^2\right]^{-3/2} \tag{1-186}$$

或

$$\nu_c'\approx\nu_c\left[1+\left(\frac{\nu_p E}{\nu mc^2}\right)^2\right]^{-3/2}=\nu_c\left[1+(1-n_\nu^2)\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2\right]^{-3/2}, \tag{1-187}$$

式中在真空中的临界频率ν_c由(1-154)式给出,v是电子速度,折射率n_ν假设小于1,等离

子体频率 ν_p 由下式给出：

$$\nu_p=\nu(1-n_\nu^2)^{1/2}=\left(\frac{e^2N_e}{\pi m}\right)^{1/2}={}^*8.978658\times10^3N_e^{1/2}\text{ 赫},\tag{1-188}$$

式中 N_e 是热电子的数密度。艾德曼(Eidman, 1958)首先推导出在各向同性等离子体中一个作同步加速辐射的电子所发射的 n 次谐波的普遍公式，利莫恩(Liemohn, 1965)对此作了微小的修正，拉马蒂(Ramaty, 1969)则作了数值计算。怀尔德等(Wild 和 Hill, 1971)给出了这些公式以及对一个相对论性或亚相对论性电子在磁场方向的辐射功率的近似表示式。

如楚托维奇(Tsytovich, 1951)首先指出的那样，艾德曼(Eidman, 1958)并且由拉津(Razin, 1960)严格导出，在频率低于下式给出的临界频率 ν_R 时，等离子体中的同步加速辐射会明显地受到抑制

$$\nu_R=\frac{4ecN_e}{3H\sin\psi}={}^*19.19968\frac{N_e}{H\sin\psi}\approx\frac{2\nu_p^2}{3\nu_H}。\tag{1-189}$$

将(1-185)式对所有频率积分就得出等离子体中一个相对论性电子辐射的总功率 P，这由下式给出(Simon, 1969)：

$$P=\pi\frac{3^{3/4}}{\sqrt{2}}\frac{e^3H\sin\psi}{mc^2}\frac{E}{mc^2}\nu_p\exp\left[\frac{-2\sqrt{3}\,\pi mc\nu_p}{\gamma eH\sin\psi}\right],\tag{1-190}$$

式中 $\gamma=E/(mc^2)$。一束具有幂律能量分布的电子，其同步加速辐射的体发射率 $\varepsilon(\nu)$ 的近似式由下式给定(Simon, 1969)

$$\varepsilon(\nu)={}^*6.900877N_0\left(\frac{\nu}{\nu_R}\right)^{3/2}\nu_p\left(\frac{\nu}{\sqrt{2}\,\nu_p}\right)^{-\gamma}\exp\left(-3.7\frac{\nu_R}{\nu}\right)\text{尔格·秒}^{-1}\cdot\text{赫}^{-1}\cdot\text{厘米}^{-3}$$

$$(\text{当 }\nu<\nu_R),\tag{1-191}$$

式中 $\varepsilon(\nu)$ 是每单位频率每单位体积的功率，并且假定沿视线方向每单位立体角中沿观测者方向运动的能量处在 E 到 $E+dE$ 中的电子的数密度由下式给出：

$$N(E)dE=N_0\left(\frac{E}{mc^2}\right)^{-\gamma}dE。\tag{1-192}$$

由(1-175)式及(1-191)式可知，当频率 $\nu>\nu_R$ 时，频谱指数 $\alpha=-(\gamma-1)/2$；当 $\nu<\nu_R$ 时，粗略地 $\alpha=\frac{3}{2}-\gamma$。

在那些光学深度大于1的频率处等离子体的热吸收也会抑制同步加速辐射。在第1.30节中详细讨论了等离子体的吸收系数及光学深度。在射电频率 $\nu>\nu_p$ 时的吸收系数的公式导致的结论是：辐射在频率低于临界频率 ν_T 时将是热吸收的，并且 ν_T 由下式给出：

$$\nu_T=[lT^{-3/2}N_e^2]^{-2.1},\tag{1-193}$$

式中 l 是沿视线至辐射源方向上的等离子体的长度，T 及 N_e 分别是热电子的运动温度及数密度。在热电子与相对论性电子混合的情况下，当 $\nu>\nu_T$ 时，频谱指数将是 $\alpha_0=-(\gamma-1)/2$；而当 $\nu<\nu_T$ 时，$\alpha=2.1+\alpha_0$。若同步加速辐射产生于真空中，而且紧接着就穿过等离子体，则当 $\nu<\nu_T$ 时，辐射强度将按 $\exp[-(\nu/\nu_T)^{-2.1}]$ 衰减。

1.28. 同步加速辐射频谱的附加修正

正如特威斯(Twiss, 1954)首先提出，并由勒鲁克斯(Le Roux, 1961)及麦克雷(McCray, 1969)作了计算，同步加速辐射可以成为自吸收的，并且每单位长度的吸收系数 α_ν 由下式给出：

$$\alpha_\nu = -\frac{c^2}{8\pi\nu^2}\int_0^\infty E^2 \frac{d}{dE}\left[\frac{N(E)}{E^2}\right]P(\nu)\,dE, \tag{1-194}$$

式中 ν 是频率，$N(E)dE$ 是沿视线方向每单位立体角中在观测者的方向上运动的、动能在 E 至 $E+dE$ 的范围内的电子的数密度，一个相对论性电子在每单位频率间隔辐射的总功率是 $P(\nu)$，并由(1-160)式给出，其中假定电子是各向同性分布的。对于具有(1-174)式给出的幂律能量分布的电子来说，(1-194)式变成(Le Roux, 1961)：

$$\alpha_\nu = g(\gamma)\frac{e^3}{2\pi m}\left(\frac{3e}{2\pi m^3c^5}\right)^{\gamma/2} K\,(H\sin\psi)^{(\gamma+2)/2}\nu^{-(\gamma+4)/2} \tag{1-195}$$

$$\approx {}^*0.01936098\,({}^*3.539500\times10^9)^\gamma K\,(H\sin\psi)^{(\gamma+2)/2}\nu^{-(\gamma+4)/2}\ \text{厘米}^{-1},$$

式中 $g(\gamma)$ 是量级为 1 的常数，并由下式给出：

$$g(\gamma) = \frac{\sqrt{3}}{16}\left(\gamma+\frac{10}{3}\right)\Gamma\left(\frac{3\gamma+2}{12}\right)\Gamma\left(\frac{3\gamma+10}{12}\right)。$$

这里 γ 是(1-174)式给出的幂律能量分布的指数，H 是磁场强度，ψ 是平均螺距角，而常数 K（在(1-174)式中也出现过）是源的强度 I_ν 的函数，并由下式给出：

$$K \approx 7.4\times10^{21}\frac{I_\nu}{lH}\left(\frac{\nu}{{}^*6.264030\times10^{18}H}\right)^{(\gamma-1)/2}, \tag{1-196}$$

式中 l 是辐射源沿视线方向的长度。在频率 ν 低于临界频率 ν_s 时（对这些频率来说光学深度 $\tau_\nu=\alpha_\nu l$ 为 1），同步加速辐射会明显地受到抑制。对于一个最大流量密度为 S_{ν_s} 的源来说，当磁场强度为 H、角大小为 θ 及红移为 z 时，临界频率 ν_s 由下式给出(Slish, 1963; Williams, 1963)：

$$\nu_s \approx 34\left(\frac{S_{\nu_s}}{\theta^2}\right)^{2/5} H^{1/5}(1+z)^{1/5}, \tag{1-197}$$

式中常数值是按照 ν_s 以兆赫为单位、S_{ν_s} 以央(斯基)为单位，θ 以角秒为单位及 H 以高斯为单位而选定的。当 $\nu>\nu_s$ 时，辐射强度的频谱指数将是 $\alpha=-(\gamma-1)/2$；当 $\nu<\nu_s$ 时，$\alpha=2.5$。许多致密射电源的最大流量密度、临界频率及角大小的观测(Kellermann 和 Pauliny-Toth, 1969; Clarke 等, 1969)表明，如果在它们的频谱中所观测到的低频截止是由于同步加速自吸收所致，则 $H=10^{-4\pm1}$ 高斯。

由(1-163)式可知，高能电子由于同步加速辐射而损失的能量比低能电子更快，所以辐射频谱将随时间的增加而变得更陡。当同步加速辐射损失占优势时，对于频率高于临界频率 ν_k 时，一个最初由具有指数为 $-\gamma$ 的幂律能量分布的电子组成的源将会显现出指数为 $\alpha=-(2\gamma+1)/3$ 的频谱。ν_k 是由下式给出(Kardashev, 1962)：

$$\nu_k = 3.4\times10^8 H^{-3}t^{-2}\ \text{赫}, \tag{1-198}$$

式中 H 是以高斯为单位的磁场强度，t 是以年为单位的射电源的年龄。由于源的膨胀、电子与重粒子的碰撞、逆康普顿效应及电离的能量损失也会引起频谱的变化，这些变化的详情已由卡尔达晓夫等(Kardashev, 1962; de la Beaujardiére, 1966)给出。发射频谱也会因电子分布的能量截止而改变，但是对于可能的最陡的低能截止，其频谱指数仅为 1/3。

奥德尔等(O'Dell 和 Sartori, 1970)最近指出单个电子的同步加速辐射频谱有一个固有的低频截止(参看图 2)，当频率低于临界频率 ν_c，辐射功率随频率的 $\frac{1}{3}$ 幂减小，而临界频率为：

$$\nu_c = \frac{eH}{2\pi mc\psi} = {}^*2.799225\times 10^6 \frac{H}{\psi} \text{ 赫}, \tag{1-199}$$

式中 ψ 是平均螺距角。对于具有指数为 $-\gamma$ 的幂律能量分布的一束电子来说，这种回旋加速回转导致了低频频谱的指数 $\alpha=\gamma$，而高频频谱指数 $\alpha=-(\gamma-1)/2$。

1.29. 单电子的韧致辐射(自由-自由辐射)

当一个带电快粒子遇上一个原子、分子或离子时，它的速度就会发生变化而发出辐射，这称为韧致辐射。考虑质量为 m、电荷为 e、速度为 v 的一个非相对论性电子，当该电子进入一个电荷为 Ze 的库仑力场时，粒子行进方向的角度偏转 θ 由下式(Rutherford, 1911)给出：

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{ze^2}{mv^2b}, \tag{1-200}$$

其中碰撞参数 b 是指从 Ze 电荷至电子的原来路径的垂直距离。

根据由一个加速电子所辐射的总功率的拉莫尔(Larmor, 1897)公式(1-110)式和(1-200)式可知，一个非相对论性电子在与电荷 Ze 碰撞时，在频率 ν 与 $\nu+d\nu$ 的每单位频率间隔内它所发出的韧致辐射的总能量由下式给出：

$$\begin{aligned} W(\nu)d\nu &\approx \frac{2e^2}{3\pi c^3}|\Delta v|^2 d\nu \approx \frac{2e^2v^2}{3\pi c^3}(1-\cos\theta)d\nu \\ &\approx \frac{8}{3\pi}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{Z^2e^2}{c}\left(\frac{c}{vb}\right)^2 d\nu \quad \left(\text{当 } \nu<\frac{v}{b}\right) \\ &\approx 0 \quad \left(\text{当 } \nu>\frac{v}{b}\right), \end{aligned} \tag{1-201}$$

式中 Δv 是因碰撞而引起的电子速度的变量。在临界频率 $\nu_c\approx v/b$ 以上，频谱是平坦的，而在一次碰撞中辐射的总能量是 $[vW(\nu)]/b$。

在单位时间内在参量范围 b 和 $b+db$ 之间，一个电子与体密度为 N_i 的离子的碰撞总次数为：

$$N_i v 2\pi b db = N_i v 2\pi \frac{d\sigma_s}{d\Omega}\sin\theta d\theta, \tag{1-202}$$

式中微分散射截面 $d\sigma_s/d\Omega$ 由下式给出：

$$\frac{d\sigma_s}{d\Omega} = \frac{b}{\sin\theta}\left|\frac{db}{d\theta}\right| = \frac{Z^2}{4}\left(\frac{e^2}{mv^2}\right)^2 \frac{1}{\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)}。 \tag{1-203}$$

利用(1-201)式和(1-202)式，处在频率 ν 与 $\nu+d\nu$ 之间的每单位频率间隔中的电子与 N_i 个离子碰撞而发出的韧致辐射总功率 $P_i(v,\ \nu)d\nu$ 由下式给出：

$$P_i(v,\ \nu)d\nu = N_i v Q_r(v,\ \nu)d\nu, \tag{1-204}$$

式中辐射截面 $Q_r(v,\ \nu)$ 由下式给出：

$$Q_r(v,\ \nu) = \frac{16}{3}\frac{Z^2e^6}{m^2c^3v^2}\int_{b_{\min}}^{b_{\max}}\frac{db}{b} = \frac{16}{3}\frac{Z^2e^6}{m^2c^3v^2}\ln\left(\frac{b_{\max}}{b_{\min}}\right), \tag{1-205}$$

其量纲为面积·能量/频率。光子截面 $\sigma_r(v,\ \hbar w)$ 也是常用的，其定义为：

$$\sigma_r(v,\ \hbar\omega) = \frac{Q_r(v,\ \nu)}{\hbar^2\omega} = \frac{16}{3}Z^2\frac{e^2}{\hbar c}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\frac{c^2}{\hbar\omega v^2}\ln\left(\frac{b_{\max}}{b_{\min}}\right), \tag{1-206}$$

其量纲是面积/单位光子能量。利用(1-201)式和(1-202)式，得到处在频率 ν 与 $\nu+d\nu$ 之间的每单位频率间隔中的电子与体密度为 N_a 的中性分子碰撞而发出的韧致辐射总功率 $P_a(v,\ \nu)d\nu$：

$$P_a(v,\ \nu)d\nu=\frac{2}{3}\frac{e^2v^2}{\pi c^3}\nu_c(v)d\nu, \tag{1-207}$$

式中动量转移的碰撞频率是:

$$\nu_c(v)=N_a v\int_0^\pi \frac{d\sigma_s}{d\Omega}(1-\cos\theta)2\pi\sin\theta d\theta\approx N_a v\pi a^2, \tag{1-208}$$

而 πa^2 是一个半径为 a 的球的弹性碰撞的有效微分截面,其值可在实验室中测定。

对数冈特(Gaunt)因子 $\ln(b_{\max}/b_{\min})$ 按下列公式(Bohr, 1915; Bethe, 1930)随轫致辐射的角频率 ω 及电子的速度 v 而变:

$$\left.\begin{aligned}
&\ln\left(\frac{b_{\max}}{b_{\min}}\right)=\ln\left(\frac{\gamma^2mv^3}{Ze^2\omega}\right) \quad \left(当\ v<\frac{Ze^2}{\hbar}及\ \omega<\frac{mv^3}{Ze^2}\right);\\
&\ln\left(\frac{b_{\max}}{b_{\min}}\right)=0 \quad \left(当\ v<\frac{Ze^2}{\hbar}及\ \omega>\frac{mv^3}{Ze^2}\right);\\
&\ln\left(\frac{b_{\max}}{b_{\min}}\right)=\left[\ln\left(\frac{2\gamma^2mv^2}{\hbar\omega}\right)-\frac{v^2}{c^2}\right] \quad \left(当\ v>\frac{Ze^2}{\hbar}及\ \omega<\frac{mv^2}{\hbar}\right);\\
&\ln\left(\frac{b_{\max}}{b_{\min}}\right)=0 \quad \left(当\ v>\frac{Ze^2}{\hbar}及\ \omega>\frac{mv^2}{\hbar}\right),
\end{aligned}\right\} \tag{1-209}$$

式中 $\gamma=E/(mc^2)$ 不是远大于1的, E 是电子的动能, 并假定 ω 大于等离子体频率 $\omega_p=(4\pi N_e e^2/m)^{1/2}=$ *$5.641457\times10^4N_e^{1/2}$, 其中 N_e 是电子密度。当 $\omega<\omega_p$ 时, 在(1-209)式中应当用 ω_p 代替 ω。如贝特等(Bethe 和 Heitler, 1934)所提出的, (1-209)式最好用平均速度 $v=[E^{1/2}+(E-\hbar\omega)^{1/2}]/\sqrt{2m}$, 其中 E 是电子的初始能量, $\hbar\omega$ 是光子能量。在高速而非相对论性的电子-电子散射这种特殊情况下,我们得(Bethe, 1930):

$$\begin{aligned}
&\ln\left(\frac{b_{\max}}{b_{\min}}\right)=\ln\left[\frac{(\gamma-1)(\gamma+1)^{1/2}}{\sqrt{2}}\frac{mc^2}{\hbar\omega}\right] \quad \left(当\ \omega<\frac{mv^2}{\hbar}\right);\\
&\ln\left(\frac{b_{\max}}{b_{\min}}\right)\approx0 \quad \left(当\ \omega>\frac{mv^2}{\hbar}\right)。
\end{aligned} \tag{1-210}$$

当电子是相对论性的, $\gamma\gg1$, 微分散射截面 $d\sigma_s/d\Omega$ 由莫特(Mott 和 Massey, 1965)公式给出:

$$\frac{d\sigma_s}{d\Omega}=\frac{Z^2e^4}{4m^2v^4}\frac{1}{\sin^4\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}\frac{1-\beta^2\sin^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}{\gamma^2}, \tag{1-211}$$

式中 $\beta=v/c$, v 是电子速度,而 θ 是电子的偏转角。当

$$\begin{aligned}
&\ln\left(\frac{b_{\max}}{b_{\min}}\right)\approx\ln\left(\frac{\gamma^2mc^2}{\hbar\omega}\right) \quad \left(当\ \gamma\gg1及\ \omega<\frac{(\gamma-1)mc^2}{\hbar}\right);\\
&\ln\left(\frac{b_{\max}}{b_{\min}}\right)\approx0 \quad \left(当\ \gamma\gg1及\ \omega>\frac{(\gamma-1)mc^2}{\hbar}\right),
\end{aligned} \tag{1-212}$$

每单位频率间隔发出的轫致辐射总功率 $P_i(v,\ \nu)$ 就由近似公式(1-204)式及(1-205)式给出。

一个高能粒子入射到一个无屏蔽的静电荷 Ze 上所产生的光子截面的准确公式为(参考 Bethe, 1930; Bethe 和 Heitler, 1934; Wheeler 和 Lamb, 1939; Heitler, 1954; Jauch 和 Rohrlich, 1955):

$$\sigma_r=4Z^2\frac{e^2}{\hbar c}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\frac{1}{\hbar\omega}\frac{1}{E_i^2}\left(E_i^2+E_f^2-\frac{2}{3}E_iE_f\right)\left[\ln\left(\frac{2E_iE_f}{mc^2\hbar\omega}\right)-\frac{1}{2}\right], \tag{1-213}$$

式中 E_i 及 E_f 分别是电子的初始能量及最终能量, $E_i-E_f=\hbar\omega$ 是光子能量。(1-212)式与

(1-213)式完全适用于一个相对论性的电子与自由电子、自由质子或氢原子碰撞的情况(参考 Blumenthal 和 Gould, 1970)。不过,正如费密(Fermi, 1940)首先指出的,原子的屏蔽效应把最大碰撞参数限定在原子半径 a 以内。对于相对论性电子与原子的碰撞而言,我们得出附加条件为:

$$\ln\left(\frac{b_{\max}}{b_{\min}}\right)=\ln\left(\frac{amv}{\hbar}\right)=\ln\left(\frac{1.4}{Z^{1/3}}\frac{\hbar c}{e^2}\frac{v}{c}\right) \quad (\text{当 } \omega<\omega_s), \tag{1-214}$$

式中

$$\omega_s=\frac{Z^{1/3}}{1.4}\frac{e^2}{\hbar c}\frac{\gamma^2 mc^2}{\hbar},$$

$b_{\max}$ 是原子半径 $a=1.4\hbar^2/(Z^{1/3}me^2)$,精细结构常数 $e^2/\hbar c={}^*1/137.03604$。

对于相对论性电子来说,辐射所致的能量损失与碰撞所致的能量损失相比是主要的。由(1-204)式、(1-205)式、(1-212)式及(1-214)式得出,一个相对论性电子在物质中行进单位距离时由辐射所致的能量损失 dE_r/dx 由下式给出:

$$\frac{dE_r}{dx}\approx\frac{16}{3}N_iZ^2\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)E\ln\gamma \quad (\text{当 } \omega>\omega_s);$$

$$\frac{dE_r}{dx}\approx\frac{16}{3}N_iZ^2\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)E\ln\left(\frac{1.4}{Z^{1/3}}\frac{\hbar c}{e^2}\right) \quad (\text{当 } \omega<\omega_s), \tag{1-215}$$

式中电子能量 $E=\gamma mc^2$,精细结构常数 $e^2/\hbar c={}^*1/137.03604$,以及经典电子半径 $e^2/mc^2={}^*2.8179380\times10^{-13}$ 厘米。

对于非相对论性电子来说,碰撞所致的能量损失与辐射所致的能量损失相比占优势。Z 个电子与 N 个原子碰撞,每单位长度损失的总能量 dE_c/dx 为(Bohr, 1915; Bethe, 1930):

$$\frac{dE_c}{dx}=4\pi NZ\frac{e^4}{mv^2}\ln\left(\frac{b_{\max}}{b_{\min}}\right), \tag{1-216}$$

式中 $\ln(b_{\max}/b_{\min})$ 由(1-209)式给出。

1.30. 等离子体的韧致辐射(自由-自由辐射)

每单位体积每单位立体角在 ν 到 $\nu+d\nu$ 间的单位频率所发出的韧致辐射总功率称为体发射率 ε,并由下式给出:

$$\varepsilon_\nu=n_\nu\frac{N_e}{4\pi}\int P_r(v,\ \nu)f(v)dv, \tag{1-217}$$

式中 n_ν 是折射率,N_e 是电子密度,$f(v)$ 是电子速度分布,$P_r(v,\ \nu)$ 是速度为 v 的一个电子与 N_i 个离子碰撞时在每单位频率间隔所辐射的总功率,并由(1-204)至(1-214)式给出。通过下列关系式可以把速度判据 $v\leqslant Ze^2/\hbar$ 转换成温度判据 $T\leqslant3.16\times10^5Z^2$:

$$v\approx\left(\frac{kT}{m}\right)^{1/2}={}^*3.893100\times10^5T^{1/2}\text{ 厘米·秒}^{-1}。 \tag{1-218}$$

当 $f(v)$ 是麦克斯韦分布式(3-114)时,式(1-217)就成为

$$\varepsilon_\nu d\nu=\frac{8}{3}\left(\frac{2\pi}{3}\right)^{1/2}\frac{n_\nu Z^2e^6}{m^2c^3}\left(\frac{m}{kT}\right)^{1/2}N_iN_eg(\nu,\ T)\exp(-h\nu/kT)d\nu$$

$$={}^*5.444460\times10^{-39}n_\nu Z^2\frac{N_iN_e}{T^{1/2}}g(\nu,\ T)$$

$$\cdot\exp(-h\nu/kT)d\nu\text{ 尔格·秒}^{-1}\text{·厘米}^{-3}\text{·赫}^{-1}\text{·弧度}^{-2}, \tag{1-219}$$

冈特因子 $g(\nu,\ T)$ 由下式给出:

$$g(\nu,\ T)=\frac{\sqrt{3}}{\pi}\ln\Lambda={}^*0.5513289\ln\Lambda, \tag{1-220}$$

式中的 $\ln\Lambda$ 由表 2 给出。冈特等(Gaunt, 1930; Sauter, 1933; Sommerfeld, 1931; Elwert, 1954; Scheuer, 1960; Oster, 1961; Brussaard 和 van de Hulst, 1962; Mercier, 1964; Oster, 1970)对相应的各个范围中的冈特因子作了讨论。

电子-离子轫致辐射的每单位长度的吸收系数由下式给出(Kirchhoff, 1860; Margenau, 1946; Smerd 和 Westfold, 1949):

$$\alpha_\nu = \frac{\varepsilon_\nu}{n_\nu^2}\frac{c^2}{2h\nu^3}\left[\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)-1\right] = \frac{\varepsilon_\nu}{n_\nu^2 B_\nu(T)}, \tag{1-221}$$

式中 $B_\nu(T)$ 是一个黑体辐射体的真空亮度。当频率 $\nu \ll 10^{10}T$ 时, $B_\nu(T)$ 的瑞利-琼斯近似式与(1-219)式和(1-221)式一起被应用,就得到:

$$\begin{aligned}\alpha_\nu &= \frac{N_e N_i}{n_\nu(2\pi\nu)^2}\left[\frac{32\pi^2 Z^2 e^6}{3(2\pi)^{1/2}m^3 c}\right]\left(\frac{m}{kT}\right)^{3/2}\ln\Lambda \\ &\approx \frac{9.786\times10^{-3}}{n_\nu\nu^2}\frac{N_e N_i}{T^{3/2}}\ln[4.954\times10^7(T^{3/2}/Z\nu)]\ \text{厘米}^{-1} \\ &\qquad\qquad (\text{当 } T<3.16\times10^5\ \text{开}) \\ &\approx \frac{9.786\times10^{-3}}{n_\nu\nu^2}\frac{N_e N_i}{T^{3/2}}\ln[4.7\times10^{10}(T/\nu)]\ \text{厘米}^{-1} \\ &\qquad\qquad (\text{当 } T>3.16\times10^5\ \text{开})。\end{aligned} \tag{1-222}$$

光学深度 $\tau_\nu = \int \alpha_\nu dl$ 常常可表示为近似式(Altenhoff, Mezger, Strassl, Wendker 和 Westerhout, 1960):

表 2 对数因子 Λ,其中冈特因子 $g(\nu, T)=(\sqrt{3}/\pi)\ln\Lambda$。$\nu$ 是频率,常数 $\gamma=1.781$ 及 $e'=2.718$,等离子体频率 $\omega_p \approx 5.64\times10^4 N_e^{1/2}$ 赫,N_e 是电子密度,T 是电子温度及 Ze 是离子电荷

	$T<3.6\times10^5 Z^2$ 开	$T>3.6\times10^5 Z^2$ 开
$\omega \gg \omega_p$	$\Lambda=\left(\frac{2}{\gamma}\right)^{5/2}\left(\frac{kT}{m}\right)^{1/2}\left(\frac{kT}{2\pi Ze^2\nu}\right)$ $\approx 5.0\times10^7(T^{3/2}/Z\nu)$	$\Lambda=\frac{4kT}{\gamma h\nu}$ $\approx 4.7\times10^{10}(T/\nu)$
$\omega \ll \omega_p$	$\Lambda=\left(\frac{2}{\gamma}\right)^2\frac{1}{e'^{1/2}}\left(\frac{kT}{m}\right)^{1/2}\frac{kT}{Ze^2\omega_p}$ $\approx 3.1\times10^3(T^{3/2}/ZN_e^{1/2})$	$\Lambda=\left(\frac{8}{e'\gamma}\right)^{1/2}\left(\frac{kT}{m}\right)^{1/2}\frac{(mkT)^{1/2}}{\hbar\omega_p}$ $\approx 3.0\times10^6(T/N_e^{1/2})$

$$\tau_\nu \approx 8.235\times10^{-2}T_e^{-1.35}\nu^{-2.1}\int N_e^2 dl \quad (\text{当 } \nu\ll10^{10}T \text{ 和 } T<9\times10^5\ \text{开}), \tag{1-223}$$

式中 T_e 是电子温度,以开为单位;频率 ν 以京赫或 10^9 赫为单位;发射量 $\int N_e^2 dl$ 是以秒差距·厘米$^{-6}$ 为单位,1 秒差距 =*3.08567757×10^{18} 厘米。只要把(1-223)式乘以一个很接近于 1 的因子 $a(\nu, T)$,(1-223)式就与由(1-222)式得出的更精确的结果相同,梅兹格等(Mezger 和 Henderson, 1967)已列表给出了因子 $a(\nu, T)$ 的值。

由(1-223)式可知,临界频率

$$\nu_T \approx 0.3(T_e^{-1.35}N_e^2 l)^{1/2} \tag{1-224}$$

时,光学深度就变成 1,式中 ν_T 是以京赫为单位,沿视线方向的等离子体的长度 l 是以秒差距为单位。在射电频段,即 $h\nu\ll kT$ 或 $\nu\ll10^{10}T$ 时,(1-219)式中的指数因子变成 1,而且当频率 $\nu>\nu_T$ 时,辐射频谱几乎是平的。当频率 $\nu<\nu_T$ 时,辐射是自吸收的,并且辐射频谱就是一个黑体辐射频谱,它在低频段是随 ν^2 而减小的。从电离氢区(HII 区)来的热轫致辐射

就呈现这样一种频谱，例如图 4 所示为猎户星云的这种频谱。在频率范围 ν 至 $\nu+d\nu$ 中，热等离子体辐射的能量密度 $U(\nu)d\nu$ 由下式给出 (Smerd 和 Westfold, 1949)：

$$U(\nu)d\nu=\frac{4\pi}{c}n_\nu B_\nu(T)d\nu, \tag{1-225}$$

式中黑体辐射体的亮度 $B_\nu(T)$ 由(1-119)式给出，折射率 n_ν 与等离子体频率和电子密度的关系为(1-188)式。

把(1-219)式对所有频率积分就得出一个热等离子体的韧致辐射总光度 L：

$$L=4\pi V\int \varepsilon_\nu d\nu=\frac{32\pi}{3}\left(\frac{2\pi}{3}\right)^{1/2}\frac{e^6}{mc^3h}\left(\frac{kT}{m}\right)^{1/2}N_eN_iVZ^2g$$
$$={}^*1.421932\times10^{-27}N_eN_iT^{1/2}VZ^2g\ \text{尔格·秒}^{-1}, \tag{1-226}$$

式中 V 是源的体积，并已假定了折射率是 1。

当存在强磁场($H>10^{13}$ 高斯)时，电子韧致辐射与寻常韧致辐射过程的不同在于：在磁场中的电子在磁场方向上是自由运动的一维粒子，但在垂直于磁场平面内的运动则是被束缚在能量(在非相对论性范围内)为 $1.19\times10^{-8}H$ 电子伏倍数的那些量子化圆轨道上，其中 H 是以高斯为单位的磁场强度。卡纽托等(Canuto, Chiu 和 Fassio-Canuto, 1969)给出了在真空的强磁场中，电子韧致辐射的发射率与吸收系数的公式，卡纽托等(Canuto 和 Chiu, 1970)给出了在强磁场等离子体中的电子韧致辐射的发射率和吸收系数的公式。处在零能级量子态上的电子的发射率由下式给出(Chiu, Canuto 和 Fassio-Canuto, 1969)：

$$\varepsilon=3.01\times10^{-29}N_iN_eH_8Z^2E_5^{5/2}\nu_8^{-2}\ \text{尔格·秒}^{-1}\text{·厘米}^{-3}\text{·}(10^8\text{·赫})^{-1}, \tag{1-227}$$

式中 N_e 及 N_i 分别是电子及离子数密度；Z 是原子核的电荷；E_5 是电子能量，以 $k\cdot10^5$ 开 $={}^*8.61735$ 电子伏为单位；ν_8 是辐射频率，以 10^8 赫为单位。

1.31. 光致电离和复合(自由-束缚)辐射

一个质量为 m、电荷为 e 及速度为 v 的电子与一个电荷为 Ze 的离子复合形成一个束缚原子而处在主量子数为 n 的能态时，或者对于来自能级 n 的光致电离这种相反过程来说，发射或吸收的频率 ν 就由下式给出(Einstein, 1905)：

$$h\nu=\frac{1}{2}mv^2+E_i-E_n, \tag{1-228}$$

式中 E_i 是电离能，E_n 是第 n 个能态的能量。对于类氢原子，(1-228)式成为：

$$h\nu=\frac{1}{2}mv^2+Z^2E_H/n^2, \tag{1-229}$$

式中 $E_H=2\pi^2e^4m/h^2={}^*13.605804(36)$ 电子伏 $={}^*2.179907(12)\times10^{-11}$ 尔格，它是氢的电离能，Z^2E_H 是一个电荷为 $(Z-1)e$的类氢离子的电离能。

对于在一个电荷为 Ze 的离子场中包含一个电子的类氢系统的光致电离来说，当入射光的频率为 ν 时，其总吸收截面 $\sigma_a(\nu, n)$ 为(Kramers, 1923)：

$$\sigma_a(\nu,n)=\frac{32\pi^2e^6R_\infty Z^4}{3^{3/2}h^3\nu^3n^5}={}^*2.815400\times10^{29}\frac{Z^4}{\nu^3n^5}\ \text{厘米}^2, \tag{1-230}$$

式中 $R_\infty=2\pi^2e^4m/(h^3c)$ 是里德伯常数，n 是初态的主量子数。$\sigma_a(\nu, n)$ 的更准确的表达式由下式给出(Gaunt, 1930; Menzel 和 Pekeris, 1935; Burgess, 1958)：

$$\sigma_a(\nu,n)g_{fb}(T,\nu), \tag{1-231}$$

式中自由-束缚冈特因子在光学波段接近于1。门泽尔等(Menzel 和 Pekeris, 1935; Karzas

表 3 在光谱头部的吸收截面 σ_T 的值以及在给定电离电势 V_i 时的吸收最大或吸收最小的吸收截面 σ_m 的值[1]

系统	V_i（电子伏）	λ_T（埃）	σ_T	系统	V_i（电子伏）	λ_T（埃）	σ_T	λ_m（埃）	σ_m
H	13.6	912	6.3	Ne	21.6	575	4.0	400	8.0
He	24.6	504	7.4	Na	5.14	2,412	0.12	1,900	0.013
Li	5.39	2,300	2.5	K	4.34	2,860	0.012	2,700	0.006
Be	9.32	1,330	(8.2)	Ca	6.11	2,028	0.45	1,930	<0.1
B	8.30	1,490	19	Kr	14.7	845	35	800	35
C	11.3	1,100	(11)	Rb	4.18	2,970	0.11		<0.004
N	14.6	852	(9)	Cs	3.89	3,185	0.22	2,750	0.08
O	13.6	910	(2.6)	Tl	6.11	2,030	4.5	1,730	<0.1
F	17.4	713	(6)	H_2	15.4	804		780	7.4
Ne	48.5	256	2.5		12.6	1,019			
Mg	7.64	1,620	1.18	O_2	16.1	770		550	22
Al	5.98	2,070		N_2	15.6	792		750	26
Ar	15.8	787	35	CH_4	12.8	967		960	(56)
Ar	15.9	778		H_2O	12.5	985		346	(100)
Ar	32	420	(3)	CO	14.21	868		600	16.5
Ca		1,589	(0.45)		(16.5)	(750)			~1
Ga	6.00	2,070	(0.2)		(20)	(620)			~1
Kr	14.0	885		CO_2	14.4	860		(800)	18
In	5.79	2,140	(0.3)		(17.7)	(700)		(600)	(15)
Xe	12.1	1,020		NH_3	10.3	1,210		(900)	10
He^+	54.4	228	1.6		(16.5)	(750)		(700)	(25)
C^+	24.4	508	3.7	N_2O	12.9	960		700	35
N^+	29.6	419	(6.4)			?		(357)	(30)
O^+	35.2	353	(8.1)			?		(225)	(30)
F^+	35.0	354	2.5	NO	9.25	1,340		880	20
Ne^+	41.0	302	4.5		(14)	(880)			?
Na^+	47.3	262	7.1		(16)	(730)			?
Mg^+	15.0	825			(18.7)	(660)		(600)	(20)
Si^+	16.3	760		H_2^+	16.3	763		400	0.67
Ca^+	11.9	1,040	0.17						

[1] 取自迪奇伯恩等(Ditchburn 和 Öpik, 1962)的文献。圆括号内为不确定的值。

和 Latter, 1961)已列表给出了冈特因子。表 3 还给出了某一阈值或最大波长的 $\sigma_a(\nu, n)$ 的实测值。在第 4 章中将给出任何一个原子的 K 壳层的两个电子被剥离的光致电离截面。

一对电子–离子碰撞复合辐射的复合截面 $\sigma_r(\nu, n)$ 可以利用下列米尔恩 (Milne, 1921) 关系式:

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_r}=\frac{m^2c^2v^2g_Z(1)}{\nu^2h^2g_{Z-1}(n)}, \tag{1-232}$$

式中 $g_Z(1)$ 是离子在基态的统计权重, $g_{Z-1}(n)$ 是原子第 n 个能级的统计权重。对于类氢系统, $g_Z(1)=1$ 及 $g_{Z-1}(n)=2n^2$。因此由(1-230)式和(1-232)式得出:

$$\sigma_r(\nu, n)=\frac{128\pi^4e^{10}Z^4g_{fb}}{3\sqrt{3}\,mc^3h^4\nu n^3v^2}={}^*3.314837\times10^{10}\frac{Z^4g_{fb}}{\nu n^3v^2}\ \text{厘米}^2。 \tag{1-233}$$

对于电子密度为 N_e、离子密度为 N_i 的等离子体来说，每单位体积、速度为 v 到 $v+dv$ 内的电子与基态离子之间复合的总数是:

$$N_iN_ef(v)\sigma_r(\nu,\ n)vdv, \tag{1-234}$$

式中 $f(v)$ 是电子速度分布，$\sigma_r(\nu,\ n)$ 是一对电子-离子复合而处在能级 n 的截面(对于类氢原子由(1-233)式给出)。当自由电子处在温度为 T 的局部热动平衡中时，速度分布就是麦克斯韦分布。在这种情况下，对于类氢原子，当发生复合并且处在能级 n 时，在频率间隔 ν 至 $\nu+d\nu$ 中每单位体积辐射的复合功率 $P_r(n,\ \nu)d\nu$ 由下式给出：

$$P_r(n,\ \nu)d\nu = N_eN_i\frac{Z^4K}{(kT)^{3/2}}\frac{g_{fb}}{n^3}\exp\left[-\frac{h\nu}{kT}+\frac{Z^2E_H}{n^2kT}\right]d\nu, \tag{1-235}$$

式中 $K=\dfrac{64\pi^{1/2}e^4h}{3^{3/2}m^2c^3}(E_H)^{3/2}={}^*3.443653\times10^{-40}(E_H)^{3/2}$ 尔格$^{5/2}$·厘米^3,

以及 $E_H=2\pi^2e^4m/h^2={}^*2.179907\times10^{-11}$ 尔格是氢的电离能。在频率间隔 ν 至 $\nu+d\nu$ 每单位体积辐射的复合总功率 $P_r(\nu)d\nu$ 是由 $P_r(n,\ \nu)$ 对所有容许的量子能级求和得出：

$$P_r(\nu)d\nu = N_eN_i\frac{Z^4K}{(kT)^{3/2}}\exp\left(\frac{-h\nu}{kT}\right)\sum_{n_0}^{\infty}n^{-3}\exp\left(\frac{Z^2E_H}{n^2kT}\right)g_{fb}d\nu, \tag{1-236}$$

式中 $n_0\geqslant(Z^2E_H/h\nu)^{1/2}$。

当需用 $P_r(\nu)d\nu$ 的具体数值时，可以应用布鲁萨德等 (Brussaard 和 van de Hulst, 1962)的近似公式来计算(1-236)式中的求和。热轫致辐射和复合辐射两者的总的体发射率 ε_ν 由下式给出(Brussaard 和 van de Hulst, 1962)：

$$\varepsilon_\nu d\nu = \frac{8}{3}\left(\frac{2\pi}{3}\right)^{1/2}\frac{Z^2e^6}{m^2c^3}\left(\frac{m}{kT}\right)^{1/2}N_iN_ebd\nu \tag{1-237}$$

$$={}^*5.444460\times10^{-39}Z^2\frac{N_iN_e}{T^{1/2}}bd\nu \text{ 尔格·秒}^{-1}\text{·厘米}^{-3}\text{·赫}^{-1}\text{·弧度}^{-2},$$

式中

$$b=[g(\nu,\ T)+f(\nu,\ T)]\exp\left(\frac{-h\nu}{kT}\right), \tag{1-238}$$

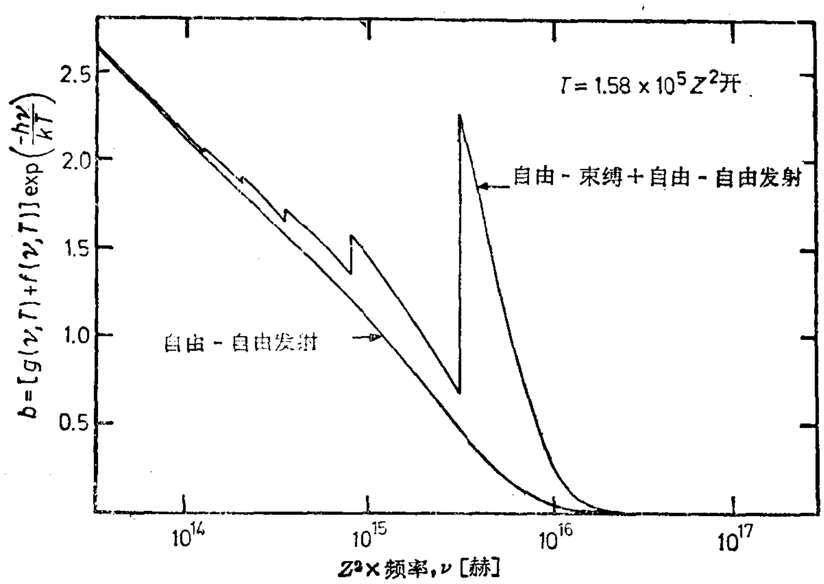


图 5 按照麦克斯韦分布的电子在温度 $T=2\pi^2me^4Z^2/(h^2k)={}^*1.578885\times10^5Z^2$ 开时的发射频谱，计算中注意到了利用精确的冈特因子(取自 Brussaard 和 van de Hulst, 1962)。下面的曲线表示热轫致发射的频谱，上面的曲线表示热轫致辐射与复合辐射合并的频谱。体发射率 ε_ν 与 b 的关系式为(1-237)式

自由-自由冈特因子 $g(\nu, T)$ 由(1-220)式和表 2 给出，而自由-束缚冈特因子 $f(\nu, T)$ 由下式给出：

$$f(\nu, T)=2\theta \sum_{n=m}^{5} g_n \frac{e^{\theta/n^2}}{n^3}+2\theta g_\infty \sum_{n=6}^{\infty} \frac{e^{\theta/n^2}}{n^3}+50\theta\,(g_5-g_\infty) \sum_{n=6}^{\infty} \frac{e^{\theta/n^2}}{n^5}, \qquad (1\text{-}239)$$

式中 m 是最低能级的主量子数，它相应于可能出现的频率 ν 的辐射。$g_n(\nu)$ 是从自由能态跃迁到束缚能态的冈特因子，$\theta=2\pi^2me^4Z^2/(h^2kT)$。图 5 为 $T=1.58\times10^5$ 开时的频谱函数 b 的曲线和只有轫致辐射时的频谱曲线。这两条曲线表明，当 $h\nu\ll kT$ 或 $\nu\ll10^{10}T$ 时，复合辐射与轫致辐射比较起来是不重要的。在光学频段，中性氢及电离氢和氦的复合辐射变得重要了，这就象是氢的两个光子的发射那样。张德拉塞卡等 (Chandrasekhar 和 Breen, 1946; Brown 和 Mathews, 1970) 已对这些效应作了详尽讨论 (见第 2.11 节)。卡尔哈尼 (Culhane, 1969) 计算了温度在 0.8×10^6 至 10^8 开之间由自由-自由和自由-束缚跃迁而产生的在 X 射线波段(1～30 埃)的连续频谱。

把(1-236)式对一切只跃迁到基态($n=1$, $\nu\geqslant Z^2E_H/h$)所产生的频率进行积分，就可得出复合辐射的总光度 L 的下限(Cooper, 1966)：

$$L_{\min}\approx10^{-21}N_eN_iT^{-1/2}VZ^4\ \text{尔格·秒}^{-1}, \qquad (1\text{-}240)$$

式中 V 是源的体积。(1-226)式与(1-240)式的比较表明，当温度小于 10^6 开时，复合辐射的总光度可以大于热轫致辐射的总光度。

1.32. 天体物理等离子体

几乎在宇宙空间中的所有物质都可看作为等离子体，即由电子(e)、离子(i)及中性原子(a)或分子(m)组成的一种电离气体，它们的密度分别是 N_e、N_i、N_a、N_m；质量分别是 m、M_i、M_a、M_m；电荷分别是 e、Ze，对中性粒子当然是零。常常认为等离子体是处于温度为 T 的局部热动平衡中；而且等离子体通常具有强度为 H 的磁场。对于一些熟知的天体物理等离子体的 N_e、N_a+N_m、T_e 及 H 的典型值列在表 4 中。

对于处在温度为 T 的热动平衡中的等离子体，电子速度分布是服从麦克斯韦分布的 (Maxwell, 1860, (3-114)式)，并且均方根速度 $v_{热}$ 及平均动能 $E_{平均}$ 由下式给出：

$$v_{热}=(3kT/m)^{1/2}={}^*6.743048\times10^5T^{1/2}\ \text{厘米·秒}^{-1};$$
$$E_{平均}=3kT/2={}^*2.070993\times10^{-16}T\ \text{尔格。} \qquad (1\text{-}241)$$

当电子密度为 N_e 时，电子间的平均距离 $\langle r\rangle$ 和平均库仑能量 $E_{库}$ 分别为：

$$\langle r\rangle=(3N_e/4\pi)^{1/3}={}^*0.6203505N^{1/3}\ \text{厘米};$$
$$E_{库}=e^2/\langle r\rangle={}^*3.719048\times10^{-19}N_e^{-1/3}\ \text{尔格。} \qquad (1\text{-}242)$$

由泊松方程(Poisson, 1813, (1-4)式)可知，由于电子的线性位移 $x(t)$ 而引起的电场强度为：

$$E=4\pi eN_ex(t)\text{。} \qquad (1\text{-}243)$$

利用洛伦兹力方程(Lorentz, 1892, (1-52)式)以及(1-243)式，可得到位移电荷的运动方程：

$$m\ddot{x}(t)+4\pi e^2N_ex(t)=0, \qquad (1\text{-}244)$$

式中"$\cdot\cdot$"表示对时间 t 的二次导数。(1-244)式是一个谐振子的运动方程，其振荡频率就是等离子体频率 ω_p：

$$\omega_p=\left(\frac{4\pi e^2N_e}{m}\right)^{1/2}={}^*5.641457\times10^4N_e^{1/2}\ \text{弧度·秒}^{-1}$$

或

$$\nu_p=\omega_p/2\pi={}^*8.978658\times10^3N_e^{1/2}\ \text{赫}, \qquad (1\text{-}245)$$

表 4 天体物理等离子体的电子密度 N_e、分子密度 N_m+ 原子密度 N_a、电子温度 T_e 及磁场强度 H

等离子体	N_e (厘米$^{-3}$)	N_m+N_a (厘米$^{-3}$)	T_e (开)	H (高斯)
电离层:				
D 层～70 公里	10^3	2×10^{15}	2×10^2	$\sim3\times10^{-1}$
E 层～100 公里	10^5(昼), 10^3(夜)	6×10^{12}	$2\sim3\times10^2$	$\sim3\times10^{-1}$
F_1 层～200 公里	10^5(昼), 不存在(夜)	10^{10}	10^3	$\sim3\times10^{-1}$
F_2 层～300 公里	10^6(昼), 10^5(夜)	10^9	$1\sim3\times10^3$	$\sim3\times10^{-1}$
行星际空间	$1\sim10^4$	≈0	$10^2\sim10^3$	$10^{-5}\sim10^{-5}$
日冕	$10^4\sim10^8$	≈0	$10^3\sim10^6$	$10^{-5}\sim1$
太阳色球层	10^{12}	≈0	10^4	10^3
恒星内部	10^{27}	≈0	$10^{7.5}$	—
行星状星云	$10^3\sim10^5$	≈0	$10^3\sim10^4$	$10^{-4}\sim10^{-3}$
HII(电离氢)区	$10^2\sim10^3$	≈0	$10^3\sim10^4$	10^{-6}
白矮星	10^{32}	≈0	10^7	10^6(表面)
脉冲星	10^{42}(核心), 10^{12}(表面)	≈0		10^{12}(表面)
星际空间	$10^{-3}\sim10$(平均 ~0.03)	$10^{-2}\sim10^5$(平均 ~1)	10^2	10^{-6}
星系际空间	$\lesssim10^{-5}$	≈0	$10^5\sim10^6$	$\lesssim10^{-8}$

汤克斯等(Tonks 和Langmuir, 1929)首先得出这个结果。同样可以从洛伦兹力方程(1-52)式直接得出,带电粒子在强度为 H 的磁场中运动是以下式给出的回转频率 ω_H 绕场线回转:

$$\omega_H=\frac{ZeH}{Mc\gamma}\sin\psi={}^*1.758805\times10^7\frac{ZmH}{M\gamma}\sin\psi\ \text{弧度·秒}^{-1} \tag{1-246}$$

或

$$\nu_H={}^*2.7992246\times10^6H\gamma^{-1}\sin\psi\ \text{赫}\quad(\text{当 } M=m)。$$

亥维赛(Heaviside, 1904)首先得出这个结果。式中 M 是粒子质量, Ze 是电荷, v 是速度,以及 $\gamma=[1-(v/c)^2]^{-1/2}=E/mc^2$, 其中 E 是粒子能量。螺距角是速度矢量与磁场矢量间的夹角。回转半径 r_H 由下式给出:

$$r_H=\frac{v}{\omega_H}\approx\frac{v_{热}}{\omega_H}=\frac{c(3kTm)^{1/2}M\gamma}{ZeHm}={}^*3.833881\times10^{-2}\frac{T^{1/2}M\gamma}{ZHm}\text{厘米}。 \tag{1-247}$$

把一个试验电荷 Ze 放在处于热动平衡的等离子体中时,其静电势 $\varphi(r)$ 将使电子运动而形成空间密度为 $N(r)$ 的分布, $N(r)$ 由玻耳兹曼方程(3-4)式和麦克斯韦分布(3-114)式给出:

$$N(r)=N_e\exp\left[-\frac{e\varphi(r)}{kT}\right];$$
$$N(r)\approx N_e\left[1-\frac{e\varphi(r)}{kT}\right]\quad(\text{当 } e\varphi(r)\ll kT), \tag{1-248}$$

式中 r 是与试验电荷的距离。利用(1-248)式的近似形式以及泊松方程(Poisson, 1813, (1-4)式),我们就可得出方程:

$$\varphi(r)=\frac{Ze}{r}\exp\left(-\frac{r}{r_D}\right), \tag{1-249}$$

式中德拜半径 r_D 由下式给出:

$$r_D=3^{-1/2}\left(\frac{v_{热}}{\omega_p}\right)=\left(\frac{kT}{4\pi e^2N_e}\right)^{1/2}={}^*6.900878\left(\frac{T}{N_e}\right)^{1/2}\text{厘米}。 \tag{1-250}$$

(1-249)式及(1-250)式是德拜等(Debye 和 Hückel, 1923)首先得出的,他们证明等离子体

中电子的运动方式以使试验电荷的库仑场在距离 $r>r_D$ 处屏蔽掉。朗道(Landau, 1946)曾证明为了使波得以存在，电子等离子体振荡的波长必须大于德拜长度。

由麦克斯韦方程组(Maxwell, 1860, (1-39)至(1-42)式)可知在真空中的磁场强度 H 电场强度 E 及电流密度 J 由下列方程相联系：

$$c\nabla\times H=4\pi J+\frac{\partial E}{\partial t}。\tag{1-251}$$

当密度为 N_e 的电子被引入真空时，$J=N_e ev$，其中速度 $v=eE_0/(i\omega m)$，这是根据一个电子受到 $E=E_0\exp(i\omega t)$ 的振荡电场作用时的洛伦兹力定律得出的。因此(1-251)式可以写成：

$$c\nabla\times H=i\omega\left[1-\frac{4\pi e^2 N_e}{m\omega^2}\right]E_0=i\omega\varepsilon_\nu E_0,\tag{1-252}$$

式中 ε_ν 是介电常数。由此可知，对于频率为 ν 的横向电磁波的折射率 $n_{\nu\perp}$ 由下式给出：

$$n_{\nu\perp}=\sqrt{\varepsilon_\nu}=\left[1-\left(\frac{\nu_p}{\nu}\right)^2\right]^{1/2}=\left[1-{}^*8.061629\times10^7\ \frac{N_e}{\nu^2}\right]^{1/2},\tag{1-253}$$

麦克斯韦(Maxwell, 1899)首先导出了这个方程。

若电子的热速度足够低，在一个振荡周期内，大多数相互作用粒子间的平均距离没有明显的改变的话，那末(1-253)式是成立的。当考虑到电子的热运动时，能够证明可能有纵向等离子体振荡。设 φ 是由等离子体粒子的运动所产生的平均势，泊松方程(1-4)可以写成：

$$-\nabla^2\varphi=4\pi\rho=4\pi eN_e\left[1-\int\frac{f(v)dv}{\left(1+\dfrac{2e\varphi}{mU^2}\right)^{1/2}}\right]\approx\frac{4\pi K^2e^2N_e\varphi}{m}\int\frac{f(v)dv}{(\omega-K\cdot v)^2},\tag{1-254}$$

式中 U 是波坐标系中的波速，v 是实验室系统中的速度，$f(v)$ 是速度分布函数，ω 是波频率，波数 $K=2\pi/\lambda$，其中 λ 是波长。符拉索夫(Vlasov, 1945)首先得出(1-254)式。假设处于热动平衡的等离子体具有麦克斯韦速度分布(3-114)式，把积分式展开，并解出 ω，即得：

$$\omega^2\approx\frac{4\pi e^2N_e}{m}+\left(\frac{3kT}{m}\right)K^2=\omega_p^2+v_{热}^2K^2,\tag{1-255}$$

相应地得到纵波的折射率 $n_{\nu\parallel}$：

$$\begin{aligned}n_{\nu\parallel}&=\frac{cK}{\omega}=\left(\frac{c}{v_{热}}\right)\left[1-\left(\frac{\nu_p}{\nu}\right)^2\right]^{1/2}={}^*4.445949\times10^4T^{-1/2}\\&\cdot\left[1-{}^*8.061629\times10^7\,\frac{N_e}{\nu^2}\right]^{1/2}。\end{aligned}\tag{1-256}$$

玻姆等(Bohm 和 Gross, 1949)首先导出了(1-255)式及(1-256)式，并已证明这对 $\nu\approx\nu_p$ 的波是成立的。

等离子体的黑体辐射强度为(Planck, 1901; Milne, 1930)：

$$B_{\nu p}(T)=n_\nu^2\,\frac{2h\nu^3}{c^2}\left[\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)-1\right]^{-1}\approx2n_\nu^2\nu^2kT/c^2\quad(当\ \nu<10^{10}T)。\tag{1-257}$$

对等离子体来说，频率在 ν 到 $\nu+d\nu$ 之间每单位频率间隔的辐射能量密度(Smerd 和 Westfold, 1949)为：

$$\begin{aligned}U(\nu)d\nu&=\frac{4\pi}{c}\,B_{\nu p}(T)\left|\frac{\partial\omega n_\nu}{\partial\omega}\right|d\nu\\&\approx8\pi\frac{\nu^2kT}{c^3}\left[1-\left(\frac{\nu_p}{\nu}\right)^2\right]^{1/2}d\nu\quad(当\ \nu<10^{10}T，横波；\nu\approx\nu_p)\\&\approx\frac{8\pi\nu^2kT}{3\sqrt{3}\,c^3}\left(\frac{mc}{kT}\right)^3\left[1-\left(\frac{\nu_p}{\nu}\right)^2\right]^{1/2}d\nu\quad(当\ \nu<10^{10}T，纵波；\nu\approx\nu_p)。\end{aligned}\tag{1-258}$$

等离子体的基尔霍夫定律(Kirchhoff, 1860; Milne, 1930)为：

$$\varepsilon_\nu=\alpha_\nu B_{\nu p}(T), \tag{1-259}$$

式中 ε_ν 是发射系数(每单位体积、每单位频率间隔、每单位立体角发射的功率),α_ν 是每单位长度的吸收系数,$B_{\nu p}(T)$ 是等离子体的黑体辐射强度(它是真空值的 n_ν^2 倍)。

每单位长度的吸收系数(Kramers, 1923; Gaunt, 1930)

$$\alpha_\nu=\frac{1}{n_\nu}\left(\frac{\nu_p}{\nu}\right)^2\frac{\nu_{有效}}{c}\quad(当\ \nu<10^{10}T)。 \tag{1-260}$$

电子与离子 i 或分子 m 的有效碰撞频率:

$$\begin{aligned}\nu_{有效}(i)&=\frac{4}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{3}\right)^{3/2}Z^2\frac{e^4}{m^2}\left(\frac{m}{kT}\right)^{3/2}N_i g(\nu,T)\approx 50\frac{N_i}{T^{3/2}}\ 赫;\\ \nu_{有效}(m)&=\frac{4\pi}{3}a^2v_{热}N_m={}^*8.990731\times10^5\pi a^2T^{1/2}N_m\ 赫,\end{aligned} \tag{1-261}$$

式中冈特因子 $g(\nu, T)=(\sqrt{3}/\pi)\ln\Lambda$。对数因子已在表 2 中给出。半径为 a 的分子的有效碰撞截面是 πa^2, 对空气来说,这个值是 4.4×10^{-16}厘米²。

平均自由程

$$r_m=\frac{v_{热}}{\nu_{平均}}\approx10^4(T^2/N_i)\ 厘米。 \tag{1-262}$$

1.33. 在等离子体中电磁(横)波的传播

按照拉特克利夫(Ratcliffe, 1959)我们定义下列无量纲参量:

$$X=\left(\frac{\nu_p}{\nu}\right)^2,\qquad Y=\frac{\nu_H}{\nu}\qquad 和\qquad Z=\frac{\nu_{有效}}{2\pi\nu}, \tag{1-263}$$

式中 ν 是电磁波的频率, ν_p、ν_H 及 $\nu_{有效}$的定义见第 1.32 节。对磁场的任何一个方向, 复数折射率由下式给出:

$$\varepsilon_\nu^2=[n_\nu-iq_\nu]^2=\frac{X}{1-\dfrac{1-iZ-\frac{1}{2}Y_T^2}{1-X-iZ}\pm\left[\dfrac{\frac{1}{4}Y_T^4}{(1-X-iZ)^2}+Y_L^2\right]^{1/2}}, \tag{1-264}$$

式中“±”号中的 + 和 − 分别表示寻常波和非常波, $Y_T=Y\sin\psi$ 和 $Y_L=Y\cos\psi$, 其中 ψ 是电磁波传播方向与磁场矢量间的夹角。n_ν 是折射率, 吸收系数 α_ν 为 $4\pi q_\nu\nu/c$。

对于准纵向传播这种重要的特殊情况来说, 波几乎是沿着磁力线传播的, 我们得到折射率:

$$n_\nu\approx\{1-\nu_p^2[\nu(\nu\pm\nu_H)]^{-1}\}^{1/2}=\left[1-\frac{X}{1\pm Y}\right]^{1/2}; \tag{1-265}$$

而吸收系数:

$$\alpha_\nu\approx\frac{\nu_{有效}}{n_\nu c}\left(\frac{\nu_p}{\nu}\right)^2\left[1\pm\left(\frac{\nu_H}{\nu}\right)\right]^{-2}=\frac{\pi\nu}{n_\nu c}\,\frac{XZ}{(1\pm Y)^2+Z^2}。 \tag{1-266}$$

在这种情况下的色散关系式是阿普顿等(Appleton, 1932; 和 Hartree, 1931)给出的“冷”等离子体的色散关系。寻常波和非常波两者几乎都是完全圆偏振的, 寻常波是左旋的。非常波与寻常波在等离子体中传播长度 Δl 后, 它们之间的相位差 $\Delta\varphi$:

$$\Delta\varphi=\frac{\omega}{2c}(n_{\nu+}-n_{\nu-})\,dl\approx\frac{\pi\nu}{c}\left(\frac{\nu_p}{\nu}\right)^2\left(\frac{\nu_H}{\nu}\right)dl=\frac{\pi\nu}{c}XY\,dl, \tag{1-267}$$

式中 $n_{\nu+}$ 及 $n_{\nu-}$对应于(1-265)式取 + 号及 − 号而得到的值。因此, 入射到等离子体上的一个线偏振电磁波, 在等离子体中行进距离 L 后, 将旋转 Ω 弧度, 其中 Ω 由下式给出:

$$\Omega=\int_0^L \Delta\varphi dl=\frac{e^3}{2\pi m^2c^2\nu^2}\int_0^L N_e H\cos\psi\, dl=\frac{{}^*2.364775\times10^4}{\nu^2}\int_0^L N_e H\cos\psi dl \text{ 弧度。} \quad (1\text{-}268)$$

角度 ψ 是磁场与视线间的夹角。这种效应由于是法拉第(Faraday, 1844)发现的，故称为法拉第旋转。只要 $\nu\gg\nu_{\rm H}$，由于垂直于视线方向上的 H 分量引起的电磁波的旋转比起 Ω 来就可以忽略不计。线积分 $\int_0^L N_e H\cos\psi dl$ 通常是以一个线偏振照射器在小间距的一些频率上观测强度的周期性起伏来测定的。这种正弦振荡的周期 P 由下式给出：

$$P=1.33\times10^{-4}\nu^3\left[\int_0^L N_e H\cos\psi dl\right]^{-1}\text{赫}\approx10^9[\lambda^3\theta_{\text{旋}}]^{-1}\text{赫}, \quad (1\text{-}269)$$

式中旋转量 $\theta_{\text{旋}}$ 由下式给出：

$$\theta_{\text{旋}}={}^*8.118934\times10^5\int N_e H\cos\psi dl \text{ 弧度}\cdot\text{米}^{-2}, \quad (1\text{-}270)$$

当 λ 以米为单位，(1-270)式中的 dl 以秒差距为单位，而在(1-269)式中以厘米为单位时，旋转角 $\Omega=\lambda^2\theta_{\text{旋}}$ 弧度。

对于横向传播，折射率由下式给出：

$$n_{\nu0}=[1-(\nu_p/\nu)^2]^{1/2}=[1-X]^{1/2}; \quad (1\text{-}271)$$

而对于准横向传播，折射率为：

$$n_{\nu0}=\{1-\nu_p^2[\nu^2+(\nu^2-\nu_p^2)\cot^2\theta]^{-1}\}^{1/2},$$

式中 θ 代表传播方向与磁场间的夹角。对这两种情况

$$n_{\nu e}=\left\{1-\left(\frac{\nu_p}{\nu}\right)^2\frac{[1-(\nu_p/\nu)^2]}{1-(\nu_p/\nu)^2-(\nu_{\rm H}/\nu)^2}\right\}^{1/2}=\left\{1-\frac{X(1-X)}{1-X-Y^2}\right\}^{1/2}, \quad (1\text{-}272)$$

而吸收系数由下式给出：

$$\alpha_{\nu0}=\frac{\nu_{\text{有效}}}{n_\nu c}\left(\frac{\nu_p}{\nu}\right)^2=\frac{\nu_{\text{有效}}X}{n_\nu c}, \quad (1\text{-}273)$$

$$\alpha_{\nu e}=\frac{\nu_{\text{有效}}}{n_\nu c}\left(\frac{\nu_p}{\nu}\right)^2\frac{[1+(\nu_{\rm H}/\nu)^2]}{[1-(\nu_{\rm H}/\nu)^2]^2}=\frac{\nu_{\text{有效}}X}{n_\nu c}\,\frac{1+Y^2}{(1-Y^2)^2}, \quad (1\text{-}274)$$

式中下标"0"及"e"分别表示寻常波及非常波。在此情况下，这两种波几乎都是完全偏振的，寻常波的电矢量是平行于磁场的。

在不存在磁场时，等离子体的介电常数 ε_ν 及电导率 σ_ν 由下式给出(Ginzburg, 1961)：

$$\varepsilon_\nu=1-\frac{\nu_p^2}{\nu^2+(\nu_{\text{有效}}/2\pi)^2}, \quad (1\text{-}275)$$

$$\sigma_\nu=\frac{\nu_p^2\nu_{\text{有效}}}{4\pi[\nu^2+(\nu_{\text{有效}}/2\pi)^2]}\approx\frac{\nu_{\text{有效}}}{4\pi}\left(\frac{\nu_p}{\nu}\right)^2\text{。} \quad (1\text{-}276)$$

折射率 n_ν 及吸收系数 α_ν 由下式给出：

$$n_\nu=\left\{\frac{\varepsilon_\nu}{2}+\left[\left(\frac{\varepsilon_\nu}{2}\right)^2+\left(\frac{\sigma_\nu}{\nu}\right)^2\right]^{1/2}\right\}^{1/2}\approx\left[1-\frac{\nu_p^2}{\nu^2+(\nu_{\text{有效}}/2\pi)^2}\right]^{1/2}\quad\left(\text{当 }\varepsilon_\nu\gg\frac{\sigma_\nu}{\nu}\right); \quad (1\text{-}277)$$

$$\alpha_\nu=4\pi\frac{\nu}{c}\left\{-\frac{\varepsilon_\nu}{2}+\left[\left(\frac{\varepsilon_\nu}{2}\right)^2+\left(\frac{\sigma_\nu}{\nu}\right)^2\right]^{1/2}\right\}^{1/2}$$

$$\approx\frac{1}{n_\nu}\left(\frac{\nu_p}{\nu}\right)^2\frac{\nu_{\text{有效}}}{c}\approx\frac{4\pi\sigma_\nu}{n_\nu c}\quad\left(\text{当 }\varepsilon_\nu\gg\frac{\sigma_\nu}{\nu}\right)\text{。} \quad (1\text{-}278)$$

当一个频率为 $\nu(\nu>\nu_{\rm H})$ 的波在传播中通过等离子体时，其群速度是：

$$u=cn_\nu\approx c\left[1-\left(\frac{\nu_p}{\nu}\right)^2\right]^{1/2}\text{。} \quad (1\text{-}279)$$

所以一个电磁辐射脉冲，在等离子体中行进距离 L 后会延迟一段时间：

$$\tau_D=\int_0^L \frac{dl}{u}\approx\int_0^L \frac{1}{c}\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{\nu_p}{\nu}\right)^2\right]dl\approx{}^*0.3335641\times10^{-10}L$$
$$+\frac{{}^*1.344535\times10^{-3}}{\nu^2}\int_0^L N_e dl \text{ 秒}, \quad (1-280)$$

较差频散为：

$$\Delta\tau_D=\frac{e^2}{2\pi mc}\left[\frac{1}{\nu_1^2}-\frac{1}{\nu_2^2}\right]\int_0^L N_e dl={}^*1.344535\times10^{-3}\left[\frac{1}{\nu_1^2}-\frac{1}{\nu_2^2}\right]\int_0^L N_e dl \text{ 秒}, \quad (1-281)$$

这是电磁波经过距离为 L 的等离子体后在高频 ν_1 接收到的脉冲与在低频 ν_2 接收到的脉冲之间的延迟。参量 $\int_0^L N_e dl$ 称为频散量，在厘米·克·秒制中单位为厘米$^{-2}$。也常用秒差距·厘米$^{-3}$ 作为频散量的单位(1 秒差距 $={}^*3.08567756\times10^{18}$ 厘米)[1)]。在表 5 中给出了 84 颗脉冲星的频散量以及其他数据。

1.34. 在等离子体中纵(P 波模)波的传播：等离子体的谱线辐射和切伦科夫辐射

因为等离子体宏观上是中性的，电子或离子密度的局部扰动会引起电子或离子的振荡，其振荡频率接近于等离子体频率 ω_p。如汤克斯(Tonks 和 Langmur, 1929)所指出的，这些振荡将以频率为 ω_p 的纵向等离子体波传播开去。对于温度为 T 的热等离子体，波的修正频率 ω 是(Bohm 和 Gross, 1949)：

$$\omega=[\omega_p^2+v_{热}^2K^2]^{1/2}, \quad (1-282)$$

式中 $v_{热}=[3kT/m]^{1/2}$, $K=2\pi/\lambda$, 这里 λ 是波的波长。对纵波来说等离子体的折射率 n_l 由下式给出：

$$n_l^2=\left(\frac{c}{v_{热}}\right)^2\left[1-\left(\frac{\nu_p}{\nu}\right)^2\right]。 \quad (1-283)$$

只有在 $n_l^2>0$[2)] 时才存在这种波，由此得出 ν 的下限是 ν_p。

当波长小于下列德拜半径 r_D(Debye 和 Hückel, 1923; Landau, 1946)时，波将受到严重阻尼(朗道阻尼)

$$r_D=\frac{1}{3^{1/2}}\left(\frac{v_{热}}{\omega_p}\right)={}^*6.900878\left(\frac{T}{N_e}\right)^{1/2} \text{ 厘米}, \quad (1-284)$$

或者等效地应用(1-282)式，当频率 $\nu\gtrsim\sqrt{2.7}\nu_p$ 时，波将受到阻尼，这就规定了 ν 的上限。当等离子体不均匀时，纵向等离子体波可以转换成电磁波(参看(Zheleznyakov, 1970)，其中详细地讨论了几个这类过程)。特别重要的是纵向等离子体波受到密度为 N 的等离子体小尺度热起伏的散射而产生的电磁辐射(Ginzburg 和 Zheleznyakov, 1958, 1959; Salpeter, 1960; Smerd, Wild 和 Sheridan, 1962)。由离子的热运动引起的准中性随机起伏能导致瑞利散射，从而产生频率为离子频率 $\nu_i=(e^2N_i/\pi m_i)^{1/2}$ 和等离子体频率 $\nu_p=(e^2N_e/\pi m_e)^{1/2}$ 的电磁辐射。体积 V 中，在等离子体频率上被散射的总能通量 $W(\nu_p)$ 由下式给出(Ginzburg 和 Zheleznyakov, 1959)：

$$W(\nu_p)\approx n_\nu\frac{e^4N_eV}{6m^2c^3}E_0^2, \quad (1-285)$$

式中折射率 $n_\nu=\sqrt{3}\,v_{热}/v_\varphi$, v_φ 是等离子体波的相速度，E_0 是等离子体波的电场振幅。在等离子体频率上，等离子体波能量转变成电磁波能量的效率参量 Q 由下式给出：

1) 原文误为 3.18×10^{18} 厘米。——译者注

2) 原文误为 $n_l>1$。——校者注

表 5 84 颗脉冲星的方位、周期 P、参考历元、半宽度、频散量 $\int N_e dl$、周期变化 dP/dt 及年龄 $P/(dP/dt)$[1]

名 称	脉 冲 星	α (1950.0)			δ (1950.0)			l^{II} (°)	b^{II} (°)	周 期 P (1 秒)	历 元 (J.D.24+)	半宽度 (毫秒)	$\int N_e dl$ (秒差距·厘米$^{-3}$)	dP/dt (10^{-9}秒/日)	$P/(dP/dt)$ (年)
		h	m	s	°	′	″								
P0031−07	MP0031	0	31	36	−07	38	26	110.4	−69.8	0.9429507566	40,690	51.0	10.89	0.0366	7.1E+07
P0105+65	PSR0105+65	1	05	00	65	50		124.6	3.3	1.283651	41,554	(29)	30		
P0138+59	PSR0138+59	1	38		59	45		129.1	−2.3	1.222949	41,544	35	34.5		
P0153+61	PSR0153+61	1	53	00	61	55		130.5	0.2	2.351615	41,554	(43)	60		
P0254−54	MP0254	2	54	24	−54			270.9	−54.9	0.4476	(41,347)	10	10		
P0301+19	PSR0301+19	3	01	45	19	23	36	161.1	−33.2	1.38758356	41,347	27	15.7		
P0329+54	CP0329	3	29	11	54	24	38	145.0	−1.2	0.71451864244	40,622	6	26.776	0.177	1.1E+07
P0355+54	PSR0355+54	3	55	00	54	13		148.1	0.9	0.15638004	41,594	3.5	57.0		
P0450−18	MP0450	4	50	22	−18	04	14	217.1	−34.1	0.548935369	41,536	19	39.9		
P0525+21	NP0525	5	25	52	21	58	18	183.8	−6.9	3.7454934468	40,957	181.0	50.8	3.461	
P0531+21	NP0531	5	31	31	21	58	55	184.6	−5.8	0.0331296454	41,221	3	56.805	36.526	2.9E+06
P0540+23	PSR0540+23	5	40	10	23	30		184.4	−3.3	0.245964	41,554	(16)	72		2.5E+03
P0611+22	PSR0611+22	6	11	03	22	35		188.7	2.4	0.33491850	41,603	(8)	96.7	7.377	
P0628−28	PSR0628−28	6	28	51	−28	34	08	237.0	−16.8	1.244414895981	40,242	(50)	34.36	0.217	1.3E+05
P0736−40	MP0736	7	36	51	−40	35	18	254.2	−9.2	0.374918324	40,221	22	100	<1.728	1.6E+07
P0740−28	PSR0740−28	7	40	48	−28	15	16	243.8	−2.4	0.166750167	41,027	8	80		>5.9E+05
P0809+74	CP0809	8	09	03	74	38	10	140.0	31.6	1.2922412852	40,689	41.3	5.84	0.0138	
P0818−13	MP0818	8	18	06	−13	41	23	235.9	12.6	1.23812810726	41,006	22	40.9	0.1820	2.5E+08
P0823+26	AP0823+26	8	23	51	26	47	18	197.0	31.7	0.530659599042	40,242	5.9	19.4	0.144	1.9E+07
P0833−45	PSR0833−45	8	33	39	−45	00	19	263.6	−2.8	0.0892187479	40,307	2	63	10.823	1.0E+07
P0834+06	CP0834	8	34	26	06	20	47	219.7	26.3	1.27376349759	40,626	23.7	12.90	0.587	2.3E+04
P0835−41	MP0835	8	35	34	−41	24	54	260.9	−0.3	0.76698	(41,347)	20	120		5.9E+06
P0904+77	PSR0904+77	9	04		77	40		135.3	33.7	1.57905	(40,222)	<80			
P0940−56	MP0940	9	40	40	−56			278.8	−2.5	0.662	(40,402)	30	145		
P0943+10	PP0943	9	43	20	10	05	33	225.4	43.2	1.097707	40,519	50	15.35		

1 这些资料由美国康奈尔(Cornell)大学特齐安(Y. Terzian)提供。

(续表)

名　称	脉 冲 星	α (1950.0)			δ (1950.0)			l^{II} (°)	b^{II} (°)	周　期 P (1秒)	历　元 (J.D. 24+)	半宽度 (毫秒)	$\int N_e dl$ (秒差距·厘米$^{-3}$)	dP/dt (10^{-9}秒/日)	$P/(dP/dt)$ (年)
		h	m	s	°	′	″								
P0950+08	CP0950	9	50	31	08	09	43	228.9	43.7	0.25306504317	40,622	8.8	2.965	0.0198	3.5E+07
P0959−54	MP0959	9	59	51	54	37		280.1	0.3	1.436551	40,553	50	90		
P1055−51	MP1055−51	10	55	49	−51	40		286.0	7.0	0.1971	(41,347)		<30		
P1112+50	PSR1112+50	11	12	49	50	40		155.1	60.7	1.65643810	41,594	14	9.2		
P1133+16	CP1133	11	33	28	16	07	33	241.9	69.2	1.18791116405	40,622	27.7	4.834	0.323	1.0E+07
P1154−62	MP1154	11	54	45	−62	08	36	296.7	−0.2	0.40052	(41,347)		270		
P1237+25	AP1237+25	12	37	12	25	10	17	252.2	86.5	1.38244857195	40,626	49.9	9.254	0.0825	4.6E+07
P1240−64	MP1240	12	40	20	−64	07	12	302.1	−1.6	0.38850	(41,347)	60	220		
P1359−50	MP1359	13	59	43	−50			314.5	11.0	0.690	(40,585)	20	20		
P1426−66	MP1426	14	26	34	−66	09	54	312.3	−6.3	0.7874	(41,347)	10	60		
P1449−65	MP1449	14	49	22	−65			315.3	−5.3	0.180	(40,282)	(5)	90		
P1451−68	PSR1451−68	14	51	29	−68	32		313.9	−8.6	0.263376764	(40,545)	25	8.6	<0.259	>2.8E+06
P1508+55	HP1508	15	08	04	55	42	56	91.3	52.3	0.73967787630	40,626	10.3	19.60	0.433	4.7E+06
P1530−53	MP1530	15	30	23	−53	30		325.7	1.9	1.368852	40,553	25	20		
P1541+09	AP1541+09	15	41	14	09	38	43	17.8	45.8	0.7484483	(41,347)	63	35.0		
P1556−44	MP1556	15	56	12	−44	31	30	334.5	6.4	0.25705	(41,347)				
P1604−00	MP1604	16	04	38	−00	24	41	10.7	35.5	0.42181607579	41,005	15	10.72	0.0265	4.4E+07
P1642−03	PSR1642−03	16	42	25	−03	12	30	14.1	26.1	0.38768877965	40,622	3.7	35.71	0.154	6.9E+06
P1700−18	MP1700−18	17	00	56	−18			4.0	14.0	0.802	(41,347)		<40		
P1706−16	MP1706	17	06	33	−16	37	21	5.8	13.7	0.65305045437	40,622	12	24.99	0.550	3.3E+06
P1717−29	PSR1717−29	17	17	10	−29	32		356.5	4.3	0.620449	41,554	(32)	45		
P1718−32	PSR1718−32	17	18	40	−32	05		354.5	2.5	0.477154	41,554	(35)	120		
P1727−47	MP1727	17	27	50	−47	42	18	342.6	−7.6	0.829683	40,553	30	121		
P1747−46	MP1747	17	47	56	−46	56	12	345.0	−10.2	0.742349	40,553	20	40		
P1749−28	PSR1749−28	17	49	49	−28	06	00	1.5	−1.0	0.562553168299	40,127	6	50.88	0.705	2.2E+06
P1818−04	MP1818	18	18	14	−04	29	03	25.5	4.7	0.59807262183	40,622	10.3	84.48	0.545	3.0E+06
P1819−22	PSR1819−22	18	19	50	−22	53		9.4	−4.3	1.874398	41,554	(76)	140		
P1822−09	PSR1822−09	18	22	40	−09	36		21.4	1.3	0.768948	41,554	11	19.3		
P1826−17	PSR1826−17	18	26	15	−17	54		14.6	−3.3	0.307128	41,554	(59)	207		
P1831−03	PSR1831−03	18	31	00	−03	40		27.7	2.3	0.686675	41,554	(32)	235		

(续表)

名称	脉冲星	α (1950.0) h	m	s	δ (1950.0) °	′	″	l^{II} (°)	b^{II} (°)	周期 P (1秒)	历元 (J.D.24+)	半宽度 (毫秒)	$\int N_e dl$ (秒差距·厘米$^{-3}$)	dP/dt (10^{-9}秒/日)	$P/(dP/dt)$ (年)
P1845−01	OP1845−01	18	45		−01	27		31.3	0.2	0.659475	(41,192)	(80)	90		
P1845−04	JP1845	18	45	10	−04	05	32	28.9	−1.0	0.59773452	40,998	20	141.9		
P1846−06	PSR1846−06	18	46	07	−06	43		26.7	−2.4	1.451323	41,554	(38)	152		
P1857−26	MP1857	18	57	44	−26	04	49	10.5	−13.5	0.612204	41,026	25	35		
P1858+03	JP1858	18	58	40	03	27	02	37.2	−0.6	0.655444	40,754	(170)	402		
P1900−06	PSR1900−06	19	00	30	−06	35		28.5	−5.6	0.431885	41,554	(14)	180		
P1907+02	PSR1907+02	19	07	20	02	56		37.7	−2.7	0.494914	41,554	(11)	190		
P1911−04	MP1911	19	11	15	−04	45	59	31.3	−7.1	0.82593366503	(40,624)	8.0	89.41	0.351	6.5E+06
P1915+13	OP1915+13	19	15	25	13	50	00	48.3	0.6	0.1946255	41,274	15	94		
P1917+00	PSR1917+00	19	17	15	00	18		36.5	−6.1	1.272254	41,554	(27)	85		
P1919+21	CP1919	19	19	36	21	47	17	55.8	3.5	1.33730115212	40,690	31.2	12.43	0.116	3.2E+07
P1929+10	PSR1929+10	19	29	52	10	53	03	47.4	−3.9	0.22651703833	40,625	5.3	3.176	0.100	6.2E+06
P1933+16	JP1933+16	19	33	32	16	09	58	52.4	−2.1	0.35873542051	40,690	8.0	158.53	0.519	1.9E+06
P1944+17	MP1944	19	44	38	17	58	44	55.3	−3.5	0.4406179	(40,618)	30	16.3		
P1946+35	JP1946	19	46	35	35	28	36	70.6	5.0	0.717306	40,659	21	129.1		
P1953+29	JP1953	19	53	00	29	15	03	66.0	0.7	0.426676	40,754	13	20		
P2002+30	JP2002	20	02	35	30			67.7	−0.7	2.111206	40,756	15	233		
P2016+28	AP2016+28	20	16	00	28	30	31	68.1	−4.0	0.55795339053	40,689	13.9	14.16	0.0129	1.2E+08
P2020+28	PSR2020+28	20	20	33	28	44	30	68.9	−4.7	0.343400790	41,348	6.7	24.6		
P2021+51	JP2021	20	21	25	51	45	08	87.9	8.4	0.52919531221	40,626	6.6	22.580	0.263	5.5E+06
P2045−16	PSR2045−16	20	45	47	−16	27	48	30.5	−33.1	1.96156682076	40,695	79.0	11.51	0.945	5.7E+06
P2111+46	JP2111	21	11	33	46	31	42	89.0	−1.3	1.01468444509	41,006	29	141.4	0.0620	4.5E+06
P2148+63	PSR2148+63	21	48	00	63	10		104.1	7.4	0.380142	41,554	(29)	125		
P2154+40	PSR2154+40	21	54	56	40	02	30	90.5	−11.4	1.52526334	41,532	52	71.0		
P2217+47	PSR2217+47	22	17	46	47	39	48	98.4	−7.6	0.53846737844	40,624	7.9	43.52	0.239	6.2E+06
P2256+58	PSR2256+58	22	56	30	58	50		108.8	−0.7	0.368241	41,554	(14)	148		
P2303+30	AP2303+30	23	03	34	30	43	49	97.7	−26.7	1.575884410	41,006	26.0	49.9	0.2514	1.7E+07
P2305+55	PSR2305+55	23	05	00	55	26		108.6	−4.2	0.475068	41,554	(27)	45		
P2319+60	JP2319	23	19	42	60	00		112.0	−0.6	2.25648387	41,536	65	96		

$$Q=\frac{W(\nu_p)}{L^2S_p}\approx\frac{4\pi e^4N_eL}{3m^2c^3v_{热}},\tag{1-286}$$

式中 L 是散射区的线长度，S_p 是等离子体波的能通量密度。如果发射发生于频率范围 $\Delta\nu$、截面积 A 并且进入立体角 $\Delta\Omega$，则利用黑体亮度的瑞利-琼斯定律所确定的有效温度 T_b 就由下式给出：

$$T_b=\frac{c^2W(\nu_p)e^{-\tau}}{2\nu_p^2k\Delta\nu\Delta\Omega A},\tag{1-287}$$

式中 τ 表示观测者与源之间的光学深度。

由电子热运动引起的空间电荷起伏而所致的组合散射，它能产生频率为 $2\nu_p$ 的电磁辐射，只要 $v_\varphi\ll c/\sqrt{3}$，其总能通量 $W(2\nu_p)$ 就由下式给出(Zheleznyakov, 1970)：

$$W(2\nu_p)\approx\frac{4\sqrt{3}}{5}\frac{e^4N_eV}{m^2c^3}\frac{kT}{mc^2}E_0^2,\tag{1-288}$$

这种辐射在与等离子体波垂直的方向强烈地成束状，并且其强度的角谱 $I(\theta)$ 由下式给出(Smerd, Wild 和 Sheridan, 1962)：

$$I(\theta)\propto\sin^3\theta[1+3(v_0/c)^2-2\sqrt{3}(v_0/c)\cos\theta],\tag{1-289}$$

式中 θ 是与等离子体波运动方向的夹角，v_0 是激发等离子体波的粒子流的平均速度。

对于密度为 $N_s\ll N_e$ 和速度为 $u\gg v_\varphi$ 的粒子流，其中 v_φ 是等离子体的相速度，稳态等离子体波的振幅由下式给出(Bohm 和 Gross, 1949)：

$$E_0=\frac{m}{2eK^3}\left\{\frac{16}{3}v_\varphi(2\pi\nu_{ps})^2\frac{\nu_s}{\nu}\left(\frac{df(u)}{du}\right)_{u=v_\varphi}\right\}^2\approx\frac{\pi m\nu_p}{ev_0}\left\{\frac{16}{3}\frac{v_0^3m}{kT_s}\left(\frac{N_s}{N_e}\right)^2\right\}^2,\tag{1-290}$$

式中 $K=2\pi\nu_p/v_\varphi$，等离子体频率 $\nu_p=[e^2N_e/\pi m]^{1/2}$，粒子流的等离子体频率 $\nu_{ps}=[e^2N_s/\pi m]^{1/2}$，粒子流的碰撞频率 ν_s 与等离子体的碰撞频率 ν 的关系是 $\nu_s/\nu\approx N_s/N_e$，而粒子流的速度分布 $f(u)$ 假定是具有平均值为 $v_0\approx v_\varphi$ 及 $(df(u)/du)_{u=v_\varphi}\approx v_{热}^{-2}$ 的麦克斯韦分布。

与热韧致辐射的情况类似，受到离子散射的电子加速运动的结果也可以产生纵波(参看 Bekefi, 1966)。在此情况下，纵波的频率同样集中在 ν_p附近，但在这个频率范围内，体发射率与热韧致辐射的体发射率相比，大一个因子 $(c/v_{热})^2$。

如果把一个速度为 u 的带电粒子射入相速度为 $v_\varphi(v_\varphi<u)$ 的等离子体中，则粒子就会激发纵波，在某种意义上类似于光学切伦科夫效应(Cerenkov, 1937)。光学切伦科夫辐射是集中在以带电粒子轨迹为中心的圆锥内，并且辐射传播方向与粒子运动方向之间的夹角 ψ 由下式给出：

$$\cos\psi=\left[\frac{c}{un_\nu}\right],\tag{1-291}$$

式中 n_ν 是介质的折射率。在光学情况中，每单位频率间隔每单位介质长度所辐射的总能量由下式给出：

$$I_\nu=\frac{2\pi e^2\nu}{c^2}\left[1-\frac{c^2}{n_\nu^2u^2}\right],\tag{1-292}$$

当然，式中 $u>c/n_\nu$。

科恩(Cohen, 1961)已经算出在等离子体中的一个电子所产生的切伦科夫辐射频谱及角谱。辐射相对于带电粒子的轨迹是对称的。设 θ 表示与此轨迹的夹角，则所辐射的能量的角谱为：

$$I_\theta=6.3\times10^5\frac{e^2\nu_p^2}{u^2}\frac{\cos\theta}{\cos^2\theta-(v_{热}/u)^2}\ 尔格\cdot弧度^{-2}\cdot厘米^{-1}。\tag{1-293}$$

这里 u 是入射电子的速度，$v_{热}=(3kT_e/m)^{1/2}$，其中 T_e 是电子温度。每单位频率间隔每单位长度内电子辐射的总能量为：

$$\begin{aligned}I_\nu &= 2\pi\frac{e^2\nu_p}{u^2}\cdot\frac{(\nu/\nu_p)}{(\nu/\nu_p)^2-1}\quad(当\ \nu>\nu_c);\\ I_\nu &= 0\quad(当\ \nu<\nu_c),\end{aligned}\tag{1-294}$$

式中低频截止频率是：

$$\nu_c=\nu[1-(v_{热}/u)^2]^{-1/2}。\tag{1-295}$$

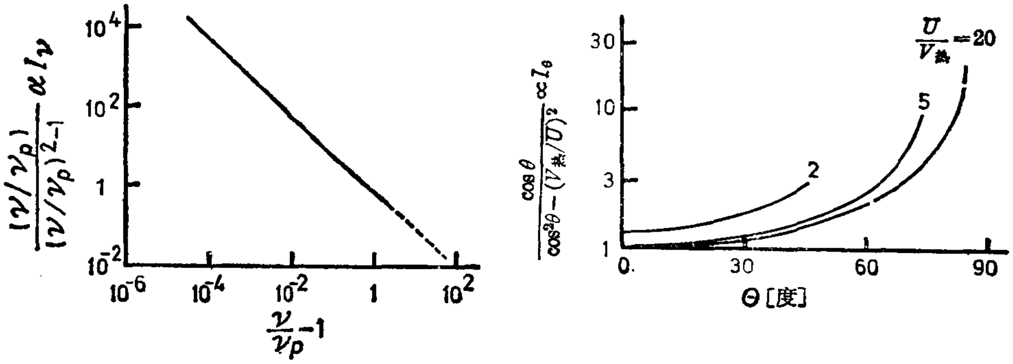


图 6 等离子体中单个带电粒子的切伦科夫辐射的强度-角度谱 I_θ 及强度-频率谱 I_ν(取自 Cohen, 1961)。U 是电子速度，热速度是 $V_{热}=(3kT/m)^{1/2}$，等离子体频率是 $\nu_p=(e^2N_e/\pi m)^{1/2}$，其中 T 是温度，N_e 是电子密度。辐射相对于电子轨道是对称的，θ 是辐射方向与轨道的夹角。I_θ 及 I_ν 分别由(1-293)及(1-294)式给出。频谱的低频截止频率为 $\nu_c=\nu_p[1-(V_{热}/U)^2]^{-1/2}$，而在虚线区，朗道阻尼抑制了波的传播。切伦科夫角谱也出现大角度截止，这是由于朗道阻尼所引起的结果

图 6 为 I_ν 的频谱形式及 I_θ 的角谱形式的曲线。假定高频截止频率由于朗道阻尼($v_\varphi\geqslant\sqrt{2}\,v_{热}$)限于 $\sqrt{2}\,\omega_p$，并且每单位路径长度的总辐射能量为：

$$\begin{aligned}W&=2\pi^2\frac{e^2\nu_p^2}{u^2}\ln\left[\left(\frac{u}{v_{热}}\right)^2-1\right]\\&={}^*5.067074\times10^{-39}\nu_p^2\left(\frac{c}{u}\right)^2\ln\left[\left(\frac{u}{v_{热}}\right)^2-1\right]尔格\cdot厘米^{-1}。\end{aligned}\tag{1-296}$$

1.85. 谐振子的散射

由谐平面波所策动的一个谐振子的运动方程为：

$$m\ddot{x}+m(2\pi\nu_0)^2x=eE_0\exp(i2\pi\nu t)-m\gamma_{经典}\dot{x},\tag{1-297}$$

式中"$\cdot$"和"$\cdot\cdot$"分别表示对时间的一阶和二阶导数，x 是电场矢量的位移，E_0 及 ν 分别是电场的强度及频率，m 及 e 分别是振子的质量及电荷，ν_0 是振子的共振频率，而经典阻尼常数为：

$$\gamma_{经典}=\frac{8\pi^2e^2\nu_0^2}{3mc^3}={}^*2.473883\times10^{-22}\nu_0^2\ 秒^{-1}。\tag{1-298}$$

上述运动方程具有稳态解：

$$x(t)=\frac{e}{4\pi^2m}\mathscr{R}\left[\frac{E_0\exp[i2\pi\nu t]}{(\nu^2-\nu_0^2)+i(\gamma_{经典}\nu/2\pi)}\right],\tag{1-299}$$

式中 $\mathscr{R}$ 表示取方括号内的项的实部。

由(1-109)式每单位时间每单位立体角 $d\Omega$ 辐射的总能量为:

$$\frac{dP}{d\Omega}=\frac{3}{8\pi}\sigma_s cU\sin^2\theta, \tag{1-300}$$

式中 $U=E_0^2/4\pi$ 是入射场的能量密度，θ 是 x 轴与观测方向间的夹角，而散射截面 σ_s 由下式给出：

$$\begin{aligned}\sigma_s&=\frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\frac{\nu^4}{(\nu^2-\nu_0^2)^2+(\gamma_{经典}^2\nu^2/4\pi^2)}\\&={}^*6.652448\times10^{-25}\frac{\nu^4}{(\nu^2-\nu_0^2)^2+(\gamma_{经典}^2\nu^2/4\pi^2)}\ 厘米^2。\end{aligned} \tag{1-301}$$

类似地，每单位时间在所有方向辐射的总能量 P 由(1-110)式得出：

$$P=\sigma_s cU。 \tag{1-302}$$

将 σ_s 对所有频率积分而得出总散射截面为：

$$\sigma_{总}=\frac{\pi e^2}{mc}={}^*0.02654007, \tag{1-303}$$

一个量子力学振子的相应结果为(Ladenburg, 1921; Kramers, 1924)：

$$\sigma_{总}=\frac{\pi e^2}{mc}f_{nm}, \tag{1-304}$$

式中 f_{nm} 是振子的 m-n 跃迁强度。

1.36. 束缚电子的瑞利散射

当频率为 ν 的平面波入射到特征跃迁频率 ν_0 远大于 ν 的原子或分子上时，每单位时间每单位角辐射的总能量 $dP/d\Omega$ 及每单位时间在所有方向辐射的总能量 P 由(1-300)式及(1-302)式给出，其中

$$\begin{aligned}\sigma_s=\sigma_R&=\frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\frac{\nu^4}{(\nu^2-\nu_0^2)^2}\quad(当\ \nu<\nu_0)\\&\approx{}^*6.652448\times10^{-25}\left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^4厘米^2\quad(当\ \nu\ll\nu_0)。\end{aligned} \tag{1-305}$$

这个结果是假定当 $\nu\ll\nu_0$ 时 $\nu_0\ll\nu_{经典}$，由(1-301)式得出的。它是由瑞利(Rayleigh, 1899)首先得出的。

瑞利散射截面的相应的量子力学表达式是(Ladenburg, 1921; Kramers, 1924)：

$$\sigma_R={}^*6.652448\times10^{-25}\left(\sum_k f_{1k}\left[\frac{\nu_{1k}^2}{\nu^2}-1\right]^{-1}\right)^2厘米^2, \tag{1-306}$$

式中 f_{1k} 是振子的 $1\to k$ 跃迁强度。

由(1-86)式，密度为 N 的气体的折射率是：

$$n=\left[1-\frac{4\pi Ne^2}{4\pi^2m(\nu_0^2-\nu^2)}\right]^{1/2}。 \tag{1-307}$$

把(1-307)式代入(1-305)式，我们得：

$$\sigma_R=\frac{8\pi^3}{3}\left(\frac{\nu}{c}\right)^4\left(\frac{n^2-1}{N}\right)^2\approx\frac{128\pi^5\alpha^2}{3\lambda^4}, \tag{1-308}$$

式中 λ 是入射辐射的波长，α 是极化率。

1.37. 自由电子的汤姆孙散射

一个自由电子所产生的在单位时间内、单位立体角中辐射的总能量为(Larmor, 1897,

(1-109)式：

$$\frac{dP}{d\Omega}=\frac{e^2}{4\pi c^3}\dot{v}^2\sin^2\theta, \tag{1-309}$$

式中 $\dot{v}$ 是加速度，θ 是加速度方向与观测方向之间的夹角。按照洛伦兹力方程(1-52)式，一个强度为 E_0 的入射电场使电子获得一个加速度 $\dot{v}=eE_0/m$。代入(1-309)式，我们得到：

$$\frac{dP}{d\Omega}=\frac{3}{8\pi}\sigma_T cU\sin^2\theta, \tag{1-310}$$

式中 $U=E_0^2/4\pi$ 是入射平面波的能量密度，而汤姆孙截面(Thomson, 1903)由下式给出：

$$\sigma_T=\frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2={}^*6.652448\times10^{-25}\text{ 厘米}^2\quad(\text{当 }\nu<10^{20}\text{ 赫})。 \tag{1-311}$$

这个结果能够由(1-301)式取 $\nu_0=0$ 而得出。每单位时间在所有方向上所辐射的总能量 P 是由(1-310)式对所有角度积分得出：

$$P=\sigma_T cU。 \tag{1-312}$$

当光子能量 $h\nu$ 大于或近于 mc^2 或 $\nu\gtrsim10^{20}$ 赫时，自由电子的修正散射截面为克莱因-仁科散射截面(Klein 和 Nishina, 1929)：

$$\sigma_{KN}=\frac{3}{4}\sigma_T\left\{\frac{1+\alpha}{\alpha^2}\left[\frac{2(1+\alpha)}{1+2\alpha}-\frac{1}{\alpha}\ln(1+2\alpha)\right]+\frac{1}{2\alpha}\ln(1+2\alpha)-\frac{1+3\alpha}{(1+2\alpha)^2}\right\}, \tag{1-313}$$

式中 $\alpha=h\nu/(mc^2)$。就低和高的光子能量而言，该方程可化为：

$$\sigma_{KN}=\sigma_T\left\{1-\frac{2h\nu}{mc^2}+\frac{26}{5}\left(\frac{h\nu}{mc^2}\right)^2+\cdots\right\}\quad(\text{当 }\nu\gg10^{20}\text{ 赫}) \tag{1-314}$$

$$=\frac{3}{8}\sigma_T\left(\frac{mc^2}{h\nu}\right)\left[\ln\left(\frac{2h\nu}{mc^2}\right)+\frac{1}{2}\right]\quad(\text{当 }\nu\gg10^{20}\text{ 赫}) \tag{1-315}$$

$$=\frac{{}^*3.429620\times10^{-5}}{\nu}\left[\ln({}^*1.618659\times10^{-20}\nu)+\frac{1}{2}\right]\text{ 厘米}^2\quad(\text{当 }\nu\gg10^{20}\text{ 赫})。$$

在这种情况下，每单位时间辐射的总能量由下式给出：

$$P=\sigma_{KN}cU, \tag{1-316}$$

式中 U 是入射波的能量密度。不过，散射辐射角分布的普遍公式为：

$$I=\left(\frac{r_0}{R}\right)^2\frac{\sin^2\psi I_0}{[1+\alpha(1-\cos\theta)]^3}\left\{1+\frac{\alpha^2(1-\cos\theta)^2}{2\sin^2\psi[1+\alpha(1-\cos\theta)]}\right\}, \tag{1-317}$$

式中 I 及 I_0 分别是入射强度和被散射的辐射强度，$r_0=e^2/mc^2={}^*2.8179380\times10^{-13}$ 厘米是经典电子半径，R 是从自由电子至观测点的距离，ψ 及 θ 分别是入射波的电矢量和入射波传播方向与观测方向间的夹角。

在存在强度为 H 的磁场的情况下，当光子频率 ν 变到小于回转频率 $\nu_H\approx2\times10^6H$ 赫时，汤姆孙散射截面低于(1-311)式所给出的经典值。当 $\nu\ll\nu_H$ 时，减小因子粗略地为 $(\nu/\nu_H)^2$，卡纽托等(Canuto, Lodenquai 和 Ruderman, 1971)作了详尽讨论。

1.38. 自由电子的康普顿散射与逆康普顿辐射

设能量为 $h\nu_1$ 的光子与一个静止电子碰撞。若入射光子能量足够大，则被散射的光子的频率 ν_2 将比所观测到的频率 ν_1 小。康普顿(Compton, 1923)首先观测到并且解释了这种

效应，故以康普顿的名字命名。如果光子偏转一个角度 φ，并设电子以速度 v 相对于光子原有的轨迹为 θ 的方向反冲，则能量守恒及动量守恒的相对论性方程是：

$$h\nu_1=h\nu_2+mc^2\left\{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}-1\right\},$$

$$\frac{h\nu_1}{c}=\frac{h\nu_2}{c}\cos\varphi+\frac{mv\cos\theta}{\left[1-\frac{v^2}{c^2}\right]^{1/2}}, \tag{1-318}$$

$$\frac{h\nu_2}{c}\sin\varphi=\frac{mv}{\left[1-\frac{v^2}{c^2}\right]^{1/2}}\sin\theta。$$

由(1-318)式可见：

$$\nu_2=\nu_1\left[1+\frac{h\nu_1}{mc^2}(1-\cos\varphi)\right]^{-1}; \tag{1-319}$$

而波长的增量为：

$$\Delta\lambda=\frac{2h}{mc}\sin^2\frac{\varphi}{2}={}^*4.8526178\times10^{-10}\sin^2\frac{\varphi}{2}\text{ 厘米},$$

式中 φ 是入射光子的偏转角。

这些公式是由假定电子是静止而得出的。设 α 是入射光子与一个运动电子的轨迹间的夹角，电子的总能量是 $E=\gamma mc^2$，则在电子的静止参照系中光子的能量是：

$$h\nu_1=\gamma h\nu(1+\beta\cos\alpha),$$

式中 $h\nu$ 是光子在自身参照系中的能量，对于一个速度为 v 的电子，$\beta=v/c$。当 β 很大时，我们得到散射频率：

$$\nu_2\approx\gamma^2\nu\quad(\text{当 }\gamma h\nu\ll mc^2)。 \tag{1-320}$$

此时散射截面是(Feenberg 和 Primakoff, 1948; Donahue, 1951)：

$$\sigma_s\approx\gamma^2\sigma_T\quad(\text{当 }\gamma h\nu\ll mc^2), \tag{1-321}$$

式中 $\sigma_T={}^*6.652448\times10^{-25}$ 厘米^2，由一个通过辐射能量密度 U 的电子在单位时间内所辐射的总能量 P 为：

$$P=\gamma^2\sigma_TcU\quad(\text{当 }\gamma h\nu\ll mc^2)。 \tag{1-322}$$

当电子速度很高，并且 $\gamma h\nu\gg mc^2$ 时，所有的电子能量 γmc^2 不管入射光子频率如何，都会转变为散射辐射。所以，

$$\nu_2\approx\gamma mc^2/h\quad(\text{当 }\gamma h\nu\gg mc^2), \tag{1-323}$$

并且利用克莱因-仁科截面：

$$\sigma_s\approx\frac{3}{8}\sigma_T\left(\frac{mc^2}{\gamma h\nu}\right)\left[\ln\left(\frac{2\gamma h\nu}{mc^2}\right)\right]\quad(\text{当 }\gamma h\nu\gg mc^2), \tag{1-324}$$

这样就得到一个通过辐射能量密度 U 的电子在单位时间里所辐射的总能量为：

$$P=\frac{3}{8}\sigma_TcU\left[\frac{mc^2}{\gamma h\nu}\right]\ln\left(\frac{2\gamma h\nu}{mc^2}\right)\quad(\text{当 }\gamma h\nu\gg mc^2)。 \tag{1-325}$$

相对论性粒子的康普顿散射在第四章中要作进一步讨论，在那里还注意到了象电子偶所产生的这类重要的其他过程。费尔顿等(Felten 和 Morrison, 1963, 1966; Goldreich 和 Morrison, 1964; Gould 和 Schréder, 1966)给出了这些散射公式对天体的应用。布卢门撒尔等(Blumenthal 和Gould, 1970)评述了有关高能粒子的散射问题。

为了维持在逆康普顿损耗下的同步加速辐射，在电子正在发出辐射的区内，磁能密度必须超过局部辐射能量密度。对于一个光度为 L、半径为 R、均匀的、各向同性的源来说，这个

条件就意味着(Felten 和 Morrison, 1966; Hoyle, Burbidge 和 Sargent, 1966)

$$H^2 > \frac{8L}{R^2 c}, \tag{1-326}$$

式中 H 是磁场强度，源的光度 $L \approx 4\pi R^2 \nu S/\theta^2$，其中 ν 是频率，S 是通量密度，θ 是源的张角大小。把(1-197)式用于(1-326)式，这就意味着康普顿效应将会在具有另外的一个最大通量密度的频率 ν_{max}：

$$\nu_{max} \gtrsim 10^{13} H \text{ 赫} \tag{1-327}$$

的那些源中出现。对于那些具有高截止频率 ν_c 和最大有效亮度温度 T_{max} 的射电源，由(1-121)式可知，亮度 $B \approx 2\nu_c^2 kT/c^2$。利用(1-154)式和 $E \approx kT$，我们得 $H \approx 10^{-19}\nu_c(kT)^{-2}$，并把这些 B 和 H 的值代入(1-326)式，我们得(Kellermann 和Pauliny-Toth, 1969)：

$$10^{-72} T_{max}^5 \nu_c < 1。 \tag{1-328}$$

一般 $\nu_c \approx 10^{11}$ 赫，所以，一个非相干同步加速辐射体的 $T_{max} < 10^{12}$ 开。

由(1-327)式及(1-197)式可知，对于一个正在遭到逆康普顿辐射的猝灭的源，可观测到的最小张角的大小 θ_{IC} 由下式给出：

$$\theta_{IC} \approx 10^{-3} S^{1/2} \nu^{-1} \text{ 角秒}, \tag{1-329}$$

式中流量密度 S 以央(斯基)为单位，频率 ν 以京赫为单位。为了比较起见，由(1-197)式所给出的同步加速自吸收角 θ_{SA} 为：

$$\theta_{SA} \approx 10^{-3} S^{1/2} \nu^{-5/4} \text{ 角秒}, \tag{1-330}$$

式中磁场已假定为 10^{-4} 高斯，而式中的单位与(1-329)式所用单位相同。按照在时标 τ 小时中流量的变化所推断出的角大小(Rees, 1966)：

$$\theta \lesssim 10^{-9} \tau \gamma z^{-1} \text{ 角秒}, \tag{1-331}$$

式中对于一个以速度 v 膨胀的源，$\gamma = [1-(v/c)^2]^{-1/2}$，$z$ 是红移，源距离 $D = cz/H_0$，其中哈勃常数 $H_0 = 75$ 公里·秒$^{-1}$·兆秒差距$^{-1}$。这些角大小也可以与星际散射造成的值 $\theta_{\text{散射}}$ 作比较，由(1-385)式以及兰氏等(Lang, 1971; Harris, Zeissig 和 Lovelace, 1970)的测量得出：

$$\theta_{\text{散射}} \approx 25 D^{1/2} \nu^{-2} \text{ 角秒}, \tag{1-332}$$

式中 D 是以秒差距(1 秒差距 = *3.085677 56 × 10^{18} 厘米)为单位的源的距离，ν 是以兆赫为单位的频率。

1.39. 小球的瑞利散射

令一个在 x 方向上线偏振并且在 z 方向传播的谐平面波入射到一个半径为 a 的电介质的球上。$a < 0.05\lambda_0$(其中 λ_0是入射辐射的波长)的小球，将与平面波的电场同步地沿 x 轴方向振荡。所以这个球就象一个电偶极子一样会发出辐射，它的偶极矩 $d(t)$ 由(1-25)式及(1-30)式给出：

$$d(t) = a^3\left(\frac{n^2-1}{n^2+2}\right)E_0(t) \approx a^3\left[\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_2+2\varepsilon_1}\right]E_0(t), \tag{1-333}$$

式中 $E_0(t)$是平面波的电场矢量的强度，ε_2 及 ε_1 分别是球及周围介质的介电常数，而相对折射率是 $n = [\varepsilon_2\mu_2/(\varepsilon_1\mu_1)]^{1/2}$，其中 μ 是磁导率。利用以球心为原点的球面坐标系，由(1-113)式可得出每单位时间、每单位立体角辐射的总能量 $dP/d\Omega$：

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{4\pi^3 c a^6}{\lambda_0^4}\left(\frac{n^2-1}{n^2+2}\right)^2 \sin^2\theta E_0^2(t), \tag{1-334}$$

式中 θ 是 x 轴与至观测点的径向矢量之间的夹角。由(1-114)式，每单位时间在所有方向辐射的总能量为：

$$P=\sigma_s cU, \tag{1-335}$$

式中 $U=E_0^2(t)/4\pi$ 是平面波的能量密度，而散射截面 σ_s 由下式给出(Rayleigh, 1871)：

$$\sigma_s=\frac{128\pi^5 a^6}{3\lambda_0^4}\left(\frac{n^2-1}{n^2+2}\right)^2 \qquad (\text{当 } a<0.05\lambda_0)。 \tag{1-336}$$

散射的效率因子 Q_s 定义为 σ_s 与几何截面之比：

$$Q_s=\frac{\sigma_s}{\pi a^2}=\frac{128\pi^4 a^4}{3\lambda_0^4}\left(\frac{n^2-1}{n^2+2}\right)^2。 \tag{1-337}$$

由(1-113)式，对于一个单位强度的入射波来说，散射辐射的强度为：

$$I=\frac{16\pi^4 a^6}{R^2\lambda_0^4}\left(\frac{n^2-1}{n^2+2}\right)^2 \sin^2\theta, \tag{1-338}$$

式中 R 是从球到观测点的距离。

只要入射平面波是线偏振的，则散射辐射同样是线偏振的。当入射波并不偏振时，入射波及散射波两者都可以看作是两个线偏振波的迭加。当把观测平面定义为入射波传播方向和观测方向两者所处的平面时，则散射光的强度可以分成平行和垂直于该平面的两个分量 $I_{/\!/}$ 和 $I_\perp$。对于单位强度的非偏振入射辐射来说，散射强度为：

$$I_\perp=\frac{16\pi^4 a^6}{R^2\lambda_0^4}\left(\frac{n^2-1}{n^2+2}\right)^2; \tag{1-339}$$

$$I_{/\!/}=\frac{16\pi^4 a^6}{R^2\lambda_0^4}\left(\frac{n^2-1}{n^2+2}\right)^2\cos^2\theta, \tag{1-340}$$

而总散射强度为：

$$I=\frac{I_\perp+I_{/\!/}}{2}=\frac{8\pi^4 a^6}{R^2\lambda_0^4}\left(\frac{n^2-1}{n^2+2}\right)^2(1+\cos^2\theta), \tag{1-341}$$

式中 θ 是入射波传播方向与观测方向之间的夹角。

即使在入射辐射是非偏振波的情况下，散射辐射也是部分地偏振的，其偏振度 P 定义为：

$$P=\frac{I_\perp-I_{/\!/}}{I_\perp+I_{/\!/}}=\frac{\sin^2\theta}{1+\cos^2\theta}, \tag{1-342}$$

式中 θ 也是传播方向与观测之间的夹角。在光波段实际观测到的则是由下式给出的星等差 Δm_p:

$$\Delta m_p=2.50\log\frac{I_\perp}{I_{/\!/}}\approx 2.172P \quad (\text{当 } P\ll 1), \tag{1-343}$$

式中 $I_\perp$ 及 $I_{/\!/}$ 分别是观测到的强度最大值及最小值。

当散射球不是一个理想的电介质而是次导体时，则入射辐射除了被散射外还会部分地被吸收。设 σ 是电介媒质中的导电球的电导率，则球的折射率 m_2 由下式给出：

$$m_2=\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}+i\,\frac{2\pi\sigma}{\omega}\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \quad (\text{当 } \sigma\ll\omega\varepsilon); \tag{1-344}$$

$$m_2=\left(\frac{2\pi\mu_2\sigma}{\omega}\right)^{1/2}(1+i) \quad (\text{当 } \sigma\gg\omega\varepsilon), \tag{1-345}$$

式中 ε_2 及 μ_2 分别是球的介电常数及磁导率，ω 是谐平面波的角频率。当周围空间是理想的电介质时，其折射率是 $m_1=\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}$，其中 ε_1 及 μ_1 分别是介质的介电常数和磁导率。对于一个不良导电球来说，相对介电常数则由下式给出：

$$m=\frac{m_2}{m_1}=\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)^{1/2}+i\frac{2\pi\sigma}{\omega\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}} \tag{1-346}$$

或

$$m^2\approx\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}+i\frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon_1}。 \tag{1-347}$$

由1.41节所讨论的米氏散射理论的极限情况直接得出，散射截面为：

$$\sigma_s=\frac{128\pi^5a^6}{3\lambda_0^4}\mathscr{R}\left(\frac{m^2-1}{m^2+2}\right)^2 \quad (当\ a<0.05\lambda_0), \tag{1-348}$$

式中 $\mathscr{R}$ 表示取圆括号内的项的实部。

1.40. 恒星的消光及红化

一个半径为 a 的球的总消光截面 σ_e 由下式给出(Feenberg, 1932; van de Hulst, 1949, 1957)：

$$\sigma_e=\sigma_s+\sigma_a=-\frac{8\pi^2a^3}{\lambda_0}\mathscr{I}\left(\frac{m^2-1}{m^2+2}\right) \quad (当\ a<0.05\lambda_0), \tag{1-349}$$

式中 m 是复数折射率，σ_s 由(1-348)式给出，$\mathscr{I}$ 表示在圆括号内的项的虚部，σ_a 是球吸收辐射的截面。消光截面是每单位时间所散射和吸收的总辐射能与每单位时间、每单位面积所入射的辐射能之比。消光系数定义为 $Q_e=\sigma_e/(\pi a^2)$，反照率 A 定义为 $A=Q_s/Q_e$。对于一个具有高电导率的全反射球，

$$Q_s\approx Q_e\approx\frac{10}{3}\left(\frac{2\pi a}{\lambda_0}\right)^4 \quad (当\ a<0.05\lambda_0), \tag{1-350}$$

而对于一个非导电球则 $\sigma_e\approx\sigma_s$，其中 σ_s 由(1-348)式给出。

光学天文工作者观测同一类型的邻近与遥远的恒星之间的星等差 Δm。这种星等差由下式给出：

$$\Delta m=1.086N_c\pi a^2Q_e=1.086N_c\sigma_e\approx1.086N\sigma_eD。 \tag{1-351}$$

式中 N_c 是散射球的总的柱密度，N 是散射体的体密度，D 是天体的距离。特朗普勒(Trumpler, 1930)首先发现星际吸收的存在。他发现银河疏散星团显示出视角直径随距离有规则地增加，若平均值 $\Delta m/D=0.79$ 星等/千秒差距，则可解释此现象。

惠特福德(Whitford, 1958)首先给出星际消光随波长而变化，他发现遥远的恒星与同一类型的邻近恒星比对显然是红化了。一条星际红化曲线通常是用归一化色余项表示如下：

$$E(\lambda)=\frac{\Delta m(\lambda)-\Delta m(\lambda_1)}{\Delta m(\lambda_1)-\Delta m(\lambda_2)}=\frac{Q_e(\lambda)-Q_e(\lambda_1)}{Q_e(\lambda_2)-Q_e(\lambda_1)}, \tag{1-352}$$

式中 λ 是观测波长，λ_1 及 λ_2 是参考波长，$\Delta m(\lambda)=m_1(\lambda)-m_2(\lambda)$ 是红化与未红化恒星之间的星等差。他发现在大部分光学频谱范围内 $E(\lambda)$ 随 λ^{-1} 而变化。第五章给出了所观测到的红化曲线和由所观测到的星等作红化修正以得出真实星等。

1.41. 任意大小的均匀球的米氏散射

米氏(Mie, 1908)及德拜(Debye, 1909)根据麦克斯韦方程组推导出了半径[1]为 a 的一个球的散射公式。当观测平面定义为入射波传播方向和观测方向两者所处的平面时，散射光的强度可以分成平行和垂直于该平面的两个分量 $I_\parallel$ 和 $I_\perp$。对于单位强度的非偏振入射

1) 原文误为直径。——译者注

辐射来说，米氏得出的散射强度为(Born 和 Wolf, 1970)：

$$I_{\perp}=\frac{\lambda^2}{4\pi^2R^2}|S_1|^2\sin^2\varphi;$$
$$I_{/\!/}=\frac{\lambda^2}{4\pi^2R^2}|S_2|^2\cos^2\varphi, \tag{1-353}$$

式中 R 是到球的距离，以及

$$S_1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}\{a_n\pi_n(\cos\theta)+b_n\tau_n(\cos\theta)\};$$
$$S_2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}\{a_n\tau_n(\cos\theta)+b_n\pi_n(\cos\theta)\},$$
$$a_n=\frac{\psi_n(\alpha)\psi_n'(\beta)-m\psi_n(\beta)\psi_n'(\alpha)}{\zeta_n(\alpha)\psi_n'(\beta)-m\psi_n(\beta)\zeta_n'(\alpha)};$$
$$b_n=\frac{m\psi_n(\alpha)\psi_n'(\beta)-\psi_n(\beta)\psi_n'(\alpha)}{m\zeta_n(\alpha)\psi_n'(\beta)-\psi_n(\beta)\zeta_n'(\alpha)},$$
$$\alpha=2\pi m_2a/\lambda_0;$$
$$\beta=2\pi m_1a/\lambda_0,$$

λ_0 是真空中的波长；m_2 和 m_1 分别是球和周围介质的折射率，它们均为复数；$m=m_1/m_2$，而黎卡提-贝塞耳函数与贝塞耳函数 J、诺伊曼函数 N 和汉克尔函数 H 的关系是：

$$\psi_n(Z)=(\pi Z/2)^{1/2}J_{n+1/2}(Z);$$
$$\zeta_n(Z)=(\pi Z/2)^{1/2}H_{n+1/2}^{(1)}(Z)=\psi_n(Z)+i\chi_n(Z);$$
$$\chi_n(Z)=-(\pi Z/2)^{1/2}N_{n+1/2}(Z);$$
$$\pi_n(\cos\theta)=\frac{P_n^{(1)}(\cos\theta)}{\sin\theta};$$
$$\tau_n(\cos\theta)=\frac{d}{d\theta}P_n^{(1)}(\cos\theta),$$

式中 $P_n^{(1)}(\cos\theta)$ 是第一类连带勒让德函数，θ 是在入射波传播方向与观测方向之间的夹角，φ 是球面坐标系的另一角度。

散射截面 σ_s 及消光截面 σ_e 分别为：

$$\sigma_s=\left(\frac{\lambda^2}{2\pi}\right)\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)\{|a_n|^2+|b_n|^2\}; \tag{1-354}$$

$$\sigma_e=\left(\frac{\lambda^2}{2\pi}\right)\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)\{\mathscr{R}(a_n+b_n)\}, \tag{1-355}$$

式中 λ 是在球外介质中的波长，$\mathscr{R}$表示取圆括号中的项的实部。吸收截面 σ_a 由下式给出：

$$\sigma_a=\sigma_e-\sigma_s。 \tag{1-356}$$

按照定义，消光截面与每单位时间吸收及散射的总能量 P 的关系是：

$$P=\sigma_e cU, \tag{1-357}$$

式中 U 是入射辐射的能量密度，cU 是每单位时间、每单位面积入射的能量。相应的消光效率 Q_e 由 $\sigma_e/(\pi a^2)$ 给出，其中 πa^2 是球的几何截面。

当半径 a 小于 $0.05\lambda_0$ 时，

$$a_1=-\frac{2}{3}i\left(\frac{m^2-1}{m^2+2}\right)\left(\frac{2\pi a}{\lambda_0}\right)^3, \tag{1-358}$$

式中相对折射率的平方 m^2 由下式给出：

$$m^2=\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2\approx\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}+i\left(\frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon_1}\right)。 \tag{1-359}$$

这是对一个电导率为 σ 及介电常数为 ε_2 的不良导电球而言的，球周围介质的介电常数为 ε_1、辐射的角频率为 ω 的情况下，我们得到由上节给出的瑞利散射公式(Rayleigh, 1871)。

当半径 a 远大于波长 λ 时，有效消光截面成为：

$$\sigma_e = 2\pi a^2。\tag{1-360}$$

在这种情况下，对小的 θ 角(在入射波传播方向与观测方向间的夹角)，就单位入射强度而言，观测到的强度由下式给出：

$$I \approx \frac{Q_e}{4}\left[\frac{J_1\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)}{\sin\theta}\right]^2,$$

式中 J 是贝塞耳函数，强度花样是圆孔的夫朗和费衍射花样，这是爱里(Airy, 1835)首先推导出来的。

1.42. 雷达反向散射

雷达截面 σ_R 定义为 4π 乘以在源的方向每单位立体角反射的功率与入射波中每单位面积的功率之比。也就是说一个目标雷达截面是一个理想导电球的投影面积，而该球如果置于真实目标位置上的话，对观测者来说，它就会散射同样数量的能量。对于位于距离 R 处具有雷达截面 σ_R 的一颗行星，则用一架发射功率为 P_T 的连续波信号的雷达所观测到的回波功率 P_R 由下列雷达方程给出：

$$P_R = \frac{GA}{(4\pi R^2)^2}\sigma_R P_T,\tag{1-361}$$

式中 G 是一个发射天线在行星方向比一个各向同性辐射体的增益，A 是接收天线对从行星方向来的信号的有效收集面积。反向散射截面 σ_b 是在观测者与发射机处在同一点时的雷达截面。由前面几节可知，一个自由电子的反向散射截面由下式给出：

$$\sigma_b = \frac{3}{2}\sigma_T = 4\pi\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2,\tag{1-362}$$

式中汤姆孙(Thomson, 1903)散射截面 $\sigma_T = {}^*6.652448\times10^{-25}$ 厘米²。对于半径为 a 的一个不良导电球来说，瑞利散射：

$$\sigma_b = 4\pi a^2\left(\frac{2\pi a}{\lambda_0}\right)^4\left(\frac{m^2-1}{m^2+2}\right)^2 \quad (\text{当 } a<0.05\lambda_0),\tag{1-363}$$

式中 m 是相对折射率，λ_0 是波长。对于半径为 r_0 的一颗行星，反向散射截面为：

$$\sigma_b = gR_0\pi r_0^2,\tag{1-364}$$

式中正入射的反射系数 R_0 由(1-77)式及(1-78)式给出，系数 g 是表面粗糙度的量度。例如，对于具有表面倾斜度为高斯分布的一个光滑曲面来说，$g=1+s^2$，其中 s 是倾斜度的均方根值(Hagfors, 1964)。

对于球形目标，经常感兴趣的是测量作为角度 φ 的函数的反向散射截面 $\sigma_b(\varphi)$，φ 是照射方向与垂直于表面的一个任意方向间的夹角。当应用持续时间为 τ 的一个辐射脉冲时，该脉冲就以下列角度照射了线宽度为 $c\tau/(2\tan\varphi)$ 的一个环带：

$$\varphi = \cos^{-1}\left(1-\frac{ct}{2r_0}\right),\tag{1-365}$$

式中 t 为延迟时间，经过这段时间后，脉冲开始到达行星表面；r_0 是球的半径(参看图7)。测绘出行星表面的延迟时间间隔就提供了 $\sigma_b(\varphi)$ 的一种测定，由此就能与理论作比较以确定表面的粗糙度。正如瑞利(Rayleigh, 1879)所首先指出的，除非波前形变大于 $\lambda/8$(λ 是波长)，

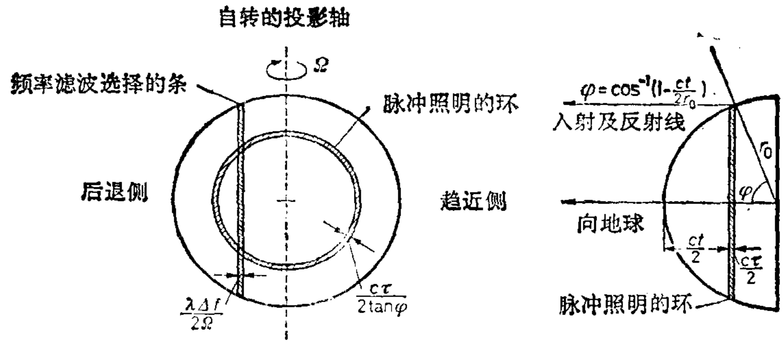


图 7 一颗行星的圆面及向地球的半球图。该图表示：在持续时间为 τ 的脉冲的情况下，一个延迟时间恒定为 t 的环；在由波长 λ 所决定的频率上，分辨率为 Δf 的频率滤波选定的狭条。图中 r_0 是行星半径，入射角和反射角为 $\phi=\cos^{-1}[1-ct/(2r_0)]$，延迟时间 t 是脉冲最先击中表面之后的时间

一个散射波前的象是不会受到严重影响的。所以雷达信号将探测尺寸大于 $\lambda/8$ 的表面特征。哈格福斯(Hagfors, 1961, 1964)假设实际表面的高度与平均值偏离 h 的几率正比于 $\exp\left[-\frac{1}{2}(h/h_0)^2\right]$，其中 h_0 是高度变化的均方根值。于是，表面的水平结构就由高度 $h(r)$ 的自相关函数 $\rho(\Delta r)$ 所确定，而 $h(r)$ 是离表面上任意一点距离 r 的函数。因此

$$\rho(\Delta r)=\langle h(r)h(r+\Delta r)\rangle/h_0^2。\tag{1-366}$$

他发现正交于单位表面积的反向散射截面由下式给出：

$$\begin{aligned}\sigma_b(\varphi)&\propto\frac{1}{\cos^4\varphi}\exp\left[\frac{-r_0^2\tan^2\varphi}{2h_0^2}\right]\quad\left[\text{当 }\rho(\Delta r)=\exp\left(\frac{-\Delta r^2}{2r_0^2}\right)\right],\\ \sigma_b(\varphi)&\propto\frac{1}{\left[\cos^4\varphi+\left(\frac{r_0\lambda}{4\pi h_0^2}\right)^2\sin^2\varphi\right]^{3/2}}\quad\left[\text{当 }\rho(\Delta r)=\exp\left(\frac{-\Delta r}{r_0}\right)\right]。\end{aligned}\tag{1-367}$$

设表面是白色的，所以它的亮度在所有方向上是相同的，与受照射的方向无关，此时 $\sigma_b(\varphi)$ 由朗伯定律(Lambert, 1760)给出：

$$\sigma_b(\varphi)\propto\cos^2(\varphi)。\tag{1-368}$$

一颗行星以恒星为准的自转角速度 Ω_s 可以通过测量雷达回波中的多普勒效应来确定。对于由延迟时间 t 所定义的一个环带来说，回波的总的带宽由下式给出(Shapiro, 1967)：

$$B=\frac{2\nu_0}{c}[\Omega_s+\Omega_a][ct(4r_0-ct)]^{1/2}[1-(\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{r})^2]^{1/2},\tag{1-369}$$

式中 ν_0 是发射频率，Ω_a 是由于雷达站与行星的相对运动引起的行星自转视角速度，r_0 是行星的半径，$\boldsymbol{\Omega}$ 是总的自转 $(\Omega_s+\Omega_a)$ 方向的单位矢量，$\boldsymbol{r}$ 是在反射时刻从地球至行星方向的单位矢量，Ω_s 是行星的固有自转速度。

如果在以频率 ν(不同于发射频率 ν_0)为中心的一个窄频带 $\Delta\nu$ 内观测雷达回波的话，所接收到的辐射是来自于线宽度为 $c\Delta\nu/(2\Omega_s\nu)$ 且平行于自转轴的一狭条表面。延迟测量及多普勒测量合在一起则能确定行星表面上与行星赤道等距离的两块面积，这两块面积的反向散射截面 $\sigma_b(t,\ \nu)$ 由下式给出(Green, 1968)：

$$\sigma_b(t,\ \nu)=\sigma(t,\ \nu)\sec\varphi=\frac{c^2\sec\varphi\sigma(\varphi)}{2\nu_0\Omega_s\cos\alpha}\left[\frac{ct}{2r_0}\left(2-\frac{ct}{2r_0}\right)-\left(\frac{\nu c}{2\nu_0r_0\Omega_s\cos\alpha}\right)^2\right]^{-1/2},\tag{1-370}$$

式中已假定行星是半径为 r_0 的均匀球体，Ω_s 是自转速度，其极轴与垂直于视线的平面之间的夹角为 α。这里 $\sigma(t, \nu)$ 是行星表面上每单位面积的截面，$\sigma(\varphi)$ 是在角度 $\varphi=\cos^{-1}[1-(ct/2r_0)]$ 的方向上同样的截面。延迟-多普勒绘图方法如图 7 所示。

对于等离子体频率 $\nu_p=[e^2N_e/(\pi m)]^{1/2}={}^*8.978658\times10^3N_e^{1/2}$ 赫的等离子体，每单位体积 dV 的反向散射截面 $\sigma_b dV$ 由下式给出(Booker 和 Gordon, 1950; Booker, 1956)：

$$\sigma_b dV=\frac{4\pi^3}{c^4}\left|\frac{\Delta N_e}{N_e}\right|^2\nu_p^4P(2kl,\ 2km,\ 2kn), \tag{1-371}$$

式中 N_e 是电子密度，ΔN_e 是电子密度的起伏分量，假设发射频率 $\nu\gg\nu_p$，密度变化的三维波数谱 $P(2kl,\ 2km,\ 2kn)$ 是传播常数 $k=2\pi\nu/c$ 的函数，l、m、n 是观测方向的单位矢量。对于尺度大小为 a、球对称不均匀度为 $\Delta N_e/N_e$ 的情况，

$$P(2kl,\ 2km,\ 2kn)=(2\pi)^{3/2}a^3\exp\left(-\frac{8\pi a^2}{\lambda^2}\right), \tag{1-372}$$

式中 λ 是观测波长。对于处于热平衡状态的等离子体，$\sigma_b dV$ 由下式给出(Fejer, 1960)：

$$\sigma_b dV=4\pi\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2N_e\approx\frac{3}{2}\sigma_T N_e\quad(\text{当 }\lambda<r_D), \tag{1-373}$$

式中汤姆孙(Thomson, 1903)散射截面 $\sigma_T={}^*6.652448\times10^{-25}$ 厘米^2；德拜半径

$$r_D=[kT_e/(4\pi e^2N_e)]^{1/2}={}^*6.900878(T_e/N_e)^{1/2}\ \text{厘米},$$

这里 T_e 是等离子体的电子温度。当波长 λ 大于 r_D 时，离子开始对反向散射截面有贡献，并且我们得出关系式(Buneman, 1962; Farley, 1966)：

$$\begin{aligned}\sigma_b dV&=4\pi\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2N_e\left[\frac{1}{(1+\alpha^2)(2+\alpha^2)}\right]\quad(\text{当 }T_e=T_i);\\ \sigma_b dV&\approx4\pi\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2N_e\left[\frac{\alpha^2}{1+\alpha^2}+\frac{1}{(1+\alpha^2)(1+\alpha^2+T_e/T_i)}\right]\quad(\text{当 }T_e\lesssim3T_i),\end{aligned} \tag{1-374}$$

式中第二个表达式的括号内的第一项及最后一项分别表示电子及离子的贡献，其中 $\alpha=4\pi r_D/\lambda$。正如多尔蒂等 (Dougherty 和 Farley, 1960; Salpeter, 1960; Hagfors, 1961) 所证明的，比值 T_e/T_i 可以由所观测到的雷达回波信号的频谱来确定。功率谱 $W(\omega)$ 由下式给出：

$$W(\omega)=\frac{\left|1+\left(\frac{\lambda}{4\pi}\right)^2\sum_i\left(\frac{1}{r_{Di}}\right)^2F_i(\omega)\right|^2|\overline{N_e^0(\omega)}|^2+\left(\frac{\lambda}{4\pi r_{De}}\right)^4|F_e(\omega)|^2\sum|\overline{N_i^0(\omega)}|^2}{\left|1+\left(\frac{\lambda}{4\pi}\right)^2\left\{\left(\frac{1}{r_{De}}\right)^2\cdot F_e(\omega)+\sum_i\left(\frac{1}{r_{Di}}\right)^2F_i(\omega)\right\}\right|^2}, \tag{1-375}$$

式中 ω = 回波频率与发射频率的角频率偏差，

λ = 回波波长；

r_{De} = 电子德拜波长 = $[kT_e/(4\pi e^2N_e)]^{1/2}$；

r_{Di} = 离子德拜波长 = $[kT_i/(4\pi Z^2e^2N_i)]^{1/2}$；

$$F_e(\omega)=1-\omega\int_0^\infty\exp\left(-\frac{16\pi^2kT_e}{\lambda^2m_e}\tau^2\right)\sin(\omega\tau)d\tau-i\omega\int_0^\infty\exp\left(-\frac{16\pi^2kT_e}{\lambda^2m_e}\tau^2\right)\cos(\omega\tau)d\tau;$$

$$F_i(\omega)=1-\omega\int_0^\infty\exp\left(-\frac{16\pi^2kT_i}{\lambda^2m_i}\tau^2\right)\sin(\omega\tau)d\tau-i\omega\int_0^\infty\exp\left(-\frac{16\pi^2kT_i}{\lambda^2m_i}\tau^2\right)\cos(\omega\tau)d\tau,$$

$|\overline{N_e^0(\omega)}|^2$ 项是与电子无关的起伏谱，即

$$|\overline{N_e^0(\omega)}|^2=2N\int_0^\infty \exp\left(-\frac{16\pi^2 kT_e}{\lambda^2 m_e}\right)\cos(\omega\tau)d\tau, \tag{1-376}$$

把 N_i 代替 N_e; T_i 代替 T_e; m_i 代替 m_e，就得到离子的相应谱 $|\overline{N_i^0(\omega)}|^2$，这里 N_e 是电子的数密度；T_e 是电子温度；m_e 是电子质量，取下标为 i，它们就代表离子的相应的量。

1.43. 电子密度起伏所引起的相位变化及散射角

一个平面电磁波的电场矢量 $\boldsymbol{E}$ 由下式给出：

$$\boldsymbol{E}=E_0\exp[i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)]\boldsymbol{\eta}_\perp, \tag{1-377}$$

式中 E_0 是波的振幅；ω 是波的角频率；$\boldsymbol{\eta}_\perp$ 是垂直于传播方向的单位矢量；波矢 $\boldsymbol{k}$ 由下式给出：

$$\boldsymbol{k}=\frac{\omega}{c}n\boldsymbol{s}, \tag{1-378}$$

式中 n 是介质的折射率，$\boldsymbol{s}$ 是传播方向的单位矢量。当平面波在电离气体中传播时，折射率由(1-253)式给出：

$$n=\left[1-\frac{4\pi N_e e^2}{m\omega^2}\right]^{1/2}, \tag{1-379}$$

式中 N_e 是自由电子密度。折射率的一个微小变化 Δn 将引起电场矢量相位的一个微小变化 $\Delta\varphi$。由(1-377)～(1-379)式，在大小为 a 的湍流区中所出现的电子密度的变化 ΔN_e，它所引起的相位变化为：

$$\Delta\varphi=\frac{\omega\Delta na}{c}=\frac{e^2a\Delta N_e}{m\nu c}=r_0a\Delta N_e\lambda, \tag{1-380}$$

式中 $r_0=e^2/(mc^2)={}^*2.8179380\times10^{-13}$ 厘米是经典电子半径，ν 及 λ 分别是平面波的频率及波长。

令气体湍流区的空间分布是高斯分布，而描述一个各向同性的高斯相位自相关函数 $\rho(r)$ 为：

$$\rho(r)=\langle\varphi(x)\varphi(x+r)\rangle/\varphi_0^2=\exp[-r^2/(2a^2)], \tag{1-381}$$

式中 $\langle\rangle$ 表示对空间平均，$\varphi(r)$ 描述经过波前的相位分布，而这种分布的均方根值是 $\varphi_0=\langle[\varphi(x)]^2\rangle^{1/2}$。于是由(1-380)式，在按照(1-381)式分布的湍流区的厚度为 L 的气体所引起的均方根相移 φ_0 由下式给出：

$$\varphi_0=(2\pi)^{1/4}\left(\frac{L}{a}\right)^{1/2}\langle\Delta\varphi^2\rangle^{1/2}=(2\pi)^{1/4}\frac{e^2}{mc\nu}(La)^{1/2}\langle\Delta N_e^2\rangle^{1/2}$$

$$={}^*1.337510\times10^{-2}\frac{(La)^{1/2}}{\nu}\langle\Delta N_e^2\rangle^{1/2}\ \text{弧度。} \tag{1-382}$$

当研究电离层时，常常把 φ_0 表示成另一种形式：

$$\varphi_0\approx\pi(La)^{1/2}\nu_p^2\frac{\lambda}{c^2}\left\langle\left(\frac{\Delta N_e}{N_e}\right)^2\right\rangle^{1/2}, \tag{1-383}$$

式中等离子体频率 ν_p 由(1-379)式所给出的折射率等于零的条件所确定，即

$$\nu_p=\left(\frac{e^2N_e}{\pi m}\right)^{1/2}={}^*8.978658\times10^3N_e^{1/2}\ \text{赫。} \tag{1-384}$$

当平面波辐射的射线经过厚度为 L 的气体时，与其原来的直线路径的角偏差 θ 的均方根 $\theta_{\text{散射}}$ 为(Chandrasekhar, 1952; Fejer, 1953)：

$$\theta_{散射} \approx (2\pi)^{-3/4}\left(\frac{L}{a}\right)^{1/2}\langle \Delta n^2\rangle^{1/2} \approx (2\pi)^{-3/4}\left(\frac{L}{a}\right)^{1/2}\frac{c}{\omega a}\langle \Delta\varphi^2\rangle^{1/2}$$

$$\approx 10^8\left(\frac{L}{a}\right)^{1/2}\frac{\langle \Delta N_e^2\rangle^{1/2}}{\nu^2} \text{ 弧度,} \tag{1-385}$$

式中折射率变化 Δn 和相位变化 $\Delta\varphi$ 由(1-380)式给出，这里已假设湍流区是按(1-381)式分布的。参量 $\theta_{散射}$决定一个天体源的最小可测的尺寸。也就是说，即使一个源是小于 $\theta_{散射}$，它也看来象是有角大小 $\theta_{散射}$。表 6 中给出 $\theta_{散射}$以及大气层、电离层、行星际介质和星际介质的其他闪烁参量。

表 6 有关大气层、电离层、行星际介质及星际介质闪烁参量的代表值[1]。$\theta_{散射}$是均方根散射角，a 是尺度大小，v 是风速，τ_ν 是强度起伏的去相关时间尺度，$\langle N_e^2\rangle^{1/2}$ 是均方根电子密度，$\langle \Delta N_e^2\rangle^{1/2}$ 是均方根起伏电子密度，L 是闪烁屏蔽的厚度，以及 D是有效屏蔽距离

介质	$\theta_{散射}$ (角秒)	a (厘米)	v (公里/秒)	τ_ν (秒)	$\frac{\langle \Delta N_e^2\rangle^{1/2}}{\langle N_e^2\rangle^{1/2}}$	$\langle N_e^2\rangle^{1/2}$ (厘米$^{-3}$)	L (厘米)	D (厘米)
大气层 (在 4000 埃)	0.75	10	10^{-4}	1	10^{-4}	10^{19}	10^4	10^5
电离层 (在 45 兆赫)	5	10^4～10^5	0.1～0.3	30	10^{-3}	10^5	5×10^6	3×10^7
行星际介质 (在 200 兆赫)	10^{-3}～10^{-4}	10^7†	250～270	0.2	10^{-2}	10～10^8	10^{13}	10^{13}
星际介质 (在 318 兆赫)	10^{-3}	10^{11}	30～200	10^3	10^{-2}	0.03	10^{22}	10^{22}

[1] 本表的这些值均是对括号中所给出的频率及表中列出的 L 和 D 的值而言的。参考文献：大气层可查张德拉塞卡(Chandrasekhar, 1952)，电离层可查休伊什等(Hewish, 1951；以及 Aarons, Whitney 和 Allen, 1971)，行星际介质可查丹尼森等(Dennison 和 Hewish, 1967；以及 Cohen, Gundermann, Hardebeck 和 Sharp, 1967)，星际介质可查兰氏等(Lang 和 Rickett, 1970；Rickett, 1970；以及 Lang, 1971)。

† 宇宙飞船观测表明行星际介质的湍流的特征尺度或相关长度为 10^{11} 厘米。

1.44. 闪烁图

布克等(Booker, Ratcliffe 和 Shinn, 1950)首先证明，在平行于一个相位变化屏的任何平面内，波扰动的自相关函数，与刚在屏上出现以后的波前的自相关函数是相同的。所以穿过地球的波强度变化的可观测统计性质，直接与波前在屏上穿过时的波相位的空间变化有关。特别是，波前穿过时的相位 $\varphi(x)$ 的空间自相关函数 $\varphi_0^2\rho(r)$ 可以直接与空间自相关函数 $M(r)$ 联系起来，$M(r)$ 是在地球处波强度 $I(x)$ 的起伏 $\Delta I(x)=I(x)-\langle I(x)\rangle$ 的空间自相关函数。这里

$$M(r)=\langle \Delta I(x)\,\Delta I(x+r)\rangle, \tag{1-386}$$

式中⟨⟩表示对空间求平均。$M(r)$通常是由计算其傅里叶变换 $M(q)$ 来确定，而 $M(q)$ 由下式给出：

$$M(q)=\int_{-\infty}^{+\infty} M(r)\exp(-irq)\,dr。 \tag{1-387}$$

因为 $M(q)$ 等于 $\Delta I(x)$ 的傅里叶变换的平方，故把它称为强度起伏的功率谱，即

$$M(q)=\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta I(x)\exp(-ixq)\,dx\right|^2。 \tag{1-388}$$

当一个源不是一个点源时，由于源的不同部分的强度起伏将重迭在一起，而净结果将使强度起伏看不出来。也就是说一个点源所引起的强度起伏将比一个展源产生的强度起伏更明

显，而非常大的展源将观测不到闪烁。这个条件可以用展源的功率谱 $M_s(q)$ 的公式来说明 (Salpeter, 1967)：

$$M_s(q) = M(q)\,|V(qD)|^2, \tag{1-389}$$

式中 D 是到闪烁屏的距离，$M(q)$ 是一个点源的功率谱，可见度函数 $V(qD)$ 是源亮度分布的傅里叶变换。

假设由一台固定天线所观测到的强度随时间的起伏 $I(t)$，是由于正交于观测者视线的一个相位变化屏的运动所致，则强度起伏 $I(t)$ 的自相关函数 $M(\tau)$ 由下式给出：

$$M(\tau) = M\left(\frac{r}{v}\right) = \frac{\langle [I(t) - \langle I(t)\rangle][I(t+\tau) - \langle I(t+\tau)\rangle]\rangle}{\sigma^2}, \tag{1-390}$$

式中屏以速度 v 沿垂直于观测者至源的视线运动，$\langle\rangle$ 表示对时间求平均，σ^2 是 $I(t)$ 的均方偏差。

若用一台天线对准一个源作强度起伏测量，然后再使天线偏离该源作强度起伏测量，这样就可测出强度起伏的调制深度。这种调制指数或闪烁指数由下式给出 (Cohen *et al.*, 1967)：

$$m = \{[(\sigma_{对准})^2 - (\sigma_{偏置})^2]/[\langle I_{对准}(t)\rangle - \langle I_{偏置}(t)\rangle]^2\}^{1/2}, \tag{1-391}$$

式中 $I(t)$ 是观测到的强度随时间的变化，σ^2 表示强度的均方值，$\langle\rangle$ 表示对时间求平均。如前所述，一个展源的调制指数低于一个点源的值。当一个源比临界角 ψ_c 更宽时，调制深度就会大大缩小 (Salpeter, 1967)：

$$\begin{aligned} &\psi_c \approx a/D \qquad (\text{当 } m \text{ 为小值时})；\\ &\psi_c \approx a/(\varphi_0 D) \qquad (\text{当 } m \approx 1 \text{ 时})。\end{aligned} \tag{1-392}$$

另一个可以测量的统计参量是强度的几率分布 $P(I)$。若分别用对准和偏离一个源的方式来测量分布的话，则两种测量量间的关系为褶积方程：

$$P_{对准}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(I)\,P_{偏置}(x-I)\,dI, \tag{1-393}$$

式中 $P(I)$ 是闪烁屏所引起的几率分布。

可以把去相关时间 τ_ν 定义为自相关函数 $M(t)$ 的等效宽度，而 $M(t)$ 由 (1-390) 式给出，即 τ_ν 为：

$$\tau_\nu = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} M(t)\,dt}{M(t=0)} \approx \frac{a}{\varphi_0 v} \approx \frac{c}{\nu v \theta_{散射}} \approx 10^3 \left(\frac{a}{L}\right)^{1/2} \frac{\nu}{v\langle \Delta N_e^2\rangle^{1/2}}\ \text{秒}, \tag{1-394}$$

式中 v 是散射湍流区正通过视线时的横向运动速度。去相关时间粗略地是强度起伏周期的四分之一，它的代表值列于表 6 中。

可以类似地把去相关频率 f_ν 定义为频率相关函数的等效宽度。设用两台辐射计分别在两个不同频率上记录强度 $I_1(t)$ 及 $I_2(t)$，则交叉相关函数 $\Gamma_{12}(\tau)$ 由下式给出：

$$\Gamma_{12}(\tau) = \frac{1}{\sigma_1\sigma_2} \langle [I_1(t) - \langle I_1(t)\rangle][I_2(t+\tau) - \langle I_2(t+\tau)\rangle]\rangle, \tag{1-395}$$

式中 $\langle\rangle$ 表示对时间求平均，σ_1^2 及 σ_2^2 分别是 $I_1(t)$ 及 $I_2(t)$ 的均方偏差。此时 f_ν 可以定义为 $\Gamma_{12}(0)$ 随辐射计频率间距变化曲线的等效宽度。对于可应用几何光学的强相位起伏，设到屏距离 D 是到源的距离的一半，则直达射线与散射射线之间的路程差是 $D\theta_{散射}^2/4$。因此，两个波干涉的频率差 f_ν 由下式给出：

$$f_\nu \approx \frac{4c}{D\theta_{散射}^2} \approx \frac{10^{-5} a \nu^4}{\langle \Delta N_e^2\rangle D^2}\ \text{赫} \qquad \left(\begin{array}{l}\text{对于一个延伸介质}\\ \text{中的强闪烁情况}\end{array}\right)。 \tag{1-396}$$

一个辐射脉冲随着时间的推移将增宽到f_ν^{-1}。也就是说，一个散射脉冲的时间轮廓将是发射脉冲按指数函数衰减的褶积，该脉冲衰减到它的$\frac{1}{e}$所需的时间是f_ν^{-1}。休伊什等(Hewish, 1951; Fejer, 1953; Mercier, 1962; Salpeter, 1967; Jokipii 和 Hollweg, 1970; Lovelace 等, 1971)已推导出在不同散射条件下f_ν的理论公式，以及$M(q)$、m、$P(I)$的公式。在表 7 中给出了这些公式中的少数几个。

设一幅稳定的衍射花样图以速度v、沿与两台天线间的投影基线B成θ角的方向运动，则速度上限由下式给出：

$$v=B|\cos\theta|/T\leqslant B/T, \tag{1-397}$$

式中T是图形到达两台天线的时移。设在两台天线处看到的强度起伏是高度相关的，则可得到速度的下限(Lang 和 Rickett, 1970)为：

$$v\geqslant B[T^2+\tau_\nu^2]^{-1/2}, \tag{1-398}$$

式中τ_ν是去相关时间。设稳定衍射图是用三台天线同时观测的，则可确定唯一的速度值(参看 Dennison 和 Hewish, 1967)。不过，如果闪烁结构本身在其运动中重新排列，这个视速度估计过高于实际的漂移速度(参看 Briggs, Phillips 和 Shinn, 1950)。最后，洛弗莱斯等(Lovelace *et al.*, 1971)已证明，在某种情况下由单一天线测出的时间自相关函数的贝塞耳变换可以给出漂移速度v。表 6 给出大气层、电离层、行星际介质及星际介质的v值。

表 7 有关三种闪烁区的功率谱$M(q)$、调制指数m、强度的几率分布$P(I)$及去相关频率f_ν的公式。这里已假设在距离D处放置着一个相位散射屏以得出尺度大小为a的湍流元，并且得以形成均方根相位起伏φ_0。对于高斯屏而言，$\varphi^2(q)=(2\pi)^{-1/2}a\phi_0^2\exp(-q^2a^2/2)$

区	$M(q)$	m	$P(I)$	f_ν
$\phi_0\ll1$ 及 $D\ll2\pi a^2/\lambda$ 或 $\phi_0>1$ 及 $D\ll2\pi a^2/(\lambda\phi_0)$	$4\phi^2(q)\sin^2\left(\frac{q^2D\lambda}{4\pi}\right)\approx\left(\frac{q^2D\lambda}{2\pi}\right)^2\phi^2(q)$	$\frac{\phi_0D\lambda}{2\pi a^2}\propto\lambda^2$	$\propto\exp\left[\frac{-I^2}{2m^2}\right]$	$\to\nu$
$\phi_0\ll1$ 及 $D\gg2\pi a^2/\lambda$	$4\phi^2(q)\sin^2\left(\frac{q^2D\lambda}{4\pi}\right)\approx2\phi^2(q)$	$\sqrt{2}\phi_0\propto\lambda$	$\propto\exp\left[\frac{-I^2}{2m^2}\right]$	$\frac{2\pi a^2c}{\lambda^2D}\propto\lambda^{-2}$
$\phi_0\gg1$ 及 $D\gg2\pi a^2/(\lambda\phi_0)$	$\exp\left[-\left(\frac{qa}{2\phi_0}\right)^2\right]$	1	$\propto\exp[-I]$	$\frac{2\pi a^2c}{\phi_0^2\lambda^2D}\propto\lambda^{-4}$

第二章 单色(谱线)辐射

2.1. 原子的参数

经典电子半径 考虑质量为 m 及荷电为 e 的一个电子围绕电荷为 Ze 的一个原子核的轨道运动。令库仑吸引力等于向心力，我们得出：

$$\frac{Ze^2}{r^2}=\frac{mv^2}{r},\tag{2-1}$$

式中 r 是轨道半径，v 是电子的速度。对 r 求解：

$$r=r_0\left(\frac{c}{v}\right)^2 Z,\tag{2-2}$$

式中经典电子半径

$$r_0=e^2/(mc^2)={}^*2.8179380\times10^{-13}\text{ 厘米。}\tag{2-3}$$

第一玻尔轨道半径 玻尔(Bohr, 1913)提出，我们可假设电子的角动量是量子化的，所以

$$mvr=\frac{hn}{2\pi},\tag{2-4}$$

式中 $h={}^*6.626176\times10^{-27}$ 尔格·秒是普朗克常数，n 是整数。 利用(2-1)式及(2-4)式我们得到第 n 个玻尔轨道半径 r_n：

$$r_n=a_0\,\frac{n^2}{Z},\tag{2-5}$$

其中 a_0 为氢($Z=1$)的第一玻尔轨道半径：

$$a_0=\frac{h^2}{4\pi^2me^2}={}^*0.52917706\times10^{-8}\text{ 厘米。}\tag{2-6}$$

谱线频率 由两个能级 E_m 与 E_n 间的跃迁所引起的原子或分子辐射，其辐射频率 ν_{mn} 由下式给出(Planck, 1910; Bohr, 1913)：

$$\nu_{mn}=|E_m-E_n|/h,\tag{2-7}$$

式中"| |"表示绝对值，h 是普朗克常数。

无限大质量的里德伯常数 速度为 v、轨道半径为 r 的一个电子的总能量 E_n 为：

$$E_n=-\frac{Ze^2}{r}+\frac{1}{2}\,mv^2=\frac{-2\pi^2me^4Z^2}{h^2n^2},\tag{2-8}$$

式中 n 是一个整数，按照(2-4)式已假定角动量是量子化的。应用(2-8)式于(2-7)式，相应于这个能量的频率是：

$$\nu_{mn}=cR_\infty Z^2\left|\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m^2}\right|,\tag{2-9}$$

式中 m 及 n 是整数。无限大质量的里德伯常数是(Rydberg, 1890)：

$$R_\infty=\frac{2\pi^2m_ee^4}{ch^3}={}^*1.097373177\times10^5\text{ 厘米}^{-1},\tag{2-10}$$

m_e 是电子质量。

康普顿频率及波长 在康普顿频率上，光子能量 $h\nu$ 就等于电子静质量能 mc^2，即

$$\nu_0=mc^2/h={}^*1.2355906\times10^{20}\text{ 赫，}\tag{2-11}$$

相应的康普顿波长(Compton, 1923)为:

$$\lambda_0=\frac{h}{2\pi mc}=^*3.8615905\times10^{-11}\text{ 厘米。} \tag{2-12}$$

塞曼位移——拉莫尔进动频率 假定运动电子是一个谐振子,当不存在磁场时,它作线性振荡:

$$x(t)=x_0\cos(2\pi\nu_0 t), \tag{2-13}$$

式中 ν_0 是振荡频率, x_0 是在 x 方向的线位移峰值, t 是时间变数。 当垂直于 x 轴方向的磁场强度为 H 时,振子的受迫振动的运动方程为(Lorentz, 1897):

$$m\ddot{x}+m(2\pi\nu_0)^2x=eH\dot{x}/c, \tag{2-14}$$

式中"·"及"··"分别表示对时间的一阶及二阶导数,等式右边的项为磁力项。求解方程(2-14)式得出振荡频率:

$$\nu=\nu_0+o \quad (\text{当 } o\ll\nu_0), \tag{2-15}$$

式中塞曼位移(Zeeman, 1896, 1897; Lorentz, 1897):

$$o=\frac{eH}{4\pi mc}=^*1.3996123\times10^6H\text{ 赫}, \tag{2-16}$$

式中磁场强度 H 的单位是高斯。后一常数也称为拉莫尔进动频率,因为拉莫尔(1897)证明附加的 H 场只是使轨道产生围绕磁力线方向的均匀进动(进动速度是 $2\pi o$), 并不影响电子在它原有轨道上的运动。

玻尔磁子及核磁子 一个电流的磁偶极矩等于电流强度、回路电流所包围的面积及 c^{-1} 三者的乘积。对电荷为 e 及角速度为 ω 的一个电子来说,电流强度是 $e\omega/2\pi$。此强度乘以面积 πr^2, 其中 r 是轨道半径,并且利用(2-4)式表示角动量量子化,我们得出磁矩:

$$M=L\mu_B, \tag{2-17}$$

式中 L 是整数,玻尔磁子 μ_B 由下式给出:

$$\mu_B=\frac{eh}{4\pi mc}=^*9.274078\times10^{-21}\text{ 尔格·高斯}^{-1}\text{。} \tag{2-18}$$

氢原子核的相应磁矩是核磁子

$$\mu_K=\mu_B\left(\frac{m}{m_p}\right)=^*5.050824\times10^{-24}\text{ 尔格·高斯}^{-1}, \tag{2-19}$$

式中 m_p 是质子质量。

由(2-7)式、(2-15)式及(2-16)式也看出与磁场强度 H 相联系的能量是:

$$E=\mu_BH\text{。} \tag{2-20}$$

精细结构常数 由(2-4)式及(2-6)式我们得到第一玻尔轨道速度与光速的比值, 这个精细结构常数是:

$$\alpha=\frac{v}{c}=\frac{2\pi e^2}{hc}=\frac{2\mu_B}{ea_0}=\frac{r_0}{\lambda_0}=\frac{\lambda_0}{a_0}=^*\frac{1}{137.03604}=^*7.2973506\times10^{-3}, \tag{2-21}$$

式中 μ_B 是玻尔磁子, a_0 是第一玻尔轨道的半径, r_0 是经典电子半径, λ_0 是康普顿波长。

索末菲(Sommerfeld, 1916)证明,如果不考虑相对论改正,一个电子在椭圆轨道上的总能量由(2-8)式给出。既然是这样,能级 n 的能量就为:

$$E_n=\frac{-2\pi^2me^4}{h^2}\,\frac{Z^2}{n^2}\left[1+\frac{\alpha^2Z^2}{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{3}{4n}\right)\right], \tag{2-22}$$

式中 α 是精细结构常数,椭圆的长径与短径之比是 n/k, 整数 k 称为角量子数。

2.2. 爱因斯坦几率系数

当考虑原子能级间的自发跃迁和辐射感应跃迁时，每单位时间内一个原子从高能态 E_m 跃迁到低能态 E_n 的几率 P_{mn}(Einstein, 1917)：

$$P_{mn}=A_{mn}+B_{mn}U_{\nu}, \tag{2-23}$$

式中 A_{mn} 是在两种能态间的自发跃迁(自发发射)的爱因斯坦系数，B_{mn} 是由频率处在 ν 到 $\nu+d\nu$ 之间、能量密度为 $U_{\nu}d\nu$ 的辐射所产生的感应辐射的爱因斯坦受激发射系数。单位时间内辐射感应吸收的几率为：

$$P_{nm}=B_{nm}U_{\nu}。 \tag{2-24}$$

由(1-64)式，一个具有电场强度 E_{ν}、频率 ν 的平面波辐射，它的 $U_{\nu}=E_{\nu}^2/4\pi$。由(1-119)式，在温度 T 时，频率处在 ν 至 $\nu+d\nu$ 之间的黑体辐射的能量密度为(Planck, 1901)：

$$U_{\nu}=\frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\left[\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)-1\right]^{-1}=\frac{4\pi}{c}B_{\nu}(T), \tag{2-25}$$

式中 $B_{\nu}(T)$ 是在频率为 ν、温度为 T 的辐射体的亮度。因为向下跃迁的数目必须等于向上跃迁的数目，并且由于处在热动平衡时，每一能态上的粒子数是由玻耳兹曼分布(3-126)式所确定的，由此可见：

$$\frac{g_n}{g_m}\exp[-E_n/kT]B_{nm}U_{\nu}=\exp[-E_m/kT](A_{mn}+B_{mn}U_{\nu})。 \tag{2-26}$$

在(2-25)式中选取 $h\nu=E_m-E_n$，由(2-26)式得出：

$$A_{mn}=\frac{8\pi h\nu^3}{c^3}B_{mn} \tag{2-27}$$

以及

$$g_mB_{mn}=g_nB_{nm}, \tag{2-28}$$

式中 g_m 是第 m 能级的统计权重。有些作者定义 P_{nm} 为 $B_{nm}B_{\nu}(T)$，其中 $B_{\nu}(T)$ 由(2-25)式给出。在这种情况下，(2-27)式成为 $A_{mn}=2h\nu^3B_{mn}/c^2$。虽然表达式(2-27)和(2-28)是在热动平衡假设下确定的，爱因斯坦系数必定只是原子的特性，所以(2-27)式和(2-28)式是不管辐射性质如何都是成立的。

当只考虑自发跃迁时，每单位时间每单位体积发出的总能量 dP/dV 由下式给出：

$$dP/dV=N_mh\nu_{mn}A_{mn}, \tag{2-29}$$

式中 N_m 是 m 能级的原子的体密度，$h\nu_{mn}=E_m-E_n$。

2.3. 电偶极子自发辐射的爱因斯坦几率系数

一个荷电为 e 的电子束缚在 x 方向作简谐运动，其电偶极矩 $d(t)$ 是：

$$d(t)=ex(t)=ex_0\cos(2\pi\nu_0t), \tag{2-30}$$

式中 ν_0 是振荡频率，x_0 是振荡的峰值位移。一个偶极子在单位时间内向所有方向辐射的总能量(1-114)式用拉莫尔(1897)关系表示，则我们得出平均辐射功率：

$$P=\frac{2}{3}\frac{\langle|\ddot{d}(t)|^2\rangle}{c^3}=\frac{64\pi^4\nu_0^4}{3c^3}\left(\frac{ex_0}{2}\right)^2, \tag{2-31}$$

式中“..”表示对时间的二阶导数，“| |”表示绝对值，〈 〉表示对时间求平均，$(ex_0/2)$ 是平均偶极矩。

比较(2-29)式和(2-31)式，可得出电偶极辐射的自发辐射系数 A_{mn}：

$$A_{mn}=\frac{64\pi^4\nu_{mn}^3}{3hc^3}|\mu_{mn}|^2=*1.163947\times10^{-2}\nu_{mn}^3|\mu_{mn}|^2\ 秒^{-1}, \tag{2-32}$$

式中电偶极子矩阵元 μ_{mn} 通常由下式给出:

$$\mu_{mn}^2 = S_{mn}/g_m \approx (e^2 x_0^2), \tag{2-33}$$

其中 S_{mn} 称为电偶极子的强度, g_m 是第 m 能级的统计权重。

为了估计一个电偶极子跃迁的 A_{mn} 值,令:

$$\nu_{mn} = cR_\infty = {}^*3.28984202 \times 10^{15} \text{ 赫} \tag{2-34}$$

为一个电子在第一玻尔轨道上的辐射频率,其电偶极子矩阵元的平方为:

$$|\mu_{mn}|^2 \approx e^2 a_0^2 = {}^*6.460571 \times 10^{-36} \text{ 厘米}^2\cdot\text{静电单位}^2, \tag{2-35}$$

式中 a_0 是第一玻尔轨道的半径。把(2-34)式和(2-35)式代入(2-32)式,我们得出:

$$A_{mn} = {}^*2.677499 \times 10^9 \text{ 秒}^{-1}。 \tag{2-36}$$

在表 21 中给出了大多数丰富元素的简单分子的电偶极矩。表中的电偶极矩值以德拜为单位,其中 1 德拜 $=10^{18}$ 静电单位·厘米。

2.4. 电偶极子发射系数与经典阻尼常数及振子强度的关系

一个谐振子的动能 E 由下式给出:

$$E = \frac{m[\dot{x}(t)]^2}{2} = 2\pi^2 m \nu_0^2 x_0^2 \cos^2(2\pi\nu_0 t), \tag{2-37}$$

式中 $x(t)$ 由(2-30)式给出。能量的时间变化率 dE/dt 由(2-31)式和(2-37)式得出:

$$\frac{dE}{dt} = -\gamma_{\text{经典}} E, \tag{2-38}$$

式中经典阻尼常数:

$$\gamma_{\text{经典}} = \frac{8\pi^2 e^2 \nu_0^2}{3mc^3} = {}^*2.473883 \times 10^{-22} \nu_0^2 \text{ 秒}^{-1}。 \tag{2-39}$$

把(2-38)式与(2-29)式作比较,我们得出:

$$A_{mn} = -3\gamma_{\text{经典}} f_{mn}, \tag{2-40}$$

式中振子强度 f_{mn} 是每个原子的有效电子数。振子强度具有下列性质:

$$g_m f_{mn} = -g_n f_{nm}, \tag{2-41}$$

式中 g_m 是第 n 能级的统计权重。如同我们在前面的讨论中所假定的,当 m 大于 n 时, f_{mn} 和 f_{nm} 分别称为发射振子强度和吸收振子强度。对于具有 Z 个光电子的原子来说,振子强度遵从腊希-托马斯-库恩求和定则(Thomas, 1925; Kuhn, 1925):

$$\sum_{n<m} f_{mn} + \sum_{n>m} f_{mn} = \sum_{n<m} f_{mn} - \sum_{m<n} \frac{g_n}{g_m} f_{nm} = Z。 \tag{2-42}$$

在光学频段的振子强度的典型值是 1 的量级。

2.5. 磁偶极子自发射的几率系数

令一个磁偶极子具有振荡磁偶极矩 $m(t)$:

$$m(t) = m_0 \cos(2\pi\nu_0 t), \tag{2-43}$$

式中 ν_0 是谐振频率。每单位时间辐射能的时间平均只要用 $m(t)$ 代替(2-31)式中的 $d(t)$ 即可得到,由(2-32)式可知,磁偶极子辐射的自发射系数 A_{mn} 为:

$$A_{mn} = \frac{64\pi^4 \nu_{mn}^3}{3hc^3} |\mu_{mn}|^2 = {}^*1.163947 \times 10^{-2} \nu_{mn}^3 |\mu_{mn}|^2 \text{ 秒}^{-1}, \tag{2-44}$$

式中磁偶极子矩阵元 μ_{mn} 由下式给出:

$$\mu_{mn}^2 = S_{mn}/g_m, \tag{2-45}$$

这里 S_{mn} 是磁偶极子的强度，g_m 是 m 能级的统计权重。

为了求磁偶极跃迁的 A_{mn} 值，令：

$$\nu_{mn}=cR_{\infty}={}^*3.28984202\times10^{15}\text{ 赫}, \tag{2-46}$$

它是在第一玻尔轨道上的一个电子的辐射频率，其磁矩为：

$$|\mu_{mn}|^2=\mu_B^2=\left(\frac{eh}{4\pi mc}\right)^2={}^*8.600852\times10^{-41}\text{ 尔格}^2\cdot\text{高斯}^{-2}, \tag{2-47}$$

式中 μ_B 是玻尔磁子。将(2-46)式及(2-47)式代入(2-44)式，我们得出：

$$A_{mn}={}^*3.564510\times10^4\text{ 秒}^{-1}。 \tag{2-48}$$

2.6. 电四极子自发射的几率系数

每个荷电为 e 的一组电荷，它的四极矩为(Landau 和 Lifshitz, 1962)：

$$D_{\alpha\beta}=\sum e(3x_\alpha x_\beta-r^2), \tag{2-49}$$

式中 x_α 及 x_β 是两个电荷 α 与 β 间的矢径 $\boldsymbol{r}$ 的 x 坐标，在远离电荷组距离为 R 处，四极矩辐射所产生的电场强度 E 及磁场强度 H 由下式给出：

$$E=H=\frac{\dddot{D}_{\alpha\beta}}{6c^3R}\sin\theta, \tag{2-50}$$

式中“…”表示对时间的三阶导数，θ 是观测方向与两电荷联线间的夹角。每单位时间在所有方向上发射的总能量 P 可通过把坡印廷通量 $cE^2/4\pi$ 对所有角度积分得到，并注意 $D_{\alpha\beta}$ 是具有五个独立分量的对称张量：

$$P=\frac{\dddot{D}_{\alpha\beta}^2}{180c^5}。 \tag{2-51}$$

如果我们假设 $D_{\alpha\beta}$ 随时间振荡，并由下式给定：

$$D_{\alpha\beta}=3ex_0^2\cos(2\pi\nu_0t), \tag{2-52}$$

式中 ν_0 是振荡频率，(2-51)式给出了时间平均辐射功率

$$P=\frac{32\pi^6\nu_0^6}{5c^5}\left(\frac{ex_0^2}{2}\right)^2, \tag{2-53}$$

此处 $ex_0^2/2$ 是平均电四极矩。

将(2-29)式与(2-53)式比较，可得出电四极矩辐射的自发射系数 A_{mn}：

$$A_{mn}=\frac{32\pi^6\nu_{mn}^5}{5hc^5}\left(\frac{S_{mn}}{g_m}\right)={}^*3.834535\times10^{-23}\nu_{mn}^5\left(\frac{S_{mn}}{g_m}\right)\text{ 秒}^{-1}, \tag{2-54}$$

式中 S_{mn} 是电四极矩的强度，g_m 是 m 能级的统计权重。

为了估计电四极矩跃迁的 A_{mn} 值，令：

$$\nu_{mn}=cR_{\infty}={}^*3.28984202\times10^{15}\text{ 赫}, \tag{2-55}$$

它是处在第一玻尔轨道上的一个电子的辐射频率，该电子的电四极矩为：

$$\frac{S_{mn}}{g_m}=a_0^4e^2={}^*1.809143\times10^{-52}\text{ 厘米}^4\cdot\text{静电单位}^2. \tag{2-56}$$

式中 a_0 是第一玻尔轨道的半径。将(2-55)式及(2-56)式代入(2-54)式，我们得出：

$$A_{mn}={}^*2.673381\times10^3\text{ 秒}^{-1}。 \tag{2-57}$$

2.7. 辐射转移

对于沿视线方向在 x 处所测量到的频率为 ν 的辐射强度 $I(\nu, x)$ 来说，辐射转移方程是

(Kirchhoff, 1860; Woolley, 1947; Smerd和 Westfold, 1949):

$$\frac{d}{d\tau_\nu}\left[\frac{I(\nu,\ x)}{n_\nu^2}\right]=S_\nu-\frac{I(\nu,\ x)}{n_\nu^2}, \tag{2-58}$$

式中源函数 S_ν 由下式给出:

$$S_\nu=\frac{\varepsilon_\nu}{\alpha_\nu n_\nu^2}, \tag{2-59}$$

而光学深度 τ_ν 定义为:

$$d\tau_\nu=\alpha_\nu(x)dx, \tag{2-60}$$

体发射率 ε_ν 是每单位体积每单位频率间隔每单位立体角所发射的功率, α_ν 是每单位长度的吸收系数, n_ν 是折射率。对于等离子体,只要 $\nu\gg\nu_p={}^*8.978658\times10^3N_e^{1/2}$ 赫, n_ν 就为 1, 其中 ν_p 是等离子体频率, N_e 是自由电子密度。

对于厚度为 L 的各向同性、均匀的等离子体,光学深度可写成:

$$\tau_\nu(L)=\int_0^L\alpha_\nu(x)dx=\alpha_\nu L=N\sigma_\nu L, \tag{2-61}$$

式中 N 是吸收原子的体密度, σ_ν 称为吸收截面。

在温度为 T 的局部热动平衡条件下, 源函数 S_ν 由下式给出 (Planck, 1901; Milne, 1930):

$$\begin{aligned}S_\nu=\frac{\varepsilon_\nu}{\alpha_\nu n_\nu^2}=B_\nu(T)&=\frac{2h\nu^3}{c^2}\left[\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)-1\right]^{-1}\\&\approx\frac{2h\nu^3}{c^2}\exp\left[-\left(\frac{h\nu}{kT}\right)\right]\quad(\text{当 }\nu\gg10^{10}T)\\&\approx\frac{2\nu^2kT}{c^2}\qquad(\text{当 }\nu\ll10^{10}T),\end{aligned} \tag{2-62}$$

这是处在温度为 T、频率为 ν 的黑体辐射体的真空亮度 $B_\nu(T)$ 的表达式。

当视线上某点 A 的强度用视线上其他一点 B 的强度来表示的话, (2-58)式的通解为:

$$\frac{I(\nu,\ A)}{n_\nu^2(A)}=\frac{I(\nu,\ B)}{n_\nu^2(B)}\exp[\tau_\nu(B)-\tau_\nu(A)]-\int_{\tau_\nu(A)}^{\tau_\nu(B)}S_\nu(t)\exp[t-\tau_\nu(A)]dt, \tag{2-63}$$ [1)]

式中 $\tau_\nu(A)$是从 $\tau=0$ 的点到点 A 的光学深度, 同样, $\tau_\nu(B)$是从 $\tau=0$ 的点到点 B 的光学深度。由(2-62)式和(2-63)式可知, 厚度为 L 的一个等温黑体辐射体的发射强度是:

$$\begin{aligned}I(\nu,\ 0)&=n_\nu^2(0)B_\nu(T)\{1-\exp[-\tau(L)]\}\\&\approx n_\nu^2(0)B_\nu(T)\qquad\text{用于 }\tau_\nu(L)\gtrsim1(\text{光学厚})\\&\approx n_\nu^2(0)B_\nu(T)\tau_\nu(L)\qquad\text{用于 }\tau_\nu(L)<1(\text{光学薄})。\end{aligned} \tag{2-64}$$

2.8. 线辐射的共振吸收

对于由高能级 m 跃迁到低能级 n 引起的线辐射的自吸收来说, 根据量子力学, 每单位长度的吸收系数 α_ν 是(Einstein, 1917):

$$\alpha_\nu=\frac{c^2N_ng_m}{8\pi\nu^2g_nn_\nu^2}A_{mn}\left[1-\frac{g_nN_m}{g_mN_n}\right]\varphi_{mn}(\nu), \tag{2-65}$$

式中 N_n 是能级 n 的粒子数, A_{mn} 是从能级 m 到能级 n 的自发跃迁的爱因斯坦系数, 介质的折射率 n_ν 通常与 1 没有多少差别, 统计权重 $g_n=2J+1$, 其中 J 是能级的总角量子数, $\varphi_{mn}(\nu)$是在谱线处的频谱强度分布。在第 2.18 至 2.22 节中给出了各种过程的 $\varphi_{mn}(\nu)$的详细描述。

1) 原文此式符号全部差一负号, 现已改正。——校者注

吸收系数必须归一化以满足下列判据(Ladenburg, 1921; Kramers, 1924)：

$$\int_0^{+\infty}\alpha_\nu d\nu=\frac{c^2N_ng_m}{8\pi\nu^2g_nn_\nu^2}A_{mn}\left[1-\frac{g_nN_m}{g_mN_n}\right]。\tag{2-66}$$

由(2-40)式及(2-41)式可知，(2-66)式也可写成下列形式：

$$\int_0^{\infty}\alpha_\nu d\nu=\frac{\pi e^2}{mc}f_{nm}N_n\left[1-\frac{g_nN_m}{g_mN_n}\right],\tag{2-67}$$

式中 f_{nm} 是 m-n 跃迁的吸收振子强度。这些判据与下列判据是一致的：

$$\int_0^{\infty}\varphi_{mn}(\nu)d\nu=1。\tag{2-68}$$

对于在半极大处的全宽度为 $\Delta\nu_D$ 的高斯谱线轮廓来说，这个判据是指 $\varphi_{mn}(\nu_{mn})=(\ln 2/\pi)^{1/2}(2/\Delta\nu_D)$。对于在半极大处的全宽度为 $\Delta\nu_L$ 的洛伦兹谱线的轮廓来说，$\varphi_{mn}(\nu_{mn})=(2/\pi)\Delta\nu_L^{-1}$。下面我们选择 $\varphi_{mn}(\nu_{mn})=\Delta\nu_L^{-1}$，注意必须随所取的实际谱线轮廓作小的修正。

在温度为 T 的局部热动平衡条件下，能级 m 及 n 上的粒子数由玻耳兹曼方程(3-126)给出。这个方程说明 $\exp[-h\nu_{mn}/(kT)]=g_nN_m/(g_mN_n)$ 和 $N_n=g_nN_{总}\exp[-\chi_n/(kT)]/U$，其中 $N_{总}$ 是粒子总密度，U 是配分函数(参看第三章)，χ_n 是从基态到能级 n 的激发能量。由此可见，在谱线频率 ν_{mn} 处，在局部热动平衡条件下，(2-65)式成为：

$$\alpha_{\nu_{mn}}(局部热动平衡)=\frac{c^2}{8\pi\nu_{mn}^2}\frac{N_m}{\Delta\nu_L}\left[\exp\left(\frac{h\nu_{mn}}{kT}\right)-1\right]A_{mn}。\tag{2-69}$$

在无线电频段，因子 $[1-\exp(-h\nu_{mn}/kT)]$ 成为 $h\nu_{mn}/kT$；而在光学频段，此值近似为1。因此，例如(2-67)式成为：

$$\int_0^{\infty}\alpha_\nu d\nu\approx\frac{\pi e^2}{mc}f_{nm}N_n\quad(当\ h\nu_{mn}\gg kT)。\tag{2-70}$$

这个结果表明，如果 N_n 是常数，则不管引起谱线增宽的物理过程如何，被积的吸收系数是常数。利用(2-32)、(2-33)及(2-40)式，在局部热动平衡条件下，谱线频率为 ν_{mn} 的自吸收系数 $\alpha_{\nu_{mn}}$(局部热动平衡)也可以写成下列形式：

$$\begin{aligned}\alpha_{\nu_{mn}}(局部热动平衡)&=\frac{8\pi^3\nu_{mn}}{3hc}|\mu_{mn}|^2\frac{N_m}{\Delta\nu_L}\left[\exp\left(\frac{h\nu_{mn}}{kT}\right)-1\right]\\&=\frac{8\pi^3\nu_{mn}}{3hc}\left|\frac{S_{mn}}{g_m}\right|\frac{N_m}{\Delta\nu_L}\left[\exp\left(\frac{h\nu_{mn}}{kT}\right)-1\right]\\&=\frac{\pi e^2}{mc}f_{nm}\frac{N_n}{\Delta\nu_L}\left[1-\exp\left(\frac{-h\nu_{mn}}{kT}\right)\right],\end{aligned}\tag{2-71}$$

式中 μ_{mn} 是偶极矩阵元，S_{mn} 是偶极强度，g_m 是第 m 能级的统计权重，我们记住第 m 能级的粒子数密度 N_m 也由下式给出：$N_m=g_mN_{总}\exp[-\chi_m/(kT)]/U$，其中 $N_{总}$ 是粒子的总密度，χ_m 是在基态以上第 m 能级的激发能量，U 是配分函数。

2.9. 在局部热动平衡条件下的谱线强度

在局部热动平衡条件下，来自厚度为 L 的均匀和各向同性等离子体的一条谱线中心处的光学深度是：

$$\tau_{\nu_{mn}}(L)=L\alpha_{\nu_{mn}}\quad(局部热动平衡),\tag{2-72}$$

式中只考虑了谱线的自吸收，$\alpha_{\nu_{mn}}$(局部热动平衡)是由(2-69)或(2-71)式给出。利用辐射转移方程(2-64)以及(2-71)与(2-72)式，由光学薄的等离子体所发射的谱线中心处的强度 $I(\nu_{mn}, 0)$ 为：

$$I(\nu_{mn},\ 0)=B_{\nu_{mn}}(T)\frac{\pi e^2 f_{nm}}{mc\Delta\nu_L}\left[1-\exp\left(\frac{-h\nu_{mn}}{kT}\right)\right]LN_n, \tag{2-73}$$

式中 $B_{\nu_{mn}}(T)$ 是温度为 T 的黑体的亮度，并由(2-62)式给出。一旦算出振子强度 f_{mn}，并测出了强度 $I(\nu_{mn},\ 0)$ 及谱线宽度 $\Delta\nu_L$，利用(2-73)式就可以得出柱密度 LN_n。

实际上，除了谱线辐射以外，天线也观测到云本身的连续辐射 C、从云后面的分立源来的连续辐射、从银河普遍背景来的连续辐射 B 以及各向同性 3 开辐射。设各自的亮度温度分别是 T_C、T_S 及 T_B，两个分立源所张的立体角是 Ω_S 及 Ω_C，一台具有效率为 η_A 及射束立体角为 Ω_A 的天线将观测到天线温度

$$T_A=\eta_A T_{0C}+\eta_A T_{0e}[1-\exp(-\tau_{\nu_{mn}})]+\eta_A[T_{0S}+T_B]\exp(-\tau_{\nu_{mn}}), \tag{2-74}$$

式中 $T_{0e}=T_{激发}$ 或 $T_{激发}\Omega_C/\Omega_A$ 按 $\Omega_C>$ 或 $<\Omega_A$ 而定；

$T_{0C}=T_C$ 或 $T_C\Omega_C/\Omega_A$ 按 $\Omega_C>$ 或 $<\Omega_A$ 而定

以及 $T_{0S}=T_S$ 或 $T_S\Omega_S/\Omega_A$ 按 $\Omega_S>$ 或 $<\Omega_A$ 而定，

式中 $T_{激发}$ 是谱线辐射的激发温度或自旋温度。当接收机是在频率 ν_{mn} 和另一与 ν_{mn} 不同的频率间转换频率时，观测到的天线温度差是：

$$\begin{aligned}\Delta T_A&=\eta_A[T_{0e}-(T_{0S}+T_B)][1-\exp(-\tau_{\nu_{mn}})]\\&\approx\eta_A[T_{0e}-(T_{0S}+T_B)]\tau_{\nu_{mn}}\quad(\text{当 }\tau_{\nu_{mn}}\ll1)。\end{aligned} \tag{2-75}$$

当 $T_{0e}\gg T_{0S}+T_B$ 时，我们看到的是发射线；当 $T_{0e}\ll T_{0S}+T_B$ 时，我们看到的是吸收线。

对于处于局部热动平衡状态光学薄的气体($\tau_{mn}\ll1$)的特殊情况，并且在射电频段($h\nu_{mn}\ll kT$)的发射情况下，(2-71)、(2-72)及(2-75)式给出：

$$\Delta T_A\Delta\nu_L=\eta_A\frac{\pi e^2 h}{mc}\frac{\nu_{mn}}{k}\frac{LN_{总}}{U}g_n f_{nm}, \tag{2-76}$$

式中我们假设 $\Omega_C>\Omega_A$。在这种情况，谱线轮廓线下的面积给出了 $LN_{总}$ 的直接测量，$LN_{总}$ 是长度为 L 的单位截面积的柱体内的原子数目，它们正以频率 ν_{mn} 辐射。

对于处于局部热动平衡状态光学薄的气体($\tau_{mn}\ll1$)的特殊情况，并且在光学频段($h\nu_{mn}\gg kT$)的吸收情况下，(2-71)、(2-72)及(2-75)式给出：

$$\frac{\Delta T_A\Delta\nu_L}{T_0}=-\eta_A\frac{\pi e^2}{mc}\frac{LN_{总}}{U}g_n f_{nm}\exp\left(\frac{-\chi_m}{kT}\right), \tag{2-77}$$

式中 T_0 是背景连续辐射温度，并且我们已假定 $\Omega_S>\Omega_A$。在这种情况，谱线轮廓的归一化面积(等值宽度)给出 $LN_{总}$ 的一种量度。详细情况则取决于谱线致宽函数的实际形式。但是，从同一天体来的各条谱线的等值宽度的比较，能够得出天体内各种元素的相对丰度。在恒星大气中，谱线强度的计算必定涉及到散射和吸收这两种效应，这些效应将在第 2.16 节中详细讨论。光致电离、自由-自由跃迁和散射产生的连续辐射和谱线辐射的吸收由(2-61)和(2-72)式以及在第 1.30 节、第 1.31 节及第 1.37 节中所给出的吸收散射截面描述。

2.10. 局部热动平衡条件不满足时的谱线强度

令 b_n 表示能级 n 的实际粒子数与局部热动平衡条件下的粒子数(由沙哈-玻耳兹曼方程(3-126)式得出)之比，则在 m-n 跃迁的频率 ν_{mn} 时的吸收系数为(Goldberg, 1966)：

$$\alpha_{\nu_{mn}}=b_n\beta_{nm}\alpha_{\nu_{mn}}\quad(\text{局部热动平衡}), \tag{2-78}$$

式中

$$\beta_{nm}=\frac{1-(b_m/b_n)\exp(-h\nu_{mn}/kT)}{1-\exp(-h\nu_{mn}/kT)},$$

而局部热动平衡条件下的吸收系数 $\alpha_{\nu_{mn}}$(局部热动平衡)由(2-69)或(2-71)式给出。发射系数由下式给出：

$$\varepsilon_{\nu_{mn}}=b_m\alpha_{\nu_{mn}}(\text{局部热动平衡})B_{\nu_{mn}}(T), \tag{2-79}$$

式中 $B_{\nu_{mn}}(T)$ 是温度为 T 的黑体亮度，并且为：

$$B_{\nu_{mn}}(T)=\frac{2h\nu_{mn}^3}{c^2}\frac{1}{[\exp(h\nu_{mn}/kT)-1]}。$$

把 $\alpha_{\nu_{mn}}$(局部热动平衡)的(2-71)式用于(2-78)式，我们得出：

$$\alpha_{\nu_{mn}}=\frac{\pi N_n e^2 f_{nm} b_n}{mc\Delta\nu_L}\left[1-\left(\frac{b_m}{b_n}\right)\exp\left(\frac{-h\nu_{nm}}{kT}\right)\right], \tag{2-80}$$

式中 f_{nm} 是 $n-m$ 跃迁的振子强度，$\Delta\nu_L$ 是谱线宽度，N_n 是第 n 能级的粒子数。这个方程简化为：

$$\alpha_{\nu_{mn}}\approx\alpha_{\nu_{mn}}(\text{局部热动平衡})\quad(\text{当 }\nu\gg10^{10}T)$$

和

$$\alpha_{\nu_{mn}}\approx N_n\frac{\pi e^2 f_{nm}}{mc\Delta\nu_L}\frac{h\nu_{mn}}{kT}b_m\left\{1-\left(\frac{kT}{h\nu_{mn}}\right)\left(\frac{b_m-b_n}{b_m}\right)\right\}\quad(\text{当 }\nu\ll10^{10}T), \tag{2-81}$$

式中

$$\frac{b_m-b_n}{b_n}\approx(m-n)\frac{d\ln b_n}{dn}。$$

在低频段，吸收系数对能级上粒子数的很小变化是极为敏感的。若 b_m-b_n 大于 $b_m h\nu_{mn}/(kT)$，吸收系数就成为负值，这就为谱线的微波激射放大提供了条件。

能级 n 的粒子数 N_n 可由统计平衡方程

$$N_n\sum_{m=1}^{\infty}P_{nm}=N_cP_{cn}+\sum_{m=1}^{\infty}N_mP_{mn} \tag{2-82}$$

确定，式中 P_{mn} 表示单位时间内从能级 m 到能级 n 的跃迁几率，下标 c 表示是连续谱。下面给出几种确定能级粒子数分布的可能过程以及它们的几率。

1) 能级间的自发跃迁　单位时间内从一个高能级 m 跃迁到低能级 n 的自发跃迁几率是 A_{mn}，即自发辐射的爱因斯坦系数，在第 2.12 节中给出了类氢原子的 A_{mn} 值。

2) 能级间的辐射感应跃迁　单位时间内高能级 m 与低能级 n 间的辐射感应跃迁几率为：

$$B_{mn}U_\nu\quad\text{或}\quad B_{nm}U_\nu, \tag{2-83}$$

其中 B_{mn} 及 B_{nm} 是由在频率 ν 到 $\nu+d\nu$ 的范围内、能量密度为 $U_\nu d\nu$ 的辐射所引起的感应跃迁的爱因斯坦发射系数。A_{mn}、B_{mn}、B_{nm} 之间的关系为(2-27)和(2-28)式。

3) 辐射感应电离　当由频率为 ν 的辐射所引起的光致电离的吸收截面为 σ_ν 时，由(1-230)式可知，对类氢原子来说，每单位时间辐射感应电离的几率为：

$$P_{nc}=\int_0^\infty\frac{cU_\nu\sigma_\nu d\nu}{h\nu}\approx1.3\times10^{66}Z^4\int_0^\infty\frac{U_\nu d\nu}{\nu^4n^5}\ \text{秒}^{-1}, \tag{2-84}$$

这里 $h\nu$ 是光子能量，U_ν 是辐射的能量密度，n 是未电离原子的能级。

4) 离子与电子的辐射复合　单位时间内的辐射复合几率是：

$$P_{cn}=N_e\int_0^\infty\sigma_r(v,n)\left[1+\frac{c^3U_\nu}{8\pi h\nu^3}\right]vf(v)dv, \tag{2-85}$$

式中 N_e 是自由电子密度，U_ν 是频率为 ν 的辐射能量密度，$f(v)$ 是速度分布函数，$\sigma_r(v,n)$ 是速度为 v 的一个自由电子与一个离子复合形成一个处在能级 n 上的原子的截面。利用米尔恩(Milne, 1921)关系式：

$$\sigma_r(v,\ n)=\frac{h^2 g(n)\nu^2}{m^2c^2 g(1)v^2}\sigma_\nu, \tag{2-86}$$

式中 $g(n)$是能级 n 的统计权重，σ_ν 是从能级 n 上被光致电离的截面，对类氢原子则由(1-230)式给出，并且其中 $g(n)=2n^2$。

5) 能级间的碰撞感应跃迁 单位时间内能级 m 与 n 间碰撞感应跃迁几率是：

$$P_{mn}=N\gamma_{mn}=N\int_0^\infty \sigma_{mn}(v)\,vf(v)\,dv, \tag{2-87}$$

式中 N 是碰撞粒子的密度，γ_{mn} 称为碰撞激发率系数，$\sigma_{mn}(v)$ 是与速度为 v 的一个粒子碰撞的碰撞截面，$f(v)$是速度分布函数。例如，对于温度为 T 的麦克斯韦分布，我们有(3-114)式：

$$f(v)dv=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}v^2\left(\frac{m_r}{kT}\right)^{3/2}\exp\left[-\frac{m_rv^2}{2kT}\right]dv, \tag{2-88}$$

式中折合质量 $m_r=m_am_p/(m_a+m_p)$，m_a 和 m_p 分别是原子质量和碰撞粒子质量。碰撞激发的细致平衡方程是：

$$g_m\gamma_{mn}=g_n\gamma_{nm}\exp\left[\frac{-h\nu_{mn}}{kT}\right], \tag{2-89}$$

式中 g_m 是第 m 能级的统计权重，γ_{mn} 是碰撞去激发率系数。

碰撞截面 $\sigma_{mn}(v)$ 经常以碰撞强度 $\Omega(m,\ n)$来表示(Hebb 和 Menzel, 1940; Seaton, 1958)：

$$\sigma_{mn}(v)=\frac{\pi}{g_m}\left(\frac{h}{2\pi m_e v}\right)^2\Omega(m,\ n), \tag{2-90}$$

式中 $\Omega(m,\ n)$对大多数碰撞来说量级为 1，v 是粒子在碰撞前的速度。当然，碰撞截面的另一种估计就是几何截面 πa^2，其中 a 是原子半径。对于振子强度为 f_{mn} 的电偶极矩跃迁，碰撞强度 $\Omega(m,\ n)$ 由下式给出(Seaton, 1962)：

$$\Omega(m,\ n)\approx\frac{1.6\pi}{3^{1/2}}\ \frac{g_nf_{nm}E_1}{h\nu_{mn}}, \tag{2-91}$$

式中 $h\nu_{mn}$ 是 m–n跃迁的能量，E 是中性氢原子的结合能。所以在自由电子为麦克斯韦速度分布的情况下，类氢原子的 P_{nm} 的近似表达式为(Seaton, 1962)：

$$P_{nm}\approx 4\pi a_0^2\left(\frac{8kT}{m}\right)^{1/2}\left(\frac{E_1}{kT}\right)^2\left[\frac{\exp(-\chi_{nm})}{\chi_{nm}}-1\right]3f_{nm}N_e, \tag{2-92}$$

式中 $\pi a_0^2=$*8.797350×10⁻¹⁷ 厘米²，$\chi_{nm}=h\nu_{mn}/(kT)$，P_{nm} 和 P_{mn} 以下式相联系：

$$n^2\exp(\chi_n)P_{nm}=m^2\exp(\chi_m)P_{mn}, \tag{2-93}$$

当没有电偶极矩跃迁时，$\Omega(m,\ n)$与速度无关，由(2-87)和(2-90)式得出：

$$P_{mn}\approx\frac{N_eh^2\Omega(m,\ n)}{g_m(2\pi m_e)^{3/2}(kT)^{1/2}}={}^*8.629152\times10^{-6}T^{-1/2}N_e\frac{\Omega(m,\ n)}{g_m}\ \text{厘米}^3\cdot\text{秒}^{-1}, \tag{2-94}$$

上式适用于与密度为 N_e、速度分布为麦克斯韦分布的自由电子碰撞的情况。这个估计值适用于正离子的碰撞去激发，而碰撞激发率则由(2-93)和(2-94)式给出。在第 2.11 节的表 8 中给出了氧、氮、氖、硫、氩有名的禁戒跃迁的碰撞强度。

6) 热电子的碰撞电离和三体复合的逆过程 单位时间内一个类氢原子的碰撞激发电离的几率，由下述半经验公式(Seaton, 1960; Jeffries, 1968)给出：

$$P_{nc}\approx 7.8\times10^{-11}T_e^{1/2}n^3\exp(-\chi_n)N_e\ \text{秒}^{-1}, \tag{2-95}$$

式中 n 是能级的主量子数，χ_n 是从基态到第 n 能级的电离电势，以 kT_e 为单位，N_e是自由电子密度。这里细致平衡原理给出：

$$P_{cn}=\frac{N_e h^3}{(2\pi mkT_e)^{3/2}}n^2\exp(\chi_n)P_{nc},\tag{2-96}$$

式中第 n 能级的统计权重是 $g_n=2n^2$。

7) 一个离子与一个电子的双电子复合形成一种双重激发原子继之以辐射跃迁到单受激态 具有一个或更多电子的复离子可以与一个电子复合形成一个原子，该原子通过中间双重激发态 $j,\ nl$ 而处于能级 $i,\ nl$。在这种情况下，统计平衡方程((2-82)式)的右边必须增添一项：

$$\sum_j\sum_i N_{j,nl}b(j,\ nl)A_{ji}。\tag{2-97}$$

能态 $j,\ nl$ 上的粒子数与其热动平衡值 $N_{j,nl}$ 相差一个因子 $b(j,\ nl)$ (Bates 和 Dalgarno, 1962; Davies 和 Seaton, 1969)：

$$b(j,\ nl)=\frac{Aa}{Aa+Ar},\tag{2-98}$$

式中 Aa 是能级 $j,\ nl$ 的自电离的几率系数，$A_r=A_{ji}$ 是 $j,\ nl\to i,\ nl$ 跃迁的辐射几率系数，平衡粒子数 $N_{j,nl}$ 由沙哈-玻耳兹曼(Saha-Boltzmann)方程，即(3-127)式给出：

$$\begin{aligned}N_{j,nl}&=N_iN_e\frac{h^3}{(2\pi mkT)^{3/2}}\frac{g_{j,nl}}{2g_{i,nl}}\exp\left(\frac{-h\nu_{ij}}{kT}\right)\\&=^*2.070683\times10^{-16}N_iN_eT^{3/2}\frac{g_{j,nl}}{g_{i,nl}}\exp\left(\frac{-h\nu_{ij}}{kT}\right)\text{厘米}^{-3},\end{aligned}\tag{2-99}$$

式中 N_i 和 N_e 分别是离子和电子密度，$g_{i,nl}$ 是能级 $i,\ nl$ 的统计权重，$h\nu_{ij}$ 是 i-j 跃迁的能量。

能级粒子数 N_n 或与此相当的 b_n 在高温(5000 开$<T<$10000 开)电离氢区情况下的值，已由谢雅诺夫斯基等(Sejnowski 和 Hjellming, 1969; 以及 Brocklehurst, 1970)按照电子密度为 10 厘米$^{-3}<N_e<10^4$ 厘米$^{-3}$ 而计算得出。这些计入上述(1)至(6)各种过程结果的 b_n 值已被用来计算氢谱线温度与连续谱温度的比值 (Andrews 和 Hjellming, 1969; Hjellming, Andrews 和 Sejnowski, 1969)。一般说来，当 n 值大于 60，在局部热动平衡以外，比值是增高的，增高的量随区域中的电子密度、温度及区域的尺度而定。所观测到的氢复合谱线强度与非热动平衡理论的更细致的比较是对猎户星云作出的 (Hjellming 和 Gordon, 1971)，这些观测与非热动平衡的理论结果是一致的。观测上把 $n+1\to n$ 跃迁的中心谱线强度与相邻的较高能级 $m+\Delta m\to m$ 跃迁的比值 ρ 与下列局部热动平衡值比较：

$$\rho_{\text{局部热动平衡}}=\frac{n^2f_{n,\ n+1}}{m^2f_{m,\ m+\Delta m}},\tag{2-100}$$

式中振子强度 $f_{m,m+\Delta m}$，当 $\Delta m=1$、2、3、4 和 5 时分别$\approx$0.194、0.0271、0.00841、0.00365 和 0.00191(Menzel, 1969)。双电子复合已用来解释日冕温度 (Burgess, 1964, 1965; Burgess 和 Seaton, 1964)，以及解释在射电频率区的碳谱线的反常强度(Palmer 等, 1967; Goldberg 和 Dupree, 1967; Dupree, 1969)。

2.11. 禁线、复合光谱、巴耳末减幅和行星状星云

某些极其炽热的恒星在紫外波段按照(1-230)式给定的截面辐射出的能量足以使周围的气体电离。在光致电离以后，抛射出来的电子由于非弹性碰撞而损失能量，并伴随着发射辐射。因此建立了温度为 T_e 的电子速度的麦克斯韦(Maxwell)分布(Bohm 和 Aller, 1947)。正如鲍恩(Bowen, 1928)所首先提出的，在星云中观测到的禁线是由电子碰撞所激发的。由(2-94)式可知，当电子为麦克斯韦分布时，每秒钟从能级 m 到能级 n 的碰撞去激活作用的几率 a_{mn} 由下式给出：

$$a_{mn}=\frac{{}^{*}8.629152\times10^{-6}}{g_m T_e^{1/2}}N_e\Omega(n,\ m)\ 厘米^3\cdot秒^{-1}\quad(当\ E_n<E_m),\qquad(2\text{-}101)$$

式中 g_m 是能级 m 的统计权重，N_e 是电子密度，因为这是对大多数正离子而言，已假定碰撞强度 $\Omega(n,\ m)$ 与能量无关。对于碰撞激发，每秒钟的几率 b_{mn} 由下式给出：

$$b_{nm}=\frac{g_m}{g_n}a_{mn}\exp\left[-\frac{(E_m-E_n)}{kT_e}\right]\quad(当\ E_n<E_m)。\qquad(2\text{-}102)$$

大多数观测到的禁线是由于处在基态组态内的具有 $2p^q$ 或 $3p^q$ 电子的原子或离子的跃迁所引起的，其中 $q=2$、3、4。这些组态具有按激发能增加的次序而用数字 1、2 和 3 来表示的光谱项。

数　　字	$q=2$ 和 4	$q=3$
3	^1S	^2P
2	^1D	^2D
1	^3P	^4S

表 8　最丰富元素的禁戒跃迁的波长 λ_{ij}、跃迁几率 A_{ij} 及碰撞强度 $\Omega(i,j)$[1]

元　素	λ_{21} (埃)	A_{21} (秒$^{-1}$)	$\Omega(1,2)$	λ_{31} (埃)	A_{31} (秒$^{-1}$)	$\Omega(1,3)$	λ_{32} (埃)	A_{32} (秒$^{-1}$)	$\Omega(3,2)$
OII	3,728.8	4.8×10^{-5}	1.43	2,470.4	0.060	0.428	7,319.4	0.115	1.70
	+3,726.0	$+1.70\times10^{-4}$		+2,470.3	+0.0238		+7,330.7	+0.061	
							+7,318.6	+0.061	
							+7,329.9	+0.100	
OIII	5,006.8 (N_1)	0.021	2.39	2,321.1	0.23	0.335	4,363.2	1.60	0.310
	+4,958.9 (N_2)	+0.0071							
NII	6,583.4	0.003	3.14	3,063.0	0.034	0.342	5,754.6	1.08	0.376
	+6,548.1	+0.00103							
NeIII	3,868.8	0.17	1.27	1,814.8	2.2	0.164	3,342.5	2.8	0.188
	+3,967.5	+0.052							
NeIV	2,441.3	5.9×10^{-4}	1.04	1,608.8	1.33	0.427	4,714.3	0.40	1.42
	+2,438.6	$+5.6\times10^{-3}$		+1,609.0	+0.53		+4,724.2	+0.44	
							+4,715.6	+0.11	
							+4,725.6	+0.39	
NeV	3,425.9	0.38	1.38	1,575.2	4.2	0.218	2,972	2.60	0.185
	+3,345.8	+0.138							
SII	6,716.4	4.7×10^{-5}	3.07	4,068.6	0.34	1.28	10,320.6	0.21	6.22
	+6,730.8	$+3.0\times10^{-4}$		+4,076.4	+0.134		+10,287.1	+0.17	
							+10,372.6	+0.087	
							+10,338.8	+0.20	
SIII	9,532.1	0.064	4.97	3,721.7	0.85	1.07	6,312.1	2.54	0.961
	+9,069.4	+0.025		+3,796.7	+0.016				
ArIII	7,135.8	0.32	4.75	3,109.0	4.0	0.724	5,191.8	3.1	0.665
	+7,751.0	+0.083		+3,005.1	+0.043				
ArIV	4,740.2	0.028	1.43	2,854.8	2.55	0.645	7,237.3	0.67	4.92
	+4,711.3	0.0022		+2,869.1	+0.97		+7,170.6	+0.91	
							+7,332.0	+0.122	
							+7,262.8	+0.68	
ArV	7,005.7	0.51	1.19	2,691.4	6.8	0.141	4,625.5	3.78	0.945
	+6,435.1	+0.22		+2,784.4	+0.081				

[1] 取自加斯坦等(Garstang, 1968; 以及 Czyzak 等, 1968)的文献。

表 8 给出一些经常观测到的禁戒跃迁的碰撞强度值 $\Omega(1, 2)$、$\Omega(1, 3)$和 $\Omega(2, 3)$。齐扎克等(Czyzak 等, 1968)给出了更完整的一组碰撞强度。

$m \to n$ 跃迁的强度 I_{mn} 由下式给出:

$$I_{mn}=N_m A_{mn} h\nu_{mn}, \tag{2-103}$$

式中 N_m 是能级 m 的粒子数, A_{mn} 是自发跃迁几率, 而 ν_{mn} 是 $m \to n$ 跃迁的频率。粒子数 N_m 是由统计平衡方程(2-82)式确定的,该方程已把碰撞激发和自发跃迁都考虑进去了。例如,粒子数 N_2 和 N_3 的关系为:

$$\frac{N_2}{N_3}=\frac{b_{12}(A_{31}+a_{31})+(b_{12}+b_{13})(A_{32}+a_{32})}{b_{12}(b_{12}+b_{13})+b_{13}(A_{21}+a_{21})}。 \tag{2-104}$$

在表 8 中还给出了经常观测到的禁线的自发跃迁几率 A_{mn} 和波长 λ_{mn}。加斯坦(Garstang, 1968)给出了更为完整的一组波长和跃迁几率。由(2-101)至(2-104)式可知,所观测到的谱线强度的比值可得出电子密度 N_e 与电子温度 T_e 间的关系式。因为对典型的行星状星云来说, $N_e \approx 10^4$ 厘米$^{-3}$ 和 $T_e \approx 10^4$ 开,习惯上采用由下列关系式所定义的变数 x 和 t:

$$x=\frac{0.01 N_e}{T_e^{1/2}}=\frac{10^{-4} N_e}{t^{1/2}}, \tag{2-105}$$

所以对于典型的星云 $x \approx t \approx 1$。利用(2-101)至(2-105)式以及表 8 给出的常数,就得到下列关系式(Seaton, 1960; Aller 和 Czyzak, 1958):

对于[OIII]:

$$\frac{I(\lambda 4959)+I(\lambda 5007)}{I(\lambda 4363)}=\frac{7.15}{1+0.028x} D\left(\frac{14300}{T_e}\right);$$

[OII]:

$$\frac{I(\lambda 3729)+I(\lambda 3726)}{I(\lambda 7320)+I(\lambda 7330)}=\frac{5.5}{\varepsilon}\left[\frac{1+0.36\varepsilon+5.3x(1+0.82\varepsilon)}{1+13.8x(1+0.38\varepsilon)+38.4x^2(1+0.78\varepsilon)}\right],$$

$$\frac{I(\lambda 3729)}{I(\lambda 3726)}=1.5\left[\frac{1+0.33\varepsilon+2.30x(1+0.75\varepsilon)}{1+0.40\varepsilon+9.9x(1+0.84\varepsilon)}\right]; \tag{2-106}$$

[NII]:

$$\frac{I(\lambda 6548)+I(\lambda 6584)}{I(\lambda 5755)}=\frac{8.5}{1+0.29x} D\left(\frac{10800}{T_e}\right);$$

[SII]:

$$\frac{I(\lambda 4068)+I(\lambda 4076)}{I(\lambda 6716)+I(\lambda 6730)}=0.164\left\{3.8+x\left[1+1.32D\left(-\frac{6000}{T}\right)\right]\right\}D\left(-\frac{6000}{T}\right),$$

式中

$$D(y)=10^y; \quad \varepsilon=\exp\left(-\frac{1.96}{t}\right)。$$

图 8 中画出了用于[OII]、[OIII]、[NII]、[NeIII]、[NeV]、[SII]的这些关系曲线。阿勒尔等(Aller 和 Czyzak, 1968) 给出了关于处在各种电离级的离子丰度的类似关系式。表 9 中给出了著名的那些行星状星云的 N_e 和 T_e 以及其他参数的测量值。

令热能 kT_e 等于禁线的约 2 电子伏的激发能即可求得电子温度 T_e 的近似值: $T_e \approx 10^4$ 开。一个更为精确的方法是测量氢和氦的容许跃迁发射线的相对强度。由(2-82)及(2-101)至(2-103)式可知,所观测到 $m \to n$ 跃迁的强度 I_{mn} 为:

$$I_{mn}=\varepsilon h\nu_{mn} N_e N_+ \alpha_{mn} \frac{R}{3\theta^2} \text{ 尔格·厘米}^{-2}\text{·秒}^{-1}\text{·弧度}^{-2}, \tag{2-107}$$

式中填充因子 ε 表示所观测到的星云体积的百分比, 观测到的这部分体积是被发射谱线的原子或离子所占据, N_e 是电子密度, N_+ 是原子或离子密度, ν_{mn} 是 $m \to n$ 跃迁的频率, R

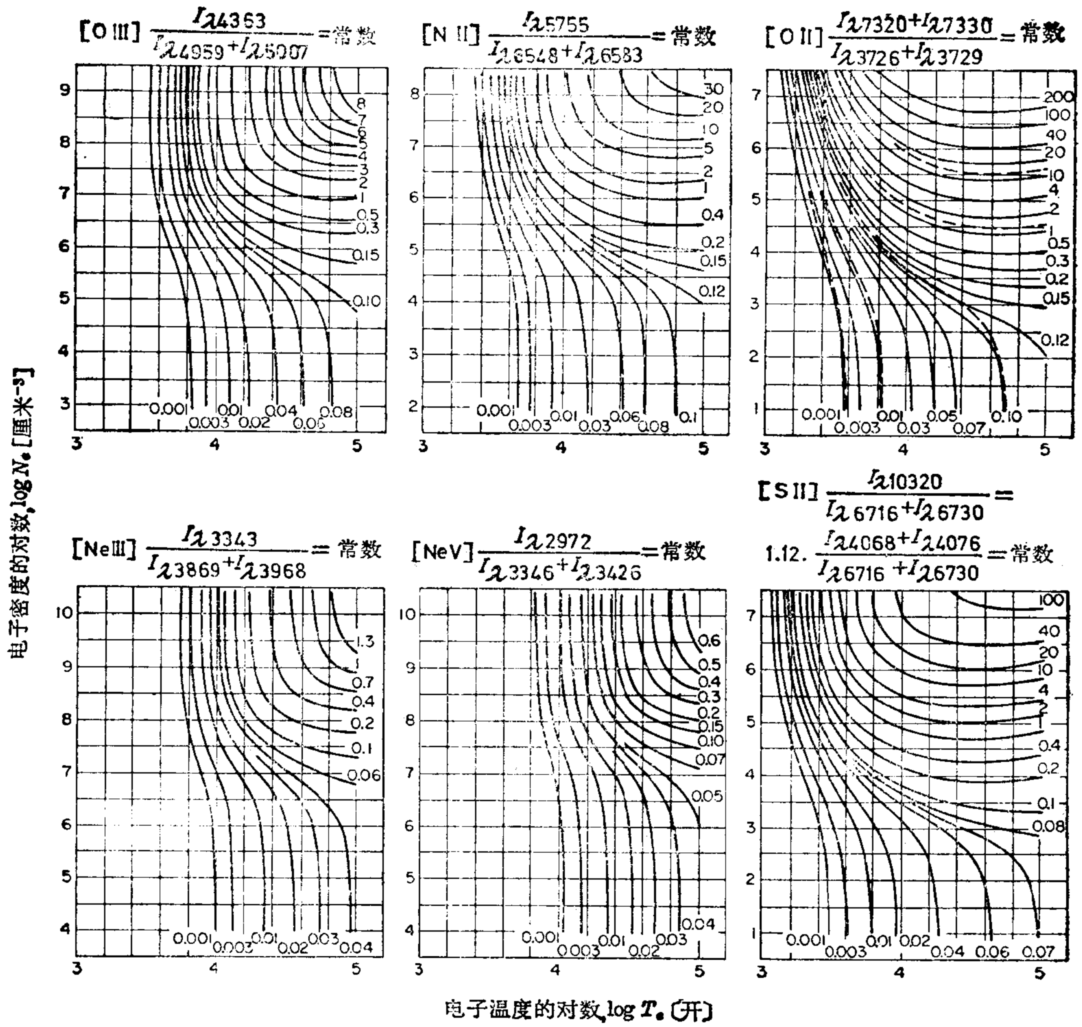


图 8 禁戒跃迁的谱线强度比作为电子密度 N_e 及电子温度 T_e 的函数的曲线
(取自 Boyarchuk, Gershberg, Godovnikov 和 Pronik, 1969)

和 θ 分别表示星云的半径和角范围, α_{mn} 是有效复合系数。

利用统计平衡方程(2-82)式, 以及米尔恩(Milne, 1921)给出的复合截面 $\sigma_r(\nu, n)$ ((1-233)式), 或克喇末等(Kramers, 1923; Menzel 和 Pekeris, 1935; Burgess, 1958)给出的光致电离截面 $\sigma_a(\nu, n)$ ((1-230)式)和辐射跃迁几率 A_{mn}, 就可算出复合系数。类氢原子的有效复合系数 $\alpha_{mn}(T_e)$ 由下式给出(Baker 和 Menzel, 1938):

$$\alpha_{mn}(T_e)=\frac{10.394\times10^{-14}g_{bb}(m,\ n)}{mn(m^2-n^2)}Z\lambda^{3/2}b_m\exp(x_m)\ \text{厘米}^3\cdot\text{秒}^{-1},\qquad(2\text{-}108)$$

式中克喇末-冈特束缚-束缚因子 $g_{bb}(m, n)$ 和平衡偏离系数 b_m 已有贝克等(Baker 和 Menzel, 1938; Green, Rush 和 Chandler, 1957)列表给出, Z 是原子的核电荷,

$$\lambda=\frac{Z^2I_H}{kT_e}={}^*157888\frac{Z^2}{T_e},$$

其中氢的电离电势 $I_H={}^*13.605804$ 电子伏, 同时

$$x_m=\frac{I_m}{kT_e}=\frac{\lambda}{m^2},$$

表9 90个行星状星云的方位、角半径、在地球上接收到的 Hβ 通量 $F(H\beta)$、消光、电子密度 N_e、电子温度 T_e、激发种类、视目视星等 V 或照相星等 m_p 及中心星温度 T_c[1]

星云	名称	α (1950.0)			δ (1950.0)		半径	log F(Hβ)	消光	log N_e			激发	V 或 m_p	T_c
		h	m	s	°	′	(角秒)	(尔格·厘米⁻²·秒⁻¹)		(F) (厘米⁻³)	(A_v) (厘米⁻³)	T_e (开/10⁴)	类型	(星等)	(开/10³)
NGC40	120 +9°1	0	10	17	+72	15	18.2	−10.64	0.82	3.0[1]		{(1.2), 0.8	2	11.6	34
Hu1-1	119 −6°1	0	25	30	+55	41	2.5	−11.73	0.32		4.0	1.14	6	—	
NGC246	118 −74°1	0	44	30	−12	09	118.0	−10.20	0.00		2.0	(1.0)		11.92	52
NGC650-1	130 −10°1	1	39	12	+51	19	32.0	−10.67	0.13		2.75	1.23		17.0p:	157
IC1747	130 +1°1	1	53	58	+63	05	6.4	−11.45	0.94	3.52[1]		1.1	6.2	15p:	40
IC289	138 +2°1	3	06	16	+61	08	22.5	−11.67	1.1		3.09	1.63	10	16.8p:	45
IC351	159 −15°1	3	44	20	+34	54	3.5	−11.40	0.57		3.94	1.27	8	15p:	75
IC2003	161 −14°1	3	53	12	+33	43	2.5	−11.18	0.53		3.71	1.07	8	··	
NGC1501	144 +6°1	4	02	42	+60	47	27.0	−11.26	1.10		3.28	(1.0)		14.3	70
NGC1514	165 −15°1	4	06	08	+30	39	50.0	(−10.70)	0.71		2.92	1.4		9.5	74
NGC1535	206 −40°1	4	11	51	−12	52	9.2	−10.36	0.00		3.95	1.3	7	11.6	41
J320	190 −17°1	5	02	49	+10	38	3.2	−11.37	0.27		3.34	1.5	5	13.5:	40
IC418	215 −24°1	5	25	10	−12	44	6.2	− 9.53	0.23	4.40[1]	4.30	1.13	3	9.7	42
NGC2022	196 −10°1	5	39	24	+9	04	9.8	−11.15	0.45	3.10[1]		1.3	10	14.9	107
IC2149	166 +10°1	5	52	36	+46	07	4.3	−10.50	0.10	3.38[1]	3.51	1.25	4	10.5p:	44
IC2165	221 −12°1	6	19	23	−12	57	4.0	−10.87	0.51	3.50[1]	3.60	1.22	9	—	55
J900	194 +2°1	6	23	01	+17	49	4.7	−11.27	0.73		4.25	1.19	7	—	
NGC2346	215 +3°1	7	06	47	0	43	27.3	−12.39	1.67		3.07	(1.7)	7	10.8p:	
NGC2371-2	189 +19°1	7	22	24	+29	35	27.0	−10.96	0.00		3.05	1.95	9p	14.8	95
NGC2392	197 +17°1	7	26	11	+21	01	23.0	−10.39	0.15	3.96[1]	3.75	1.7	8p	10.5	65
NGC2438	231 +4°2	7	39	32	−14	37	34.0	−10.97	0.45		2.45	(1.5)		17.5p:	140
NGC2440	234 +2°1	7	39	41	−18	05	16.2	−10.45	0.48	3.55[1]	3.13	1.34	9	—	100
IC2448	285 −14°1	9	06	33	−69	44	4.5	−10.83	0.15		3.37	1.30	6	—	
NGC2792	265 +4°1	9	10	35	−42	14	6.5	−11.23	0.66		3.47	1.8	8	—	
NGC2867	278 −5°1	9	20	05	−58	06	6.2	−10.57	0.44		3.66	1.09	7	—	

[1] 这些资料是请美国洛杉矶加利福尼亚大学阿勒尔(L. H. Aller)教授选取的，取自下列文献 (Aller, 1956; Aller 和 Faulker, 1964; Aller 和 Liller, 1960; Böhm, 1968; Capriotti, 1964; Capriotti 和 Daub, 1960; Curtis, 1918; Higgs, 1971; Kaler, 1970; Liller, 1955; Liller 和 Aller, 1955; Milne 和 Aller, 1974[1]; Mottemann, 1972; O'Dell, 1962; O'Dell, 1963; Perek, 1971; Perek 和 Kohoutek, 1967; Wilson, 1950; 以及 Wilson, 1958)。由于不规则的或模糊的象而不确定的角半径值放在圆括号内。根据禁戒谱线数据得出的电子密度记在(F)栏内，而根据测定的表面亮度得出的电子密度则记在(Av)栏内。在后一情况时，填充因子取自卡勒(Kaler, 1970)的文章，而距离估计值则取自莫特曼(Mottemann, 1972)的论文或由所谓什克洛夫斯基方法求出。激发类型在阿勒尔(Aller, 1956)的书中给出，照相星等则在数字后用 p 标明。

（续表）

星云	名称	α (1950.0) h	m	s	δ (1950.0) °	′	半径 (角秒)	log F(Hβ) (尔格·厘米⁻²·秒⁻¹)	消光	log N_e (F) (厘米⁻³)	(Av) (厘米⁻³)	T_e (开/10⁴)	激发类型	V 或 m_p (星等)	T_c (开/10³)
NGC3132	272 +12°1	10	04	54	−40	12	(28)	−10.43	0.27		3.23	1.14	6p	8.8:	48
NGC3211	286 −4°1	10	16	12	−62	26	6.9	−10.99	0.27		3.47	1.30	8	—	
NGC3242	261 +32°1	10	22	22	−18	23	(20)	−9.77	0.18	3.8[1]		1.15	7	>11.3	92
NGC3587	148 +57°1	11	11	54	+55	17	101.0	−10.33	0.00		2.30			14.3p:	90
NGC3918	294 +4°1	11	47	48	−56	54	6.5	−9.99	0.36	4.0	4.2	1.32	7	—	
NGC4361	294 +43°1	12	21	54	−18	31	(55)	−10.48	0.00	3.60[1]		2.0	10	12.9	150
IC3568	123 +34°1	12	31	47	+82	50	9.0	−10.81	0.0	3.81	2.9	1.24	5	11.39	32
IC4406	319 +15°1	14	19	18	−43	55	17.0	−10.73	0.26		2.79	—	5	17:	
NGC5882	327 +10°1	15	13	30	−45	27	3.5	−10.40	0.46		3.95	—		—	
NGC6058	64 +48°1	16	02	42	+40	49	13.0	−11.70	0?		2.73	2.0		13.7	72
NGC6072	342 +10°1	16	09	41	−36	06	35.0	−11.37	1.05		2.54	—		17.5:	110
IC4593	25 +40°1	16	09	54	+12	12	6.0	−10.55	0.06		3.29	—	4	10.8	29
NGC6153	341 +5°1	16	28	00	−40	08	11.7	−10.85	0.93		3.84	1.56	6	—	
NGC6210	43 +37°1	16	42	24	+23	53	<8.0	−10.06	0.05	3.95	(3.51)	1.06	5	11.13	49
IC4634	0 +12°1	16	58	36	−21	44	4.2	−10.92	0.53		3.53	1.06	5	—	
IC4642	334 −9°1	17	07	38	−55	20	7.7	−11.34	0.25		3.29	2.17	10+	—	
NGC6302	349 +1°1	17	10	21	−37	02	22.3	−10.53	1.42	3.85	38	2.1	10+p	—	
NGC6309	9 +14°1	17	11	18	−12	51	7.5	−11.25	0.83	3.2~3.7		1.53	8	13:	94
NGC6326	338 −8°1	17	16	48	−51	42	5.9	−11.06	0.24		3.23	1.9	6.5	—	
NGC6369	2 +5°1	17	26	18	−23	43	14.3	−11.30	2.10		3.74			16:	79
NGC6445	8 +3°1	17	46	18	−20	00	16.6	−11.15	0.80	3.04		1.5	8	19:	180
NGC6543	96 +29°1	17	58	36	+66	38	10.0	−9.60	0.17	3.9	3.77	0.82	5	10.8	55
NGC6537	10 +0°1	18	02	18	−19	51	3.7	−11.71	1.77		3.58	2.15		—	
NGC6565	3 −4°5	18	08	43	−28	11	4.5	−11.23	0.31		3.96	1.15	6	—	
NGC6563	358 −7°1	18	08	44	−33	51	22.6	−10.96	0.34		2.79	—		18:	>100
NGC6572	34 +11°1	18	09	41	+6	50	6.2	−9.75	0.36	4.00	4.0	1.1	5	9.06	57
NGC6567	11 −0°2	18	10	48	−19	05	4.4	−10.95	0.68		3.82	1.09	5	—	64
NGC6578	10 −1°1	18	13	18	−20	28	4.8	−11.75	1.72		3.67	—		—	39
NGC6620	5 −6°1	18	19	47	−26	51	2.3	−12.31	0.92					—	36
NGC6629	9 −5°1	18	22	40	−23	14	7.5	−10.94	0.95		3.34	0.92	4	12.5p:	44

NGC6644	8 −7°2	18	29	30	−25	10	1.3	−11.10				—		—	
IC4732	10 −6°1	18	31	02	−22	39	2.0	−11.50	0.75		4.1:	1.7:	5	12.0*p*:	
IC4776	2 −13°1	18	42	36	−33	24	3.5	−10.77	0.08			—	6*p*	—	
NGC6720	63 +13°1	18	51	44	+32	58	35.0	−10.06	0.03	2.89	3.00	1.3	6*p*	14.7:	130
NGC6741	33 −2°1	19	00	00	−00	31	4.0	−11.49	1.26	3.50	3.60	1.1	8	—	
NGC6751	29 −5°1	19	03	12	−06	04	10.5	−11.25	0.40		3.29	1.5	7*p*	12.9	72
NGC6772	33 −6°1	19	12	00	−2	47	32.5	−11.65	1.07		3.80	—		18.7*p*	105
IC4846	27 −9°1	19	13	00	−9	05	(1.0)?	−11.33	0.53		4.6:	1.14	5		
NGC6778	34 −6°1	19	15	48	−1	40	8.0	−11.26	0.34	3.0	3.5	1.0	5	14.8*p*	55
NGC6781	41 −2°1	19	16	02	+6	27	53.0	−11.19	1.26		2.69	—		16.2*p*	65
NGC6790	37 −6°1	19	20	35	+1	25	3.7	−10.73	0.64		4.29	1.34	6	10.5*p*	
NGC6803	46 −4°1	19	28	54	+9	57	2.8	−11.15	0.71		4.13	1.02	6	14*p*:	44
NGC6804	45 −4°1	19	29	12	+9	07	16.0	−11.28	0.85		3.08	—		14.1	72
NGC6807	42 −6°1	19	32	06	+5	34	1.0?	−11.62	0.34		4.34	1.6	5	—	
BD+30°3639	64 +5°1	19	32	48	+30	24	1.5	−11.50	1.72	4.6	4.95	—	1	10.1	38
NGC6818	25 −17°1	19	41	06	−14	16	9.2	−10.26	0.01		3.8	1.8	9	>12	138
NGC6826	83 +12°1	19	43	27	+50	24	12.7	− 9.92	0.03	3.32	3.25	1.03	5	> 9.9	42
NGC6833	82 +11°1	19	48	21	+48	50	1.0:	−11.22	0.10		4.00:	1.3	4		
NGC6853	60 −3°1	19	57	24	+22	35	100(180)	− 9.44	0.00		3.47	1.3	7*p*	13.9	130
NGC6884	82 +7°1	20	08	49	+46	18	3.8	−11.11	0.44		3.46	1.11	6		
NGC6886	60 −7°2	20	10	30	+19	50	3.0	−11.50	0.94		3.93	1.2	8		90
NGC6891	54 −12°1	20	12	48	+12	33	6.3	−10.60	0.24	3.4	3.33	1.0	5	11.09*p*:	41
NGC6894	69 −2°1	20	14	23	+30	25	22.0	−11.46	0.56		2.54	—	6	17.5*p*	90
IC4997	58 −10°1	20	17	55	+16	35	0.8	−10.49	0.00	4.4	4.8	1.8	5	13.7*p*:	
NGC6905	61 −9°1	20	20	12	+19	57	21.5	−10.90	0.09		2.9	1.4	7	13.9*p*:	70
NGC7008	93 +5°2	20	59	05	+54	21	38.6	−10.86	0.61		2.73	1.4	7*p*	13.3	93
NGC7009	37 −34°1	21	01	30	−11	34	13.4	− 9.78	0.15	3.85	3.6	1.05	6	10.9	81
NGC7026	89 +0°1	21	04	35	+47	39	5.6	−10.90	0.80		3.3	1.0	6	15*p*:	97
NGC7027	84 −3°1	21	05	09	+42	02	7.1	−10.12	1.35	4.0～5.6	—	(1.3)	10*p*	—	>200
IC5117	89 −5°1	21	30	37	+44	22	1.0:	−11.71	1.38		4.0	1.22	6		
Anon21^h31^m	86 −8°1	21	31	07	+39	25	2.5	−11.20	0.61		3.02	1.9	10		>200
IC5217	100 −5°1	22	21	56	+50	43	3.4	−11.18	0.78	4.25	3.78	1.2	6	14.6*p*	50
NGC7293	36 −57°1	22	26	54	−21	03	330(400)	− 9.35	0.00		(2.68)	—		13.5	150
NGC7354	107 +2°1	22	38	26	+61	01	10.0	−11.55	1.87		3.83	—	8	—	70
NGC7662	106 −17°1	23	23	29	+42	16	7.6	− 9.98	0.29	4.5	4.0	1.3	8	12.5	100

式中能级 m 的阈电离能是 $I_m=Z^2I_H/m^2$。因为 α_{mn}/Z 只与 T_e/Z^2 有关，很显然，由(2-107)式可知，一个给定原子或离子的谱线的相对强度测量给出了 T_e 的一种量度，反之，假定了一个 T_e 值以后，一条谱线的强度测量就能给出 N_eN_+ 的体积分。

贝克和门泽尔(Baker 和 Menzel, 1938)讨论了两种情况：情况 A 和情况 B 分别相当于一个光学薄的星云和一个光学厚的星云，后一种情况首先由扎纳斯特拉(Zanastra, 1927)加以研究。情况 A 假定氢原子的激发态是由于来自连续谱的辐射俘获和由于所有较高能态的级联跃迁而引起的粒子数增加同时由于级联跃迁到低能级而引起的粒子数减少。情况 B 假定由于发射赖曼(Lyman)谱线而引起的激发态粒子数的减少率正好等于吸收赖曼量子而引起的粒子数的增加率。伯吉斯等(Burgess, 1958; Seaton, 1960; 以及 Pengally, 1964)在考虑轨道简并时曾考虑过这两种情况。特别感兴趣的是在 $\lambda=4861$ 埃处的氢(HI)谱线 $H(\beta)=H(4.2)$ 和在 $\lambda=4686$ 埃的电离氦(HII)谱线 $He^+(4.3)$。对于这些谱线，我们得出(Seaton, 1960)：当 $T_e=10^4$ 开

	情况 A	情况 B
$\alpha_{4.2}$(HI)	1.98×10^{-14} 厘米^3·秒$^{-1}$	2.99×10^{-14} 厘米^3·秒$^{-1}$
$\alpha_{4.3}$(HeII)	9.0×10^{-14} 厘米^3·秒$^{-1}$	20.8×10^{-14} 厘米^3·秒$^{-1}$,

当 T_e 为其他值时，$\alpha_{mn}(T_e)$ 的值可以由假定 $\alpha_{mn}\propto T_e^{-1}$ 而近似算出。彭加利(Pengally; 1964)分别给出了在情况 A 和情况 B 时，在 λ4861 和 λ4686 处谱线的 $h\nu_{mn}\alpha_{mn}(T_e)$ 作为 T_e 的函数的值。他还列表给出了就 $T_e=1\times10^4$ 开和 2×10^4 开时，A、B 两种情况的氢谱线的巴耳末系和帕邢系相对于 $I_{4,2}$(HI) $=100$ 的相对强度，以及电离氦的皮克林系和普丰系相对于 $I_{4,3}$(HII) $=100$ 的相对强度。表 11 给出大多数这些跃迁的波长。

在应用(2-107)和(2-108)式以前，先必须对吸收强度作星际尘埃粒子红化或吸收的改正。设 $I_c(\lambda)$ 和 $I_0(\lambda)$ 分别表示已改正的和观测到的波长为 λ 的谱线强度，则我们得出(Berman, 1936; Whitford, 1948, 1958; Burgess, 1958)：

$$\log I_c(\lambda)=\log I_0(\lambda)+Cf(\lambda), \tag{2-109}$$

式中 $f(\lambda)$ 的单位这样来选择，以使在 $\lambda=4861$ 埃处的 $H(\beta)$ 线的 $f(\lambda)=0$ 和 $f(\infty)=-1$。因此观测到的 $H(\beta)$ 强度值必须乘以 10^C 以作消光改正。常数 C 的平均值是 0.19 (Pengally, 1964)。在射电频段的观测并不需要作红化改正，并且对于光学厚的星云，轫致辐射公式(1-222)给出关系式：

$$E=\int_0^L N_e^2 ds=\frac{S_\nu T_e^{1/2}c^2}{2k\xi\Omega}, \tag{2-110}$$

这里辐射量 E 是电子密度 N_e 的平方沿星云长度 L 的线积分，S_ν 是在频率 ν 处所观测到的流量密度，Ω 是源的视立体角，而

$$\xi={}^*9.769888\times10^{-3}\ln\left({}^*4.955065\times10^7\frac{T_e^{3/2}}{\nu}\right)。$$

特齐安(Terzian, 1968)给出了在 $\nu=5000$ 兆赫处所观测到的流量密度。在这频率处，(2-110)式成为：

$$E\approx\frac{S_\nu T_e^{1/2}}{2\theta^2}\ \text{厘米}^{-6}\cdot\text{秒差距},$$

式中 θ 是角范围，单位是度，S_ν 是流量密度，单位是央[1)]，星云的质量 M 由下式给出：

1) 原文为流量单位，1 央 $=10^{-26}$ 瓦·米$^{-2}$·赫$^{-1}$。——译者注

$$M=\frac{4\pi R^3}{3}\varepsilon N_e m_{\rm H},$$

式中 $m_{\rm H}$=*1.6735595×10^{-24} 克，是氢原子的质量。由(2-107)和(2-109)式可知，到星云的距离 D 由下式给出：

$$D^5=\frac{3}{\varepsilon}\left(\frac{M}{4\pi m_{\rm H}}\right)^2\frac{hc}{\lambda\theta^3 F\times 10^C},$$

式中 F 是在波长 λ 观测到的流量，θ 是星云的角半径，而 C 是消光改正。

正如第 1.31 节所指出的，在光学频段复合连续辐射变得重要了，其贡献的大小是频率 ν、电子密度 N_e 及电子温度 T_e 的灵敏函数。每单位体积、每频率间隔在频率 ν 与 $\nu+d\nu$ 间辐射的连续谱总功率是：

$$P(\nu)d\nu=N(\mathrm{HII})N_e\gamma_{有效}d\nu, \tag{2-111}$$

式中 N(HII)是一次电离氢的密度，N_e 是电子密度，有效发射系数 $\gamma_{有效}$ 由下式给出：

$$\gamma_{有效}=\gamma(\mathrm{HI})+\gamma(2q)+\frac{N(\mathrm{HeII})}{N(\mathrm{HI})}\gamma(\mathrm{HeI})+\frac{N(\mathrm{HeIII})}{N(\mathrm{HII})}\gamma(\mathrm{HeII}),$$

式中 γ(HI)，γ(HeI)和 γ(HeII)分别表示中性氢、中性氦及一次电离氦的发射系数，$\gamma(2q)$ 是从氢的 $2^2S_{1/2}$ 能级发射双光子的发射系数，N(HeII)和 N(HeIII)分别表示 HeII 和 HeIII 的密度。发射系数 γ(HI) 和 γ(HeI) 由下式给出：

$$\gamma=\frac{P_r(\nu)}{N_iN_e}+\frac{4\pi\varepsilon_\nu}{N_iN_e}=\gamma_{fb}+\gamma_{ff},$$

式中复合功率密度 $P_r(\nu)$ 由(1-236)式给出，轫致辐射的体发射率 ε_ν 由(1-219)式给出，下标 ff 和 fb 分别表示自由-自由发射和自由-束缚发射。布朗等(Brown 和 Mathews, 1970)已列表给出光波段的 γ(HI)、γ(HeI)作为温度的函数值。在图 9 中画出了当温度为 10^4 开时他们所得到的结果。这些数据表明 $\gamma(\mathrm{HI})\approx\gamma(\mathrm{HeI})$，而且在 λ=3647 埃的巴耳末跳变附近双光子发射变得重要起来了。对正常星云来说，$N(\mathrm{HeII})/N(\mathrm{HII})\approx 0.1$ 和 $N(\mathrm{HeIII})/N(\mathrm{HII})\approx 0.01$，氦对连续谱辐射的贡献是二级小量。

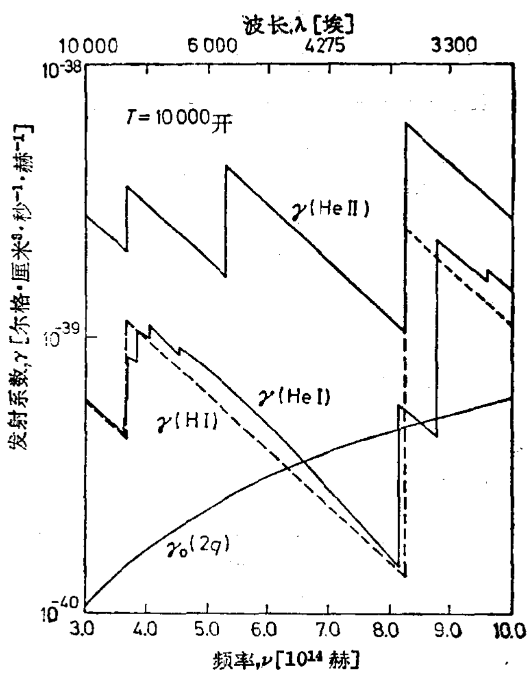


图 9　T=10000 开的连续发射系数 γ(HI)(虚线)，γ(HeI)，γ(HeII)及 $\gamma_0(2q)$随频率的变化(取自 Brown 和 Mathews, 1970 的文章)

迈耶等(Mayer, 1931; Breit 和 Teller, 1940; 以及 Spitzer 和 Greenstein, 1951)曾讨论过双光子发射过程。发射系数由下式给出：

$$\gamma(2q)=\frac{hA(\gamma)\gamma X\alpha_B(T)}{A_2}=g(\nu)X\alpha_B(T)。$$

式中 $\gamma=\nu\nu_{12}$，$h\nu_{12}$ 是 $2S_{12}$ 能级的激发能量。A_2=8.227 秒$^{-1}$ 是每秒钟内发射能量为 $\gamma h\nu_{12}$ 的双光子中的一个光子的总几率，X 是双光子衰变引起的每次复合几率，复合到氢的各激发能级的总复合系数 $\alpha_B(T)$ 由下式给出(Hummer 和 Seaton, 1963)：

$$\alpha_B(T)=1.627\times10^{-13}t^{-12}[1-1.657\log t+0.584t^{1/3}]\ 厘米^3\cdot秒^{-1},$$

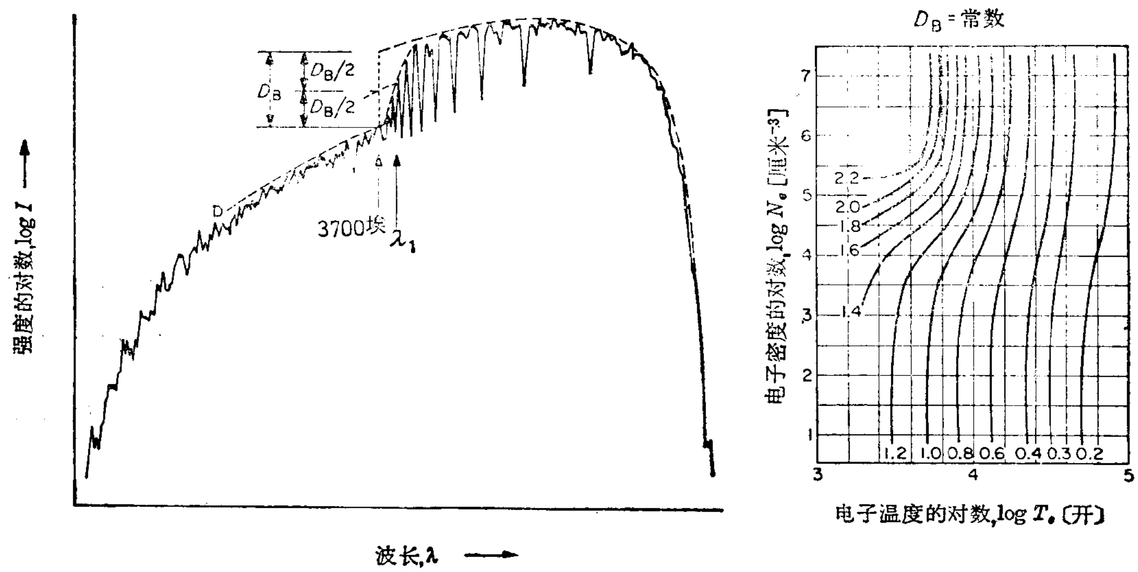


图 10 在一颗恒星的连续光谱上显示出的巴耳末减幅 D_B, 它是电子密度 N_e 及电子温度 T_e 的函数(取自 Boyarchuk, Gershberg 和 Godovnikov, 1968 的文章)

式中

$$t=10^{-4}T。$$

施皮策等(Spitzer 和 Greenstein, 1951)列表给出了函数 $0.229A(\gamma)$ 的值, 布朗等(Brown 和 Mathews, 1970)列表给出了函数 $g(\nu)$ 的值。X 的值与 $2S_{12}$ 和 2^2P 能态上的原子的粒子数分布情况以及 L_α 光子的数密度有关(参看 Cox 和 Mathews, 1969); 布朗等(Brown 和 Mathews, 1970)列表给出了光波段的 X 的近似值。

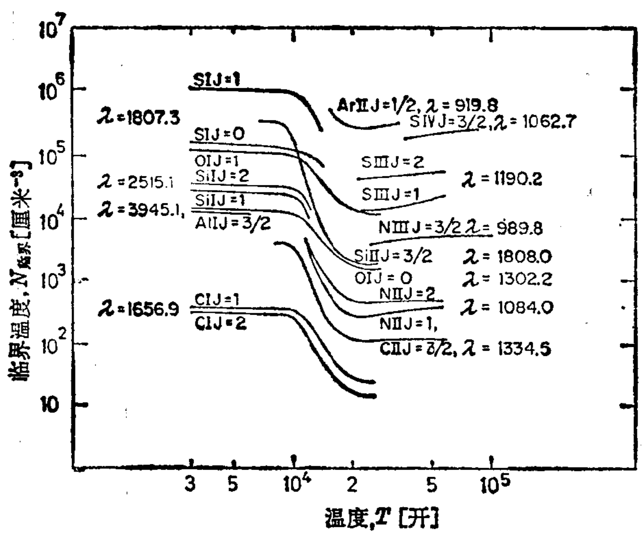


图 11 临界密度 $N_{临界}$ 随温度变化的曲线, 低于临界密度时, 在吸收特征谱的高精细结构态中的粒子数是不多的(取自 Bahcall 和 Wolf 的文章)。图中还给出基态共振跃迁波长 λ(以埃为单位), 基态共振跃迁的精细结构劈裂 $\Delta\lambda$ 为 0.5 至 20 埃。这里假定了氢由于碰撞而电离, 而且由于辐射复合而去电离。对于一个给定的能态来说, 临界密度是由该能态的光子衰变率等于碰撞跃迁到低能态的跃迁率所确定的

当考虑了复合辐射、韧致辐射及双光子发射的贡献以后, 利用(2-111)式可以计算出巴耳末减幅 D_B。D_B 定义为在 $\lambda=3647$ 埃的巴耳末跃变两侧强度之比的对数, 这已在图 10 中画出, 并且由下式给出:

$$D_B=\log\left[\frac{I(3647^-)}{I(3647^+)}\right], \quad (2\text{-}112)$$

式中 I 表示强度, "$-$"及"$+$"分别表示波长低于及高于 3647 埃。巴耳末系头部的强度跳变可以归结为温度的升高或者电子密度的降低(这就增加了双光子连续谱发射的贡献)。因此, D_B 的测量可得出电子温度 T_e 或者电子密度 N_e 的量度。巴耶丘克等(Boyarchuk, Gershberg 和 Godovinikov, 1968)考虑了氢的复合辐射、韧致辐射及双光子发射后, 计算出了 D_B

作为 T_e 及 N_e 的函数的值，他们的结果同样表示在图 10 中。

巴考尔等(Bahcall 和 Wolf, 1968)已指出吸收线的存在与否也能给出吸收介质的密度及温度的资料。只要吸收介质的密度高于图 11 所示的临界值 $N_{临界}$，基态多重态中的较高精细结构态是被占用的，图 11 是几种原子和离子在各种跃迁时的 $N_{临界}$ 随温度变化的曲线。所预言的精细结构的劈裂范围是从 0.4 至 18.9 埃。

2.12. 原子复合谱线和电离氢(HII)区

当一个类氢原子从高能级 m 跃迁到低能级 n 时，它会发出下列频率 ν_{mn} 的辐射(Rydberg, 1890; Ritz, 1908; Planck, 1910; Bohr, 1913)：

$$\nu_{mn}=cR_AZ^2(n^{-2}-m^{-2})\approx 2cR_AZ^2n^{-3}(m-n), \tag{2-113}$$

式中光速 $c=$*2.99792458×10¹⁰ 厘米·秒⁻¹，Z 是"有效"核电荷(或离子电荷)，以质子电荷为单位，原子里德伯常数 R_A 由下式给出：

$$R_A=R_\infty\left(1+\frac{m_e}{M_A}\right)^{-1}\approx R_\infty\left(1-\frac{m_e}{M_A}\right),$$

式中无限大质量的里德伯常数 $R_\infty=2\pi^2m_ee^4/(ch^3)=$*109737.3177 厘米⁻¹，电子质量 $m_e=$*5.4858026×10⁻⁴ 原子质量单位，而 M_A 是原子质量。表 10 给出较丰富原子的原子质量及里德伯常数。

表 10　最丰富原子的原子质量及里德伯常数

原　子	原子质量 M_A (原子质量单位)	里德伯常数 R_A (厘米⁻¹)	原　子	原子质量 M_A (原子质量单位)	里德伯常数 R_A (厘米⁻¹)
氢 H^1	1.007825	109677.6	氮 N^{14}	14.003074	109733.0
氦 He^4	4.002603	109722.3	氧 O^{16}	15.994915	109733.5
碳 C^{12}	12.000000	109732.3	氖 Ne^{20}	19.99244	109734.3

当用射束宽度比气体云的角范围小的天线观测光学薄的气体时，由谱线辐射所引起的天线温度 ΔT_L 由下式给出：

$$\Delta T_L=\eta_A T_e\int_0^L \alpha_\nu dl, \tag{2-114}$$

式中 η_A 是天线效率，T_e 是电离气体的电子温度，L 是沿视线方向气体云的长度，积分是沿视线进行的，量子力学吸收系数 α_ν(Einstein, 1917, (2-65)式)为：

$$\alpha_\nu=\frac{c^2N_ng_m}{8\pi\nu^2g_nn_\nu^2}A_{mn}\left[1-\frac{g_n}{g_m}\frac{N_m}{N_n}\right]\varphi_{mn}(\nu), \tag{2-115}$$

式中 N_n 是能级 n 的粒子数；A_{mn} 是从能级 m 自发跃迁到能级 n 的爱因斯坦系数；g_n 是能级 n 的统计权重；气体的折射率是 n_ν，在下面将假定它等于 1。当气体处于局部热动平衡时，能级 n 的粒子数 N_n 由下式给出(Saha, 1921, (3.129)式)：

$$N_n=\frac{N_eN_ih^3}{(2\pi m_ekT_e)^{3/2}}\frac{g_n}{2}\exp(-\chi_n/kT_e), \tag{2-116}$$

式中 N_e 是电子密度，N_i 是复合离子密度，T_e 是电子温度，χ_n 是连续谱下面第 n 能级的激发能。在局部热动平衡条件下，$\exp(-h\nu_{mn}/kT)=g_nN_m/(g_mN_n)$，并且在射电频段，$h\nu_{mn}\ll kT$。因此由(2-71)和(2-113)至(2-116)式可知，对于氢来说，在频率 ν_{mn} 处，我们由(2-8)式得出 $\chi_n=-hcR_AZ^2/n^2$，以及

$$\Delta T_L=4\pi\left(\frac{\ln 2}{\pi}\right)^{1/2}\frac{e^2h^4R_A\eta_A Z^2}{m_e k(2\pi m_e kT_e)^{3/2}}\cdot\frac{m-n}{\Delta\nu_D}\frac{f_{mn}}{n}\exp\left(\frac{-\chi_n}{kT_e}\right)\int_0^L N_eN_i\,dl$$
$$={}^*1.005561\times10^4 Z^2\eta_A\frac{m-n}{\Delta\nu_D}\frac{f_{nm}}{n}T_e^{-3/2}$$
$$\cdot\exp\left(\frac{{}^*1.578027\times10^5 Z^2}{n^2T_e}\right)\int_0^L N_eN_i\,dl\ \text{开},\tag{2-117}$$

式中 $g_n=2n^2$，$\Delta\nu_D$ 为多普勒致宽的半极大全宽，对 $\Delta\nu_D$ 取数值近似，单位是千赫，谱线发射量 $E_L=\int_0^L N_eN_i\,dl$，单位是秒差距·厘米$^{-6}$。振子强度 f_{nm} 与自发发射的爱因斯坦系数 A_{mn} 的关系式是(2-40)式，氢原子的 f_{nm} 由下式给出(Kramers, 1923; Menzel 和 Pekeris, 1935)：

$$f_{nm}=\frac{-g_m}{g_n}f_{mn}=\frac{2^5}{3\sqrt{3}\,\pi}\frac{1}{m^2}\frac{1}{\left[\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right]^3}\left|\frac{1}{n^3}\frac{1}{m^3}\right|g_{bb},\tag{2-118}$$

式中 $g_n=2n^2$，而 g_{bb} 是束缚-束缚跃迁的克喇末-冈特(Kramers-Gaunt)因子(Kramers, 1923; Gaunt, 1930; Baker 和 Menzel, 1938; Burgess, 1958)。威斯等(Wiese, Smith 和 Glennon, 1967)给出了低 m 和 n 能级的 f_{mn} 值。戈德怀尔(Goldwire, 1968)和门泽尔(Menzel, 1969)给出了 g_{bb} 的近似公式以及求出了在大 n 时的 f_{mn} 的数值。门泽尔分别得出 $m-n=1$、2、3、4、5 时，$f_{nm}/n=0.194$、0.00271、0.00841、0.00365、0.00191。门泽尔利用计算机得出下列公式：

$$f_{n+c,n}=\frac{(2/c)^{2-2c}n}{3(c!)2}\left[\frac{(n+c)!}{n!n^c}\right]\left[\frac{(1+c/n)^{2n+2}}{(1+c/2n)^{4n+2c+3}}\right]\left\{\quad\right\},\tag{2-119}$$

式中
$$\{\ \}={}_2F_1\times{}_3F_2。$$

F 依次是 4 个变数及 6 个变数的超几何函数，分别为：

$$
\begin{aligned}
&{}_2F_1\left[-n,\ -n+1,\ c+1,\ -\frac{c^2}{4n(n+c)}\right]\\
&=1-\frac{n(n+1)}{1!(c+1)}\frac{c^2}{4n(n+c)}\\
&\quad+\frac{n(n-1)^2(n-2)}{2!(c+1)(c+2)}\left[\frac{c^2}{4n(n+c)}\right]^2-\cdots,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&{}_3F_2\left[-n,\ -n,\ \theta+1,\ c+1,\theta,\ -\frac{c^2}{4n(n+c)}\right]\\
&=1-\frac{n^2(\theta+1)}{1!(c+1)\theta}\frac{c^2}{4n(n+c)}+\frac{n^2(n-1)^2(\theta+2)}{2!(c+1)(c+2)\theta}\left[\frac{c^2}{4n(n+c)}\right]^2\\
&\quad-\frac{n^2(n-1)^2(n-2)^2(\theta+3)}{3!(c+1)(c+2)(c+3)\theta}\left[\frac{c^2}{4n(n+c)}\right]^3+\cdots,
\end{aligned}
$$

式中 $\theta=nc(2n+c)$，而跃迁是 $n+c\to n$ 跃迁。

氢的重要的低 n 跃迁首先是由赖曼(Lyman, 1906, 对 $n=1$)、巴耳末(Balmer, 1885, 对 $n=2$)、帕邢(Paschen, 1908, 对 $n=3$)、布喇开(Brackett, 1922, 对 $n=4$)、普丰(Pfund, 1924, 对 $n=5$)及汉弗莱斯(Humphreys, 1953, 对 $n=6$)观测到的。表 11 给出了这些谱线以及一次电离氦的皮克林(Pickering, 1896, 1897)系的波长。

正如韦耳德(Wild, 1952)和卡尔达晓夫(Kardashev, 1959)所首先指出的，在射电频段，对大的 n，可以在电离氢(HII)区观测到氢及氦的 $m-n$ 跃迁。德拉夫斯基赫等(Dravskikh 和 Dravskikh, 1964)首先进行了证实观测。这些谱线的频率是由(2-113)式确定的，跃迁通

表 11 氢的 $m\to n$($n=1$ 至 6、$m=2$ 至 21 及 $m=\infty$)跃迁的波长以及电离氦(HeII)[1]的皮克林线系($n=4$、$m=2$ 至 21 及 $m=\infty$)的波长(波长的单位是埃，1 埃$=10^{-8}$ 厘米)

谱线系 m	赖曼 ($n=1$)	巴耳末 ($n=2$)	帕邢 ($n=3$)	布喇开 ($n=4$)	普丰 ($n=5$)	汉弗莱斯 ($n=6$)	皮克林 (He^+, $n=4$)
2	1215.67						
3	1025.72	6562.80					
4	972.537	4861.32	18751.0				
5	949.743	4340.46	12818.1	40512.0			10123.64
6	937.803	4101.73	10938.1	26252.0	74578		6560.10
7	930.748	3970.07	10049.4	21655.0	46525	123680	5411.52
8	926.226	3889.05	9545.98	19445.6	37395	75005	4859.32
9	923.150	3835.38	9229.02	18174.1	32961	59066	4541.59
10	920.963	3797.90	9014.91	17362.1	30384	51273	4338.67
11	919.352	3770.63	8862.79	16806.5	28722	46712	4199.83
12	918.129	3750.15	8750.47	16407.2	27575	43753	4100.04
13	917.181	3734.37	8665.02	16109.3	26744	41697	4025.60
14	916.429	3721.94	8598.39	15880.5	26119	40198	3968.43
15	915.824	3711.97	8545.39	15700.7	25636	39065	3923.48
16	915.329	3703.85	8502.49	15556.5	25254	38184	3887.44
17	914.919	3697.15	8467.26	15438.9	24946	37484	3858.07
18	914.576	3691.55	8437.96	15341.8	24693	36916	3833.80
19	914.286	3686.83	8413.32	15260.6	24483	36449	3813.50
20	914.039	3682.81	8392.40	15191.8	24307	36060	3796.33
21	913.826	3679.35					3781.68
∞	911.5	3646.0	8203.6	14584	22788	32814	3644.67

[1] 数据取自威斯等(Wiese, Smith 和 Glennon, 1966)的著作。

常用 n 值及 n 值后面用一个代表 $m-n$ 值的希腊字母表示。当 $m-n=1$、2、3、4 和 5，相应的符号分别是 α、β、γ、δ 和 ε。利利等(Lilley和 Palmer, 1968)已列表给出从 $n=51$ 至 $n=850$ 的氢的 α、β 和 γ 谱线频率以及氦的 α 和 β 谱线频率。由射电频率氢复合谱线的观测可得出 HII 区的湍流速度、运动距离、电子温度和电子密度。利用 5008.923 兆赫的 H109α

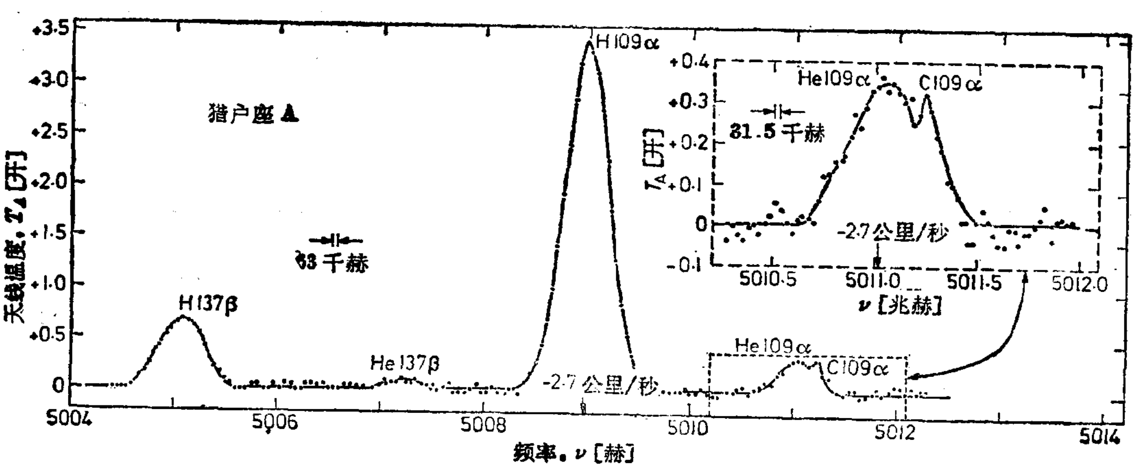


图 12 猎户星云光谱的 109α 区的宽带光谱图。该宽带光谱的频率分辨率是 63 千赫，对于中心在氦的 109α 线的狭带光谱来说，它的频率分辨率是 31.5 千赫(取自 Churchwell 和 Mezger, 1970 的文章)

表 12 200 个 HII 区的方位、角范围 θ、5000 兆赫上的流量密度 S_{5000}、电子温度 T_e、发射量 E、直径 $2R$、电子密度 N_e 及质量 M_{HII}[1]

源	G-子源[1)	α(1950.0) h	α m	α s	δ (1950.0) °	δ ′	δ ″	θ_α ′	θ_δ ′	S_{5000} (央)	T_e (开)	E (厘米$^{-6}$·秒差距)	$2R$ (秒差距)	N_e (厘米$^{-3}$)	M_{HII} ($M_\odot$)
IC1795	133.7+1.2	02	21	55	61	51	59	2.9	4.7	68.1	6,800±800	5.4×10^2	3.3	330	450
OrionA	209.0−19.4	05	32	51	−05	25	39	3.8	4.3	382.2	7,000±800	2.5×10^3	0.6	1.7×10^3	13
	208.9−19.3	05	33	03	−05	18	18	2.5	2.5	16.7	6,300±1,000	2.8×10^5	0.7	613	3.1
	279.4−31.7	05	39	00	−69	06	42	4.0	5.0	33.7	9,400±1,500	2.0×10^5	105.2	44	6.2×10^5
NGC2024	206.5−16.4	05	39	12	−01	55	42	3.6	3.0	53.8	7,200±890	5.5×10^2	0.6	790	6.7
	265.1+1.5	08	57	38	−43	33	36	2.3	2.5	23.8	7,400±1,100	4.6×10^5	0.6	863	2.4
	267.8−0.9	08	57	40	−47	07	12	8.1	7.5	25.9	6,000±2,600	4.3×10^4	6.0	85	220
	268.0−1.1	08	58	05	−47	20	12	1.3	2.1	172.3	7,900±800	7.1×10^6	0.4	4,106	3.7
	282.0−1.2	10	04	53	−56	57	30	1.8	2.1	25.9	7,300±1,200	7.6×10^5	5.5	371	730
	284.0−0.9	10	18	03	−57	49	36	6.3	9.2	7.7	3,500±3,200	1.1×10^4	17.6	25	7,700
	284.1−0.4	10	22	44	−57	28	48	4.3	8.4	8.0	10,700±8,900	2.8×10^4	7.2	62	2.8×10^2
	284.3−0.3	10	22	19	−57	32	00	4.7	6.2	178.8	6,800±700	6.6×10^5	13.8	218	6.9×10^3
	285.3+0.0	10	29	36	−57	46	42	1.7	1.7	16.5	9,100±2,000	6.8×10^5	0.1[2]	2,157	0.08
	287.2−0.7	10	39	48	−59	18	41	7.1	11.7	42.3	7,200±2,100	5.5×10^4	10.5	72	1.0×10^3
	287.3−0.9	10	39	50	−59	29	11	6.3	4.3	15.1	5,900±2,200	5.7×10^4	6.0	97	2.5×10^2
	287.4−0.6	10	41	36	−59	19	11	6.2	6.1	114.5	7,200±800	3.3×10^5	7.1	216	9.2×10^2
	287.5−0.6	10	42	50	−59	22	59	5.7	5.3	86.0	6,100±800	2.9×10^5	6.3	215	6.6×10^2
	287.6−0.9	10	42	09	−59	42	17	6.7	7.0	28.0	5,100±2,000	5.8×10^4	7.9	86	5.1×10^2
	287.7−0.6	10	43	54	−59	29	29	4.2	2.2	10.4	6,700±2,000	1.2×10^5	3.5	185	9.6×10^1
	287.8−0.8	10	43	43	−59	40	29	6.0	2.0	7.3	4,900±2,000	5.9×10^4	4.0	121	9.3×10^1
	287.9−0.9	10	44	09	−59	50	17	7.9	5.4	23.9	4,400±1,100	5.2×10^4	7.5	83	4.3×10^2
	287.9−0.8	10	44	53	−59	44	41	7.5	13.2	57.4	8,200±2,500	6.6×10^4	11.5	76	1.4×10^3
	289.1−0.4	10	54	29	−59	49	48	3.2	3.1	7.8	13,700±7,200	1.1×10^5	12.0	94	1.9×10^3
	289.8−1.1	10	56	51	−60	50	48	7.4	6.5	16.9	9,100±4,600	4.1×10^4	25.8	40	3.2×10^3
	291.3−0.7	11	09	45	−61	02	36	0.9	0.9	97.4	7,700±800	1.4×10^7	1.4	3,122	9.9×10^1
	291.6−0.5	11	12	53	−60	59	24	3.8	6.5	172.1	6,900±800	7.5×10^5	17.4	208	1.3×10^4
	291.9−0.7	11	14	24	−61	13	18	0.0	1.8	3.0	7,000±4,300	$>3.6\times10^5$	<3.9	>305	$<2.2\times10^2$

295.1−1.6	11	37	47	−63	08	42	5.7	7.2	6.8	3,800±1,800	1.5×10^{4}	6.6[2]	47	1.6×10^{2}
295.2−0.6	11	41	05	−62	09	12	4.9	4.2	9.9	7,100±3,900	5.1×10^{4}	24.2	46	7.9×10^{3}
298.2−0.3	12	07	24	−62	33	18	1.8	2.1	30.6	8,100±1,300	9.2×10^{5}	9.7	308	3.4×10^{3}
298.8−0.3	12	12	38	−62	39	12	4.7	4.7	16.0	11,900±8,200	9.2×10^{4}	23.1	63	9.4×10^{3}
298.9−0.4	12	12	44	−62	44	48	3.8	2.8	32.7	6,000±900	3.1×10^{5}	16.0[2]	140	6.9×10^{3}
301.0+1.2	12	32	03	−61	22	54	0.0	0.0	2.8	6,100±3,500	$>1.2\times10^{6}$	<1.1	>1,022	$<1.7\times10^{1}$
301.1+1.0	12	33	11	−61	34	48	0.0	0.0	3.5	9,100±5,400	$>1.7\times10^{6}$	<1.1	>1,221	$<2.0\times10^{1}$
305.1+0.1	13	07	06	−62	22	36	5.0	5.7	14.2	5,200±2,200	4.8×10^{4}	7.8[2]	79	4.4×10^{2}
305.2+0.0	13	08	03	−62	29	12	3.6	3.9	28.0	5,200±1,000	2.0×10^{5}	5.8[2]	184	4.2×10^{2}
305.2+0.2	13	08	23	−62	17	30	4.9	6.8	52.0	5,700±800	1.6×10^{5}	8.6[2]	135	1.0×10^{3}
305.4+0.2	13	09	20	−62	18	48	3.0	2.5	39.4	5,200±600	5.1×10^{5}	9.5	233	2.4×10^{3}
305.6+0.0	13	11	06	−62	28	54	4.6	5.0	17.8	4,600±1,100	7.3×10^{4}	8.8[2]	91	7.5×10^{2}
308.6+0.6	13	36	37	−61	29	00	3.5	6.3	9.1	10,200±8,500	5.0×10^{4}	9.4[2]	73	7.4×10^{2}
308.7+0.6	13	37	18	−61	29	48	3.0	4.5	5.1	7,600±4,400	4.2×10^{4}	6.1[2]	83	2.3×10^{2}
311.5+0.4	14	00	01	−61	02	12	3.0	4.5	5.1	5,100±3,000	3.6×10^{4}	10.4	59	8.0×10^{2}
311.6+0.3	14	01	16	−61	05	36	0.0	0.0	2.8	3,300±1,500	$>9.6\times10^{5}$	<1.4	>824	$<2.8\times10^{1}$
311.9+0.1	14	03	52	−61	13	06	3.0	1.8	7.1	4,700±1,400	1.2×10^{5}	9.7	113	1.2×10^{3}
311.9+0.2	14	03	49	−61	05	18	3.0	3.5	7.8	4,300±1,100	6.9×10^{4}	4.8[2]	119	1.6×10^{2}
314.2+0.4	14	21	16	−60	09	12	2.7	2.8	5.2	3,000±900	5.7×10^{4}	4.5[2]	113	1.2×10^{2}
316.8−0.1	14	41	31	−59	36	54	2.3	1.3	28.7	5,900±800	9.8×10^{5}	8.9	332	2.8×10^{3}
317.0+0.3	14	41	45	−59	13	36	6.1	3.2	14.7	4,200±1,600	2.7×10^{4}	34.0	28	1.3×10^{4}
317.3+0.2	14	44	14	−59	08	18	6.2	8.6	6.7	2,700±900	9.9×10^{5}	10.3[2]	31	4.1×10^{2}
319.2−0.4	14	59	14	−58	51	42	5.1	4.6	8.2	11,200±6,000	4.4×10^{4}	3.2[2]	117	4.6×10^{1}
319.4+0.0	14	59	23	−58	24	30	5.0	2.3	8.2	7,400±2,800	7.9×10^{4}	1.5[2]	233	8.5
320.2+0.8	15	01	34	−57	19	24	1.3	1.3	7.7	8,400±3,400	5.2×10^{5}	1.4	614	2.0×10^{1}
320.3−0.3	15	06	17	−58	14	36	2.7	3.0	7.2	8,400±3,100	1.0×10^{5}	6.1[2]	129	3.5×10^{2}
320.3−0.2	15	06	14	−58	06	12	1.3	1.6	5.8	5,100±1,600	2.7×10^{5}	0.4[2]	860	5.2×10^{-1}
321.0−0.5	15	12	06	−58	00	30	3.2	2.3	7.8	4,900±1,400	1.0×10^{5}	5.1[2]	141	2.3×10^{2}

[1] 取自赖芬斯坦等(Reifenstein, Wilson, Burke, Mezger 和 Altenhoff, 1970; 以及 Wilson, Mezger, Gardner 和 Milne, 1970)的文章。

[2] 打上角标 2 的半径值是两个可能值中最小的值。

[1] G-子源指以银经-银纬(Galactic Longitude-Galactic Latitude)表示的源。——译者注

(续表)

源	G-子源	α(1950.0)			δ(1950.0)			θ_a	θ_b	S_{5000} (央)	T_e (开)	E (厘米$^{-6}$·秒差距)	$2R$ (秒差距)	N_e (厘米$^{-3}$)	M_{HII} ($M_\odot$)
		h	m	s	°	′	″	′	′						
	321.1−0.5	15	12	45	−57	59	36	3.8	4.1	7.8	4,400±1,500	4.6×10^4	6.7[2]	83	3.0×10^2
	322.2+0.6	15	14	49	−56	27	54	0.9	0.9	12.2	5,400±1,100	1.5×10^6	1.4[2]	1,029	3.5×10^1
	324.2+0.1	15	29	02	−55	46	18	0.0	0.0	3.3	4,300±1,800	$>1.2\times10^6$	<1.5[2]	>911	$<3.5\times10^1$
	326.5+0.9	15	38	33	−53	48	54	0.9	0.9	7.2	7,000±2,300	9.7×10^5	0.8[2]	1,094	6.9
	326.7+0.6	15	40	56	−53	57	12	2.8	3.8	35.7	6,400±800	3.5×10^5	4.5	281	3.0×10^2
	327.3−0.5	15	49	12	−54	26	30	0.9	0.9	44.9	6,100±700	5.8×10^6	1.3	2,069	6.0×10^1
	327.6−0.4	15	50	02	−54	05	54	3.5	4.3	5.7	3,300±1,200	3.1×10^4	8.5[2]	61	4.5×10^2
	328.0−0.1	15	50	54	−53	39	24	1.6	3.3	4.6	5,600±2,400	8.7×10^4	3.2	165	6.5×10^1
	328.3+0.4	15	50	18	−53	02	30	2.1	2.3	10.0	4,800±1,200	2.0×10^5	8.8[2]	150	1.2×10^3
	330.9−0.4	16	06	27	−51	58	36	1.8	1.6	9.5	4,700±1,000	3.1×10^5	3.0[2]	322	1.1×10^2
	331.0−0.2	16	06	20	−51	42	30	4.6	4.7	8.3	3,200±900	3.2×10^4	13.1[2]	49	1.3×10^3
	332.2−0.5	16	08	23	−51	55	30	0.0	1.8	3.2	4,500±1,600	$>3.3\times10^5$	<2.0[2]	>406	$<4.0\times10^1$
	331.3−0.2	16	07	36	−51	34	54	1.3	0.0	4.2	5,900±3,400	$>6.6\times10^5$	<2.1[2]	>557	$<6.5\times10^1$
	331.3−0.3	16	08	33	−51	39	24	2.5	2.3	7.8	3,400±1,000	1.2×10^5	4.9[2]	155	2.1×10^2
	331.4+0.0	16	07	18	−51	23	06	1.8	3.3	6.6	5,400±1,600	1.1×10^5	6.0[2]	135	3.6×10^2
	331.5−0.1	16	08	22	−51	19	24	2.5	2.1	31.1	5,200±600	5.8×10^5	10.9	232	3.5×10^3
	332.1−0.5	16	12	52	−51	10	06	1.3	0.9	13.2	5,400±1,100	1.1×10^6	1.9[2]	771	6.3×10^1
	332.5−0.1	16	13	17	−50	40	18	1.8	0.0	2.2	2,200±1,000	$>1.8\times10^5$	<1.7[2]	>329	$<1.9\times10^1$
	332.7−0.6	16	15	58	−50	56	00	3.6	3.8	20.1	4,100±600	1.3×10^5	5.7	153	3.4×10^2
	332.8−0.6	16	16	25	−50	47	18	3.2	6.7	18.7	4,900±1,300	8.3×10^4	8.5	99	7.3×10^2
	333.0−0.4	16	16	51	−50	33	12	4.9	3.8	39.7	3,700±400	1.9×10^5	7.7[2]	156	8.7×10^2
	333.1−0.4	16	17	16	−50	29	12	3.2	4.9	42.1	4,700±600	2.5×10^5	22.7	106	1.5×10^4
	333.2−0.1	16	15	56	−50	12	18	4.2	6.7	12.3	4,900±1,300	4.1×10^4	15.2[2]	52	2.2×10^3
	333.3−0.4	16	17	45	−50	19	18	0.0	3.2	34.2	5,000±600	2.1×10^6	2.1	994	1.1×10^2
	333.6−0.1	16	17	53	−49	53	54	4.1	5.0	15.0	4,200±1,200	6.7×10^4	7.9[2]	92	5.5×10^2
	333.6−0.2	16	18	26	−49	58	54	0.9	0.9	84.4	7,200±800	1.1×10^7	1.4[2]	2,835	9.8×10^1
	333.7−0.5	16	19	58	−50	06	12	3.5	4.9	3.2	2,400±1,200	1.5×10^4	6.9[2]	46	1.8×10^2

	335.8−0.2	16	27	27	−48	24	06	4.5	3.6	7.6	4,800±1,700	4.4×10^{1}	7.2[2]	78	3.6×10^{2}
	336.4−0.2	16	29	52	−47	56	54	5.0	4.5	7.6	2,200±500	2.5×10^{4}	10.8[2]	48	7.2×10^{2}
	336.4−0.3	16	30	33	−47	59	06	5.1	4.5	10.0	3,600±1,100	3.8×10^{4}	14.1[2]	52	1.8×10^{3}
	336.5+0.0	16	29	33	−47	46	06	3.3	4.7	3.9	3,300±1,300	2.1×10^{4}	8.4[2]	50	3.6×10^{2}
	336.5−0.2	16	30	37	−47	51	06	5.9	8.1	14.6	3,200±1,000	2.5×10^{4}	19.5[2]	36	3.2×10^{3}
	336.5−1.5	16	36	22	−48	46	18	0.0	0.0	8.5	9,700±3,200	4.1×10^{6}	0.4	3,030	3.3
	336.8+0.0	16	30	49	−47	30	24	10.7	6.1	57.5	6,000±1,400	9.0×10^{4}	42.8	46	4.3×10^{4}
	336.9−0.1	16	32	09	−47	32	30	3.3	6.6	14.4	6,000±1,700	6.7×10^{4}	11.4[2]	77	1.4×10^{3}
	337.1−0.2	16	33	01	−47	25	18	0.9	1.8	15.1	5,100±800	9.1×10^{5}	3.1[2]	542	1.9×10^{2}
	337.1−0.1	16	33	27	−47	16	24	3.5	4.6	7.4	3,900±1,900	4.1×10^{4}	7.5[2]	74	3.8×10^{2}
	337.6+0.0	16	34	30	−46	58	06	4.3	5.0	6.1	4,700±1,900	2.7×10^{4}	8.9[2]	55	4.7×10^{2}
	337.9−0.5	16	37	27	−47	01	36	1.3	1.3	17.3	5,400±1,000	1.0×10^{6}	1.9[2]	725	6.4×10^{1}
	338.0−0.1	16	34	14	−46	45	18	6.0	5.7	11.1	3,500±1,400	2.8×10^{4}	11.0[2]	50	8.1×10^{2}
	338.1+0.0	16	36	14	−46	45	18	2.3	4.1	7.3	3,500±1,100	6.7×10^{4}	4.7[2]	119	150
	338.1−0.2	16	36	58	−46	41	54	3.5	5.4	6.3	3,200±1,800	2.8×10^{4}	7.6[2]	61	3.2×10^{2}
	338.4−0.2	16	38	00	−46	29	36	1.6	1.6	3.9	4,700±1,900	1.5×10^{5}	0.3[2]	730	1.8×10^{-1}
	338.4+0.0	16	37	10	−46	18	18	5.0	8.8	46.6	4,900±800	1.0×10^{5}	9.4[2]	104	1.0×10^{3}
	338.9+0.6	16	36	42	−45	34	24	3.2	3.5	9.9	5,000±1,100	8.5×10^{4}	7.4[2]	107	530
	338.9−0.1	16	39	36	−46	00	48	1.8	1.8	3.4	5,700±2,100	1.1×10^{5}	2.8[2]	196	50
	340.3−0.2	16	45	19	−45	04	06	1.8	2.3	4.9	5,400±1,800	1.2×10^{5}	3.5[2]	184	93
	340.8−1.0	16	50	39	−45	12	12	1.8	2.7	12.1	5,000±1,000	2.4×10^{5}	2.4[2]	320	50
	343.5+0.0	16	55	48	−42	30	12	3.5	3.6	12.6	7,800±3,200	1.1×10^{5}	5.0[2]	150	220
	345.0+1.5	16	54	22	−40	19	36	6.9	11.3	14.8	5,700±2,900	1.9×10^{4}	7.9[2]	49	290
	345.2+1.0	16	57	09	−40	29	18	1.3	1.6	10.4	4,800±1,000	4.8×10^{5}	0.7[2]	806	4
	345.3+1.5	16	55	37	−40	09	24	3.8	3.3	12.6	5,800±2,000	1.0×10^{5}	3.0[2]	184	61
	345.4+1.4	16	56	10	−40	07	00	1.3	1.3	13.1	4,500±1,100	7.3×10^{5}	1.1[2]	833	12
	347.6+0.2	17	08	07	−39	04	42	8.9	5.4	23.4	3,800±1,000	4.3×10^{4}	23.4[2]	43	6,600
	348.7−1.0	17	16	39	−38	54	36	1.6	2.1	33.4	5,300±900	2.1×10^{5}	2.5[2]	240	140
	349.8−0.6	17	17	53	−37	44	04	5.1	5.2	9.2	4,900±1,500	3.4×10^{4}	6.1[2]	61	530
	350.1+0.1	17	16	04	−37	07	39	2.4	3.4	6.5	8,200±3,600	9.1×10^{4}	6.1[2]	100	870
NGC6334	351.4+0.7	17	17	12	−35	45	58	7.0	10.2	171.4	6,400±1,000	2.5×10^{5}	1.6	320	54
	351.6−1.2	17	25	52	−36	37	35	4.0	6.6	36.8	6,000±1,000	1.4×10^{5}	3.9[2]	160	360
	351.6+0.2	17	19	54	−35	51	28	5.9	3.0	15.7	6,600±1,900	9.4×10^{4}	7.6[2]	92	1,500

（续表）

源	G-子源	α(1950.0) h	m	s	δ(1950.0) °	′	″	θ_α ′	θ_δ ′	S_{5000} (央)	T_e (开)	E (厘米$^{-6}$·秒差距)	$2R$ (秒差距)	N_e (厘米$^{-3}$)	M_{HII} ($M_\odot$)
	353.1+0.3	17	23	19	−34	33	26	8.5	4.9	31.3	7,600±1,900	8.4×10^4	1.9	170	47
NGC6357	353.1+0.7	17	22	17	−34	18	19	11.7	13.4	259.4	6,000±900	1.7×10^5	3.1	200	210
	353.2+0.9	17	21	30	−34	08	38	8.3	5.4	128.4	6,100±830	3.0×10^5	1.8	330	77
	353.1+0.6	17	22	18	−34	20	06	5.5	5.7	111.3	6,000±900	1.7×10^5	3.1	200	200
	353.4−0.4	17	27	08	−34	39	56	2.0	2.5	8.8	8,000±4,100	2.0×10^5	2.1[2]	250	90
	353.5−0.0	17	26	07	−34	23	24	2.0	2.0	3.3	3,300±1,700	7.0×10^4	4.3[2]	100	310
	0.2+0.0	17	42	48	−28	45	53	16.9	5.0	180.0	7,600±1,800	2.3×10^5	39.3	77	5.6×10^4
	0.5+0.0	17	43	56	−28	30	35	8.1	3.0	41.0	5,400±800	1.7×10^5	21.1	89	1.0×10^4
W24	0.7−0.1	17	44	14	−28	23	17	5.0	2.1	59.8	7,900±1,100	6.4×10^5	13.9	215	6.9×10^3
	0.5−0.0	17	43	49	−28	29	06	4.4	5.2	35.5	6,300±1,100	1.6×10^5	13.9	90	9,100
	0.7−0.0	17	44	07	−28	21	36	2.9	3.6	47.8	6,900±1,200	5.0×10^5	9.4	190	5,900
	1.1−0.1	17	45	25	−27	58	12	2.6	3.8	10.4	6,300±1,800	1.1×10^5	9.1	91	2,600
AMWW34	3.3−0.1	17	50	28	26	10	23	8.2	8.0	11.0	4,200±1,800	1.6×10^4	5.1[2]	45	230
AMWW35	4.4+0.1	17	52	18	−25	06	07	3.8	4.2	6.2	5,200±2,000	3.8×10^4	4.0[2]	80	200
W28	5.9−0.4	17	57	34	−24	04	42	5.9	5.9	23.3	6,400±1,300	7.1×10^4	5.1[2]	97	490
M8	6.0−1.2	18	00	41	−24	23	20	8.5	7.6	85.1	7,300±1,000	1.4×10^5	2.2	210	88
	6.1−0.1	17	56	52	−23	45	29	10.2	6.1	13.0	2,800±800	1.7×10^4	11.1	39	640
	6.5+0.1	17	57	05	−23	16	29	8.1	6.9	15.2	7,500±5,500	3.0×10^4	11.8	50	1,000
	6.6−0.1	17	57	45	−23	18	59	3.9	5.8	11.4	5,900±2,500	5.1×10^4	7.7	81	450
W28	6.6−0.3	17	58	39	−23	21	00	7.0	7.0	12.0	5,800±1,700	2.5×10^4	7.3	48	710
	6.7−0.2	17	58	39	−23	18	59	6.9	7.7	20.4	10,000±4,800	4.6×10^4	9.7	69	750
M20	7.0−0.2	17	59	19	−23	02	09	5.4	5.8	13.3	7,300±2,500	4.7×10^4	6.2	72	650
	8.1+0.2	18	00	00	−21	48	06	1.0	2.1	5.8	4,000±1,200	2.5×10^5	1.6[2]	320	53
	10.2−0.3	18	06	24	−20	19	53	3.3	3.6	51.8	5,900±950	4.5×10^5	2.5[2]	350	210
W31	10.3−0.1	18	05	58	−20	06	05	3.2	1.9	13.6	7,000±2,300	2.4×10^5	1.3[2]	360	30
	10.6−0.4	18	07	33	−19	56	32	5.7	4.2	10.2	5,400±1,600	4.3×10^4	0.1[2]	450	<1

	12.8−0.2	18	11	15	−17	57	02	4.9	3.6	44.9	7,800±1,300	2.9×10^{5}	5.6[2]	190	1,200
W33	13.2+0.0	18	11	10	−17	29	28	4.0	1.0	4.7	4,700±1,700	1.1×10^{5}	3.5[2]	150	240
	14.6+0.1	18	13	57	−16	14	38	11.0	9.0	24.3	4,500±1,000	2.3×10^{4}	12.2[2]	36	2,500
M17	15.0−0.7	18	17	37	−16	13	06	4.1	6.7	478.3	6,200±600	1.8×10^{6}	5.2	594	970
M17	15.1−0.7	18	17	36	−16	12	17	4.9	7.3	534.6	6,400±750	1.6×10^{6}	3.7	540	1,000
M16	17.0+0.8	18	15	54	−13	47	32	14.1	18.2	107.8	6,100±1,500	4.4×10^{4}	12.8	48	2.3×10^{3}
W35	18.5+1.9	18	14	50	−11	57	20	27.6	29.1	102.6	3,000±890	1.1×10^{4}	26.5	17	1.2×10^{4}
W39	19.1−0.3	18	23	53	−12	29	02	12.4	4.2	17.0	4,000±980	3.0×10^{4}	12.0[2]	41	2,700
	19.7−0.2	18	24	46	−11	53	42	5.8	5.9	12.4	5,300±2,300	3.6×10^{4}	6.9[2]	60	730
	20.7−0.1	18	26	29	−10	54	47	5.6	7.2	14.5	4,400±1,400	3.4×10^{4}	9.1[2]	50	1,400
W41	22.8−0.3	18	31	01	−09	11	39	19.8	18.1	45.5	6,400±4,300	1.3×10^{4}	34.4[2]	16	2.5×10^{4}
AMWW47	23.4−0.2	18	31	58	−08	34	55	7.0	2.8	13.2	6,300±1,700	7.1×10^{4}	9.6[2]	71	2,400
K39	24.6−0.2	18	34	09	−07	30	09	7.1	6.2	8.2	4,500±2,000	1.8×10^{4}	16.0	27	4,200
	24.8+0.1	18	33	30	−07	13	24	6.6	4.4	11.5	8,000±2,700	4.5×10^{4}	14.2	46	5,100
W42	25.4−0.2	18	35	32	−06	50	09	4.2	3.7	23.8	9,100±2,800	1.8×10^{5}	5.3[2]	150	880
AMWW48	25.8+0.2	18	34	55	−06	18	43	4.3	7.9	9.5	4,700±2,100	2.7×10^{4}	15.3	35	4,600
	27.3−0.2	18	39	01	−05	08	29	6.3	13.7	7.7	5,000±3,500	8.8×10^{3}	19.5[2]	18	4,900
	28.6+0.0	18	40	52	−03	52	38	8.3	14.3	14.4	6,700±3,400	1.3×10^{4}	22.6[2]	20	8,700
W40	28.8+3.5	18	28	51	−02	07	29	5.2	5.8	35.1	8,500±2,400	1.4×10^{5}	0.2	760	<1
	29.9−0.0	18	43	29	−02	44	46	3.2	5.4	21.1	6,900±1,500	1.3×10^{5}	8.8[2]	100	2,600
	30.2−0.2	18	44	26	−02	32	02	17.8	3.1	9.2	3,800±1,700	1.5×10^{4}	17.6	24	4,900
W43	30.8−0.0	18	45	01	−02	00	03	5.4	5.3	97.4	5,600±860	3.4×10^{5}	10.9[2]	150	7,200
	31.1+0.0	18	45	18	−01	42	06	4.0	4.0	8.0	6,700±3,200	5.4×10^{4}	9.9	61	2,200
W44	34.3+0.1	18	50	48	01	11	07	1.5	2.5	15.0	7,500±2,100	4.5×10^{5}	2.1[2]	380	140
W48	35.2−1.7	18	59	15	01	09	04	1.0	1.8	15.3	6,500±1,500	9.0×10^{5}	1.3	680	60
W47	37.6−0.1	18	57	48	03	59	36	6.0	4.0	7.9	5,600±2,200	3.4×10^{4}	5.6[2]	64	430
	37.9−0.4	18	59	19	04	09	26	19.3	4.4	24.4	6,500±2,200	3.1×10^{4}	11.4[2]	43	2,400
W49	43.2−0.0	19	07	54	09	01	01	1.5	2.0	49.8	7,700±1,100	1.9×10^{6}	7.0	430	5,400
	48.6+0.0	19	18	07	13	49	18	4.6	4.8	10.6	5,900±1,800	4.9×10^{4}	1.8[2]	140	29
	49.0−0.3	19	20	08	14	02	49	12.2	13.0	111.3	7,400±1,500	7.8×10^{4}	24.0	47	2.5×10^{4}
	49.1−0.4	19	20	32	14	03	30	4.0	5.6	15.0	4,300±1,100	6.2×10^{4}	13.4	68	1,900
W51	49.2−0.3	19	20	42	14	13	57	2.0	2.0	12.0	4,700±1,300	2.9×10^{5}	3.8	230	470
	49.4−0.3	19	20	53	14	18	36	3.5	3.5	37.2	7,000±1,000	3.3×10^{5}	12.7	161	4,000
	49.5−0.4	19	21	23	14	24	29	4.7	3.0	117.4	7,600±1,100	9.3×10^{5}	7.1	300	4,000

(续表)

源	G-子源	α(1950.0)			δ(1950.0)			θ_α	θ_δ	S_{5000} (央)	T_e (开)	E (厘米$^{-6}$·秒差距)	2R (秒差距)	N_e (厘米$^{-3}$)	M_{HII} M(⊙)
		h	m	s	°	′	″	′	′						
	51.2−0.1	19	23	10	16	08	14	20.9	22.4	37.0	4,200±2,300	7.3×10^3	39.6	11	2.6×10^4
	61.5+0.1	19	44	42	25	05	04	1.2	1.0	6.1	3,400±1,200	4.4×10^5	0.7[2]	670	7
	63.2+0.4	19	47	12	26	43	08	2.7	2.5	4.8	3,700±1,600	6.3×10^4	1.4[2]	180	17
	70.3+1.6	19	59	51	33	24	27	3.4	2.2	14.5	7,200±1,800	2.1×10^5	7.0	140	1,900
	75.8+0.4	20	19	47	37	19	53	1.7	6.2	14.1	6,200±1,700	1.4×10^5	5.2	130	730
	76.4−0.6	20	25	33	37	12	55	1.8	2.2	13.5	6,800±2,500	3.7×10^5	1.4	430	41
DR9	78.0+0.0	20	27	44	38	52	12	3.9	2.8	5.6	6,100±3,400	5.3×10^4	4.5	90	300
DR6	78.0+0.6	20	25	22	39	15	56	3.4	3.4	9.8	7,200±2,500	9.3×10^4	0.9[2]	270	7
DR4	78.1+1.8	20	20	44	40	02	20	6.9	14.0	25.6	9,700±4,000	3.2×10^4	5.9	61	470
DR13	78.2−0.4	20	29	52	38	48	00	8.6	8.8	24.3	8,100±2,300	3.7×10^4	0.7[2]	180	3
DR5	78.5+1.2	20	24	08	40	00	20	8.4	26.2	40.2	5,800±2,000	1.9×10^4	21.6	24	9,200
DR15	79.2+0.3	20	30	22	40	03	00	5.0	5.0	7.5	7,000±3,700	3.3×10^4	5.8	62	470
DR7	79.3+1.3	20	26	22	40	41	39	3.7	3.6	15.6	7,300±2,000	1.3×10^5	8.5	100	2,300
DR10	80.0+1.5	20	27	53	41	24	34	21.1	35.5	73.4	6,300±3,300	1.0×10^4	43.6	13	4.0×10^4
DR19	80.1−0.1	20	34	48	40	31	26	23.8	8.1	30.0	8,900±4,400	1.8×10^4	1.7[2]	85	16
DR18	80.4+0.5	20	33	15	41	05	00	4.4	32.2	29.0	9,100±4,900	2.4×10^4	5.8	53	390
DR20	80.9+0.4	20	35	10	41	26	02	3.5	4.6	7.6	5,600±1,700	4.8×10^4	0.6[2]	240	2
DR22	80.9−0.2	20	37	42	41	07	35	7.4	6.4	21.7	6,000±1,600	4.7×10^4	6.7	69	800
DR17	81.3+1.2	20	33	23	42	15	17	9.1	15.5	41.8	6,500±1,900	3.2×10^4	5.2	64	340
DR23	81.5+0.0	20	39	01	41	42	49	16.4	21.8	64.5	7,000±2,000	2.0×10^4	8.3	40	850
DR21	81.7+0.5	20	37	13	42	08	51	0.3	0.4	19.0	7,200±780	1.7×10^7	0.2	8,800	1.2×10^3
DR16	82.4+2.5	20	30	53	43	55	39	5.7	23.8	17.2	6,300±3,500	1.3×10^4	12.0	27	1,800
NGC7027	84.8−3.5	21	04	37	41	57	51	<0.1	<0.1	6.4	15,000±13,000	9.0×10^7	—	4.8×10^4	<1
NGC7538	111.6+0.9	23	11	39	61	21	42	2.3	1.9	25.0	6,700±1,300	6.1×10^2	3.0	370	380

谱线已完成了为提供这种资料而进行的最广泛的观测(Reifenstein 等, 1970; Wilson 等, 1970)。复合谱线观测还可用来得出氢和氦的宇宙相对丰度。射电频率数据(Churchwell 和 Mezger, 1970) 表明一次电离氦与电离氢的数目之比为 0.08±0.03。从 HII 区——猎户座 A——来的复合谱线如图 12 所示。

为了说明如何从观测得到 HII 区的参量, 我们注意复合谱线是在气体云连续辐射背景上观测到的。由(1-222)式可知, 对于光学薄的气体来说, 当它的角范围大于天线射束宽度时, 连续谱天线温度 T_c 由下式给出:

$$T_c=\frac{32\pi^2 e^6}{3\sqrt{2\pi}\,m^3 c}\frac{\eta_A T_e}{n_\nu(2\pi\nu)^2}\left(\frac{m}{kT_e}\right)^{3/2}\int_0^L N_e\sum_j Z_j^2 N_j \ln \Lambda dl$$

$$=*3.014673\times10^{-2}T_e^{-1/2}\nu^{-2}\int_0^L N_e\sum_j Z_j^2 N_j \ln\Lambda dl \text{ 开}^{1)}, \tag{2-120}$$

式中 η_A 是天线效率, j 的求和是对所有离子进行的, n_ν 是折射率, L 是气体云沿视线方向的长度, 在表 2 中给出了自由-自由冈特对数因子 Λ。数值近似是对 $n_\nu=1$ 而言的, 频率的单位是京赫, 长度 L 的单位是秒差距。当利用(1-223)式给出的光学深度的射电频率近似式以及(2-117)式时, 我们得到下列关系式:

$$\frac{\Delta\nu_D \Delta T_L}{T_c}\approx 2.33\times10^4 \nu_{mn}^{2.1} T_e^{-1.15}\left(\frac{E_L}{E_c}\right) \text{ 千赫}, \tag{2-121}$$

式中谱线的半极大全半宽 $\Delta\nu_D$ 的单位是千赫, 谱线频率 ν_{mn} 的单位是千赫, 温度的单位是开, 谱线发射量 E_L 与连续谱发射量 E_c 之比为:

$$\frac{E_L}{E_c}\approx\frac{N_i/N_{H^+}}{1+(N_{He^+}+4N_{He^{++}})/N_{H^+}}\approx\frac{1}{1+N_{He^+}/N_{H^+}}\approx 0.93, \tag{2-122}$$

式中 N_i 是复合离子的数密度, N_{H^+}、N_{He^+} 及 $N_{He^{++}}$ 分别是电离氢、一次电离氦及二次电离氦的数密度。(2-121)式表明电子温度 T_e 可由观测 $\Delta\nu_D$、ΔT_L 及 T_c 而得出。因而将此 T_e 值代入(2-117)式就可得出发射量 $E_L=\int_0^L N_e N_i dl$。当电离区是处于局部热动平衡时就应当用(2-121)式。在非局部热动平衡条件下, 利用第 2.10 节所建立的公式就可以把 HII 区观测到的参量与物理参量联系起来。表 12 列出了用(2-117)和(2-121)式得到的电子温度与发射量的值以及 200 个 HII 区的其他参量。

2.13. 原子精细结构

对于具有几个电子的原子来说,通常是用基于罗素-桑德斯(LS)耦合的量子数来描述精细结构的(Russell 和 Saunders, 1925)。

n= 主量子数(参看(Bohr, 1913)及(2-4)、(2-8)式)。

L= 总轨道量子数, 单位是 $h/2\pi$。L 是所有电子的轨道角动量 l 的矢量和。L 总是整数, 并且 $L=0$、1、2、3、4 和 5 分别用符号 S、P、D、F、G 和 H 来表示。电子的 l 值取 $n-1$ 个值。

S= 总自旋角动量, 单位是 $h/2\pi$。S 是所有电子的自旋角动量 s 的矢量和。一个电子有 $s=\pm1/2$, 当原子具有偶数或奇数个电子数时 S 相应为整数或半整数(参看 Uhlenbeck 和 Goudsmit, 1925, 1926; Thomas, 1926, 1927; Pauli, 1925, 1927)。

1) 此式中应乘以天线效率 η_A。——译者注

J=总角动量，单位是 $h/2\pi$。在 LS 耦合时，J 是 $L+S$ 矢量和。按照 $L<S$ 或 $L\geqslant S$，可能的 J 值是 $2L+1$ 或 $2S+1$。

每一对 L 和 S 表示一个光谱项，光谱项的每一能级都有符号 $n^{2S+1}L_J$，其中 L 由其字母符号给出。卡塔兰(Catalán, 1922)首先观测到，在两个光谱项中的所有能级间的可能跃迁产生一组近邻的谱线，称为多重谱线。跃迁必须遵守的选择定则列于表 13 中。

表 13 原子光谱的选择定则(参看 Pauli, 1925; Laporte, 1924; Shortley, 1940)

电偶极子（容许的）	磁偶极子（禁戒的）	电四极子（容许的）
(1) $\Delta J=0,\ \pm1$	$\Delta J=0,\ \pm1$	$\Delta J=0,\ \pm1,\ \pm2$
$(0 \nleftrightarrow 0)$	$(0 \nleftrightarrow 0)$	$(0 \nleftrightarrow 0,\ \frac{1}{2} \nleftrightarrow \frac{1}{2},\ 0 \nleftrightarrow 1)$
(2) $\Delta M=0,\ \pm1$	$\Delta M=0,\ \pm1$	$\Delta M=0,\ \pm1,\ \pm2$
(3) 宇称变化	无宇称变化	无宇称变化
(4) 一个电子跳变	无电子跳变	一个或无电子跳变
$\Delta l=\pm1$	$\Delta l=0$	$\Delta l=0,\ \pm2$
(当 L-S 耦合)	$\Delta n=0$	
(5) $\Delta S=0$	$\Delta S=0$	$\Delta S=0$
(6) $\Delta L=0,\ \pm1$	$\Delta L=0$	$\Delta L=0,\ \pm1,\ \pm2$
$(0 \nleftrightarrow 0)$		$(0 \nleftrightarrow 0,\ 0 \nleftrightarrow 1)$

符号 $\nleftrightarrow$ 表示“不能与…组合”。例如，$\Delta J=0,\ \pm1$ 后的 $\nleftrightarrow$ 意思是指 $J=0$ 能级不能与另一个 $J=0$ 能级组合。宇称变化表示对电子 l 求和的光谱项是偶的话就只能与 L 求和为奇的光谱项组合，反之亦然。一旦适当的跃迁确定以后，谱线频率 ν_{mn} 以及相应的 A_{mn}、f_{nm} 或

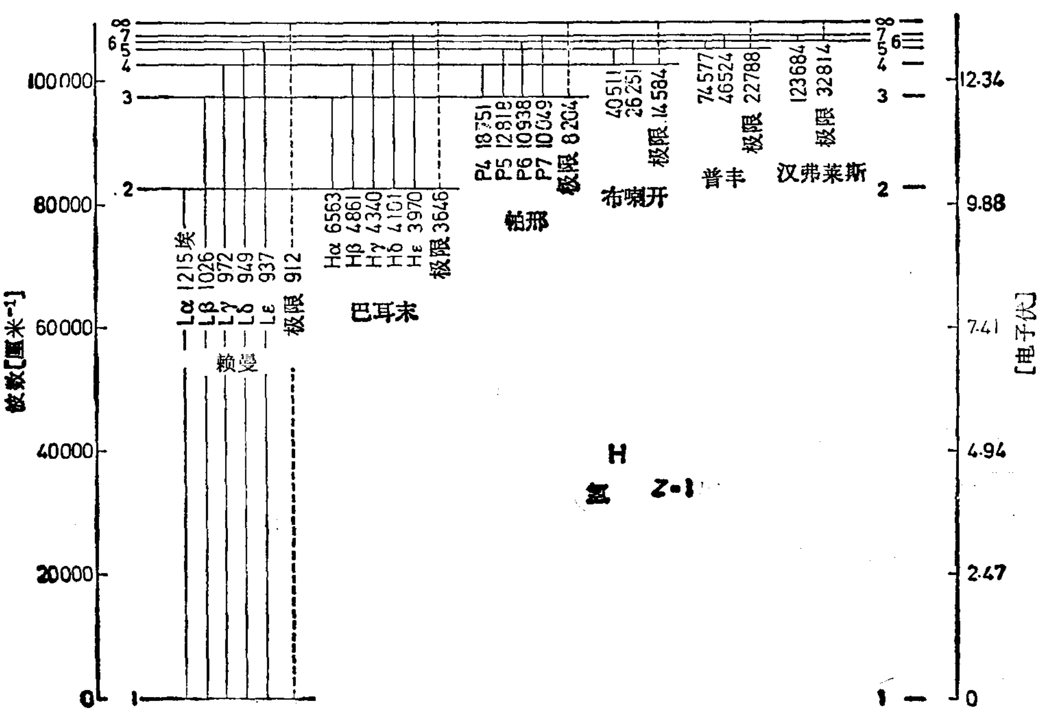


图 13 H、HeI、HeII、CII、CIII、CIV、OI、OII、OIII、NII、MgI、MgII、CaI、CaII、FeI 及 FeII 的格罗特里安图

(取自 Moore 和Merill, 1968 的文章)

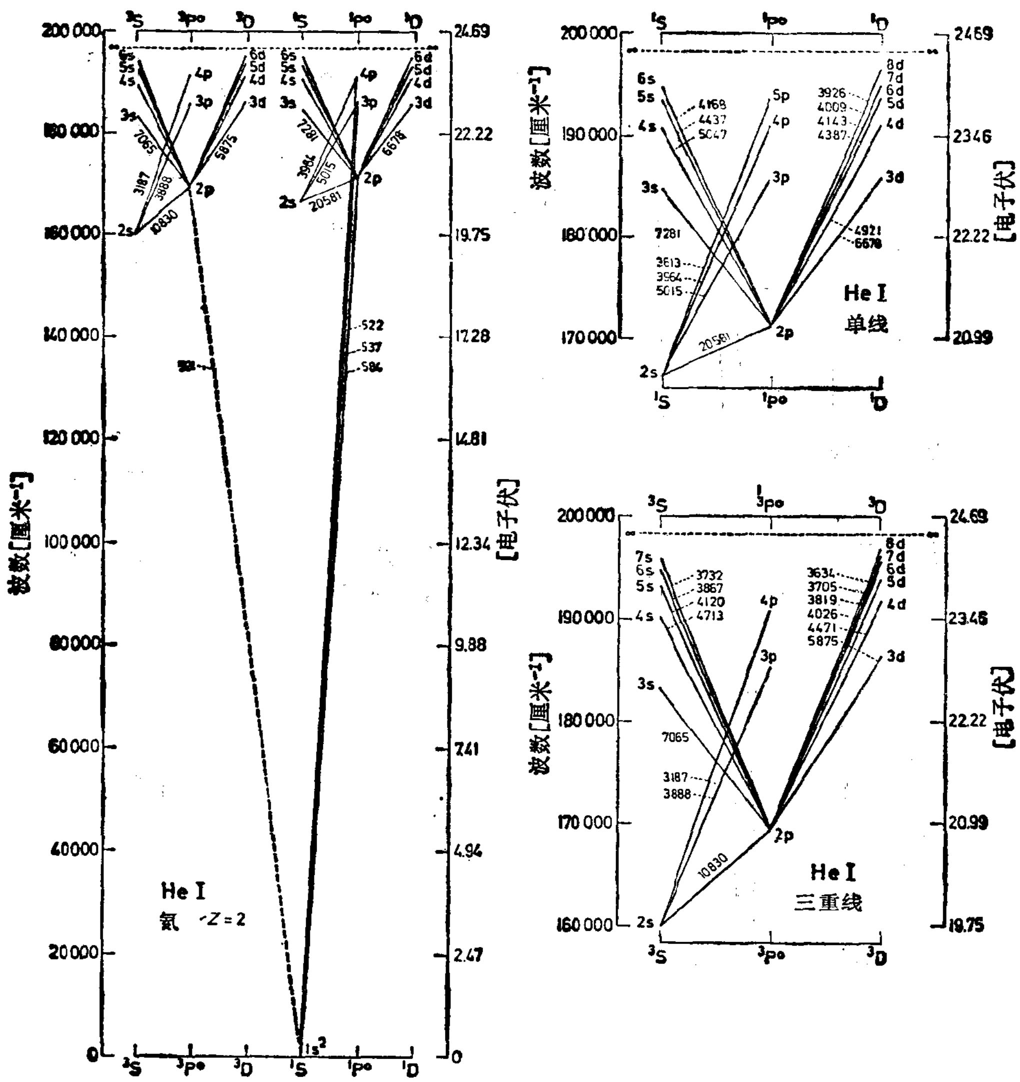
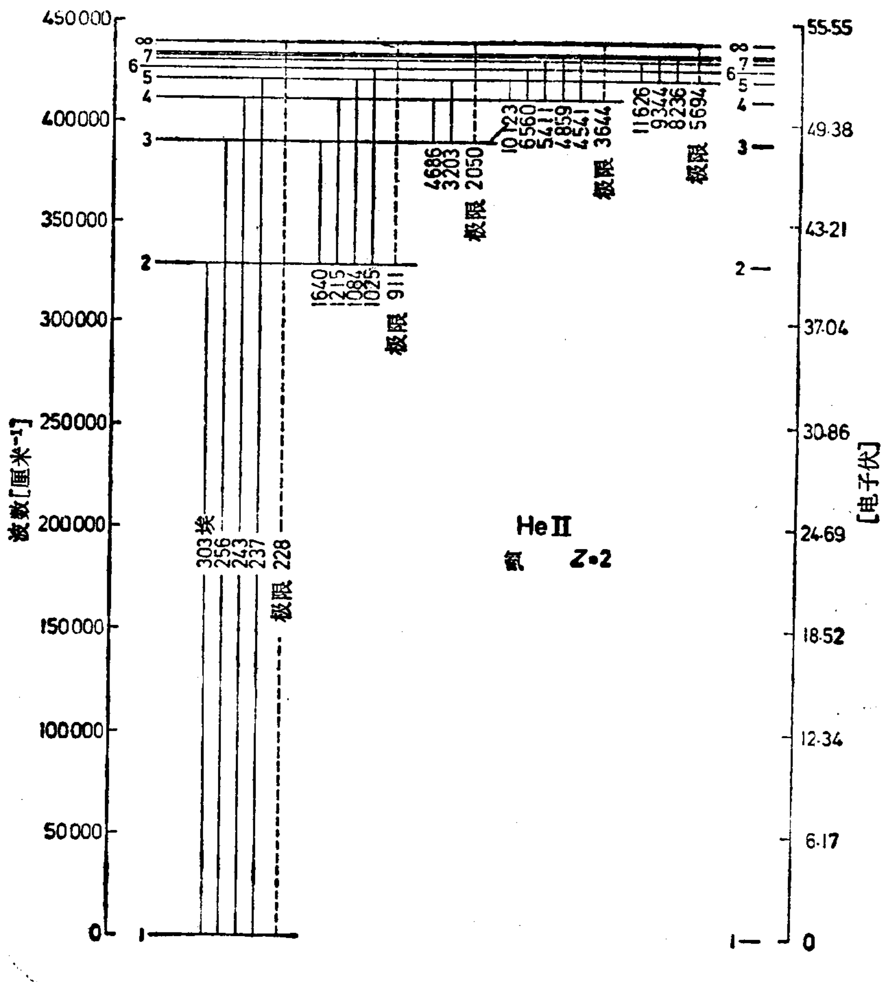

He I
氦 Z=2
波数[厘米⁻¹]
[电子伏]
He I
单线
He I
三重线
^3S $^3P^o$ ^3D ^1S $^1P^o$ ^1D
1s²
2s 2p 3s 3p 3d 4s 4p 4d 5s 5p 5d 6s 6d 7s 7d 8d
10830 3187 3888 7065 5875 20581 3964 5015 7281 6678 522 537 584 591
4168 4437 5047 3613 3926 4009 4143 4387 4921
3732 3867 4120 4713 3634 3705 3819 4026 4471
200 000 190 000 180 000 170 000 160 000 140 000 120 000 100 000 80000 60000 40000 20000 0
24.69 23.46 22.22 20.99 19.75 17.28 14.81 12.34 9.88 7.41 4.94 2.47 0

图 13 格罗特里安图(续)



波数[厘米⁻¹]
450000
400000
350000
300000
250000
200000
150000
100000
50000
0
[电子伏]
55.55
49.38
43.21
37.04
30.86
24.69
18.52
12.34
6.17
0
He II
氦 Z=2
303埃
256
243
237
极限 228
1640
1215
1084
1025
极限 911
4686
3203
极限 2050
10123
6560
5411
4859
4541
极限 3644
11626
9344
8236
极限 5694

图 13 格罗特里安图(续)

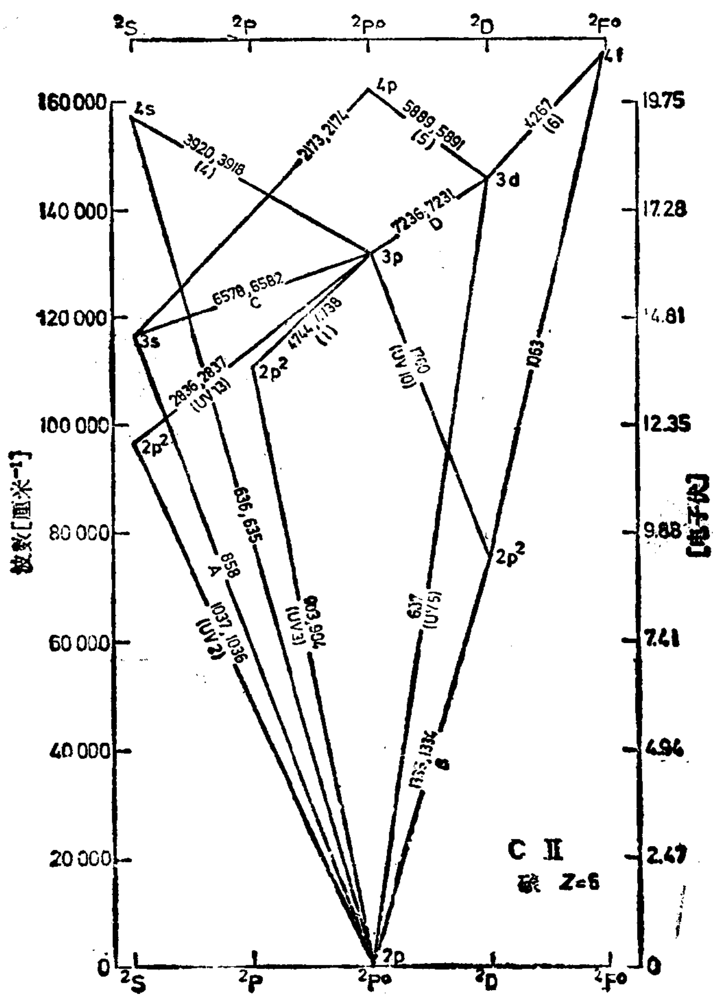


图 13 格罗特里安图(续)

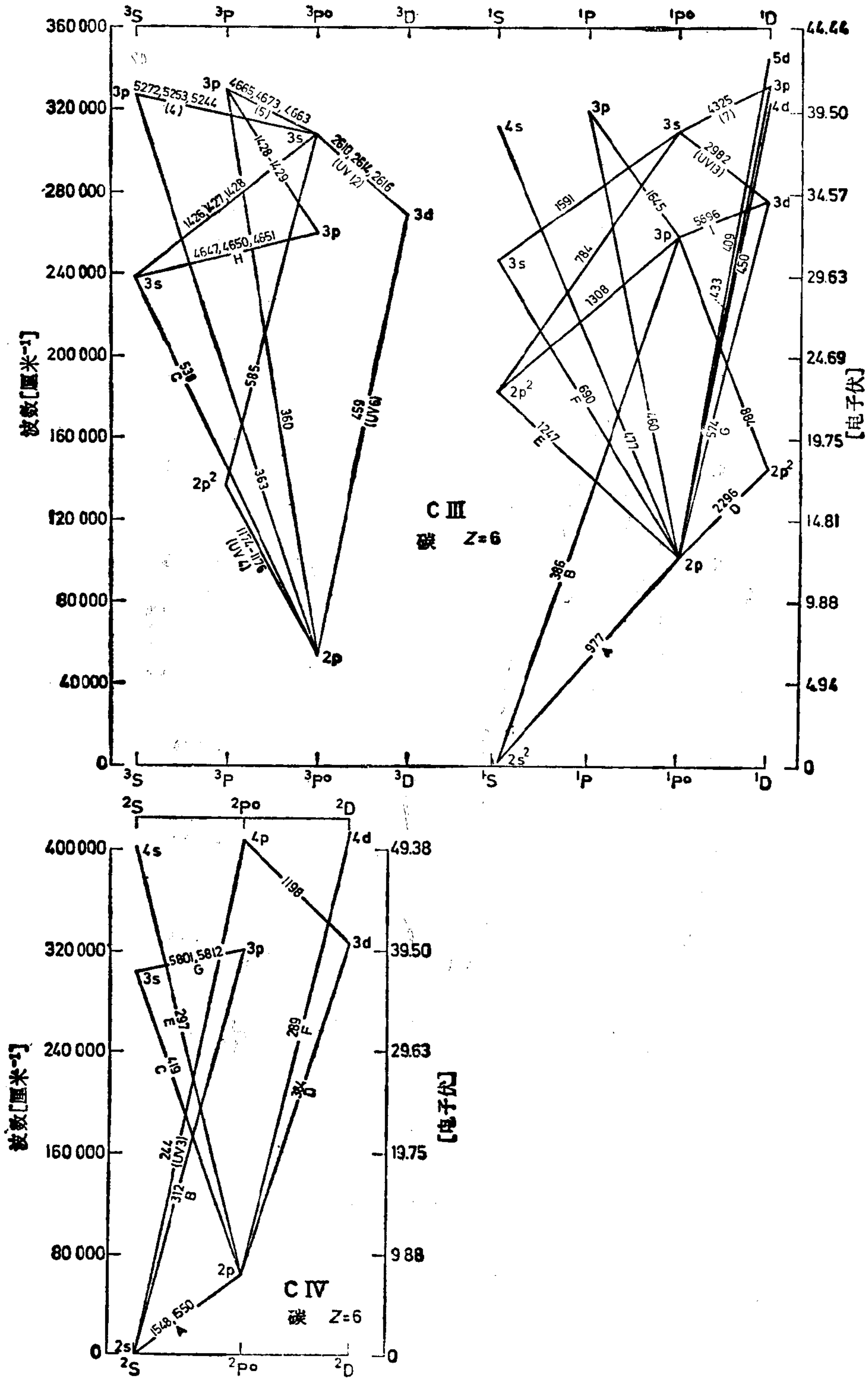


图 13 格罗特里安图(续)

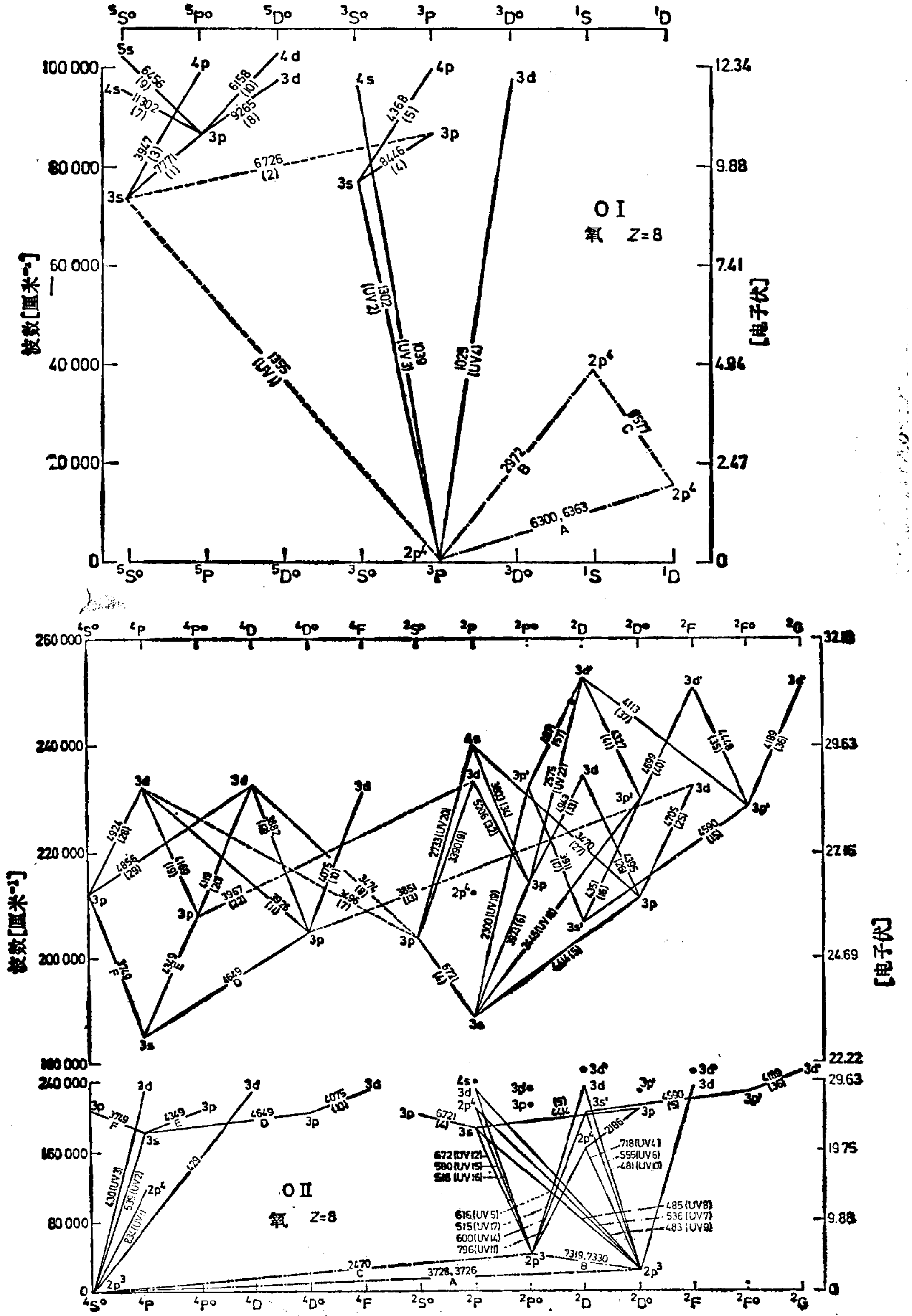

O I
氧 Z=8
波数[厘米⁻¹]
[电子伏]
100 000
80 000
60 000
40 000
20 000
0
12.34
9.88
7.41
4.94
2.47
0
O II
氧 Z=8
260 000
240 000
220 000
200 000
180 000
160 000
80 000
32.13
29.63
27.16
24.69
22.22
19.75
9.88

图 13 格罗特里安图(续)

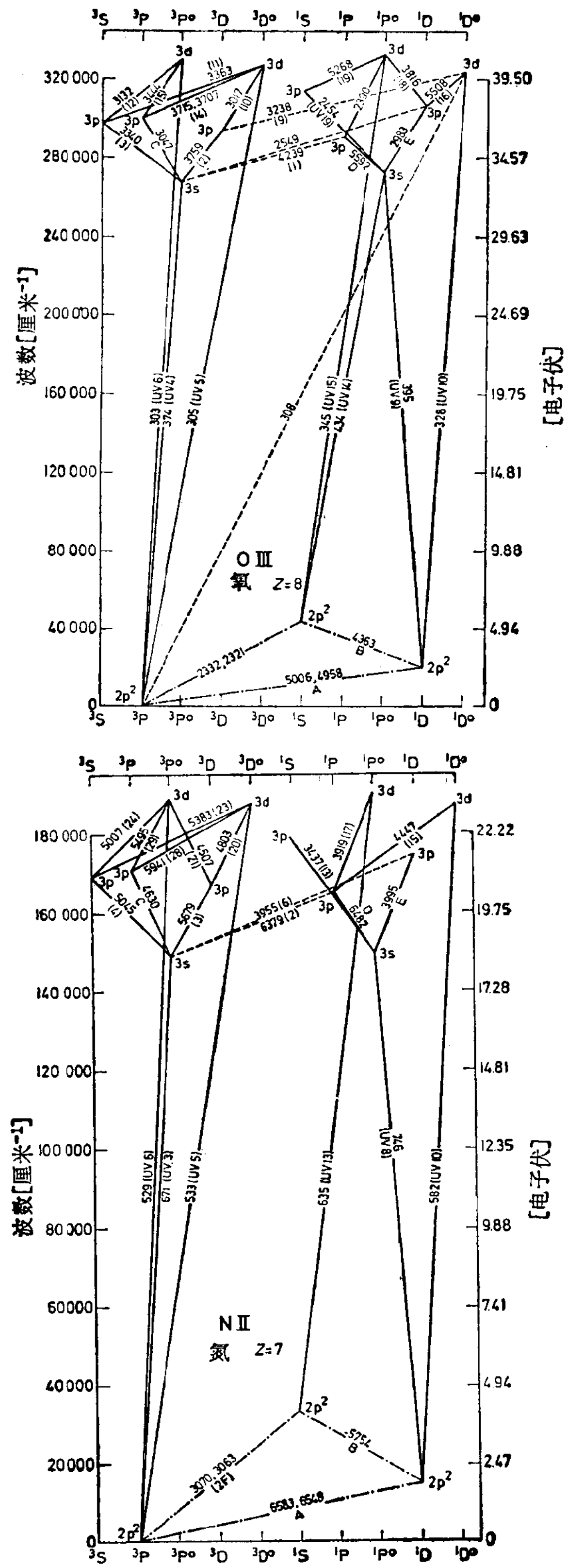
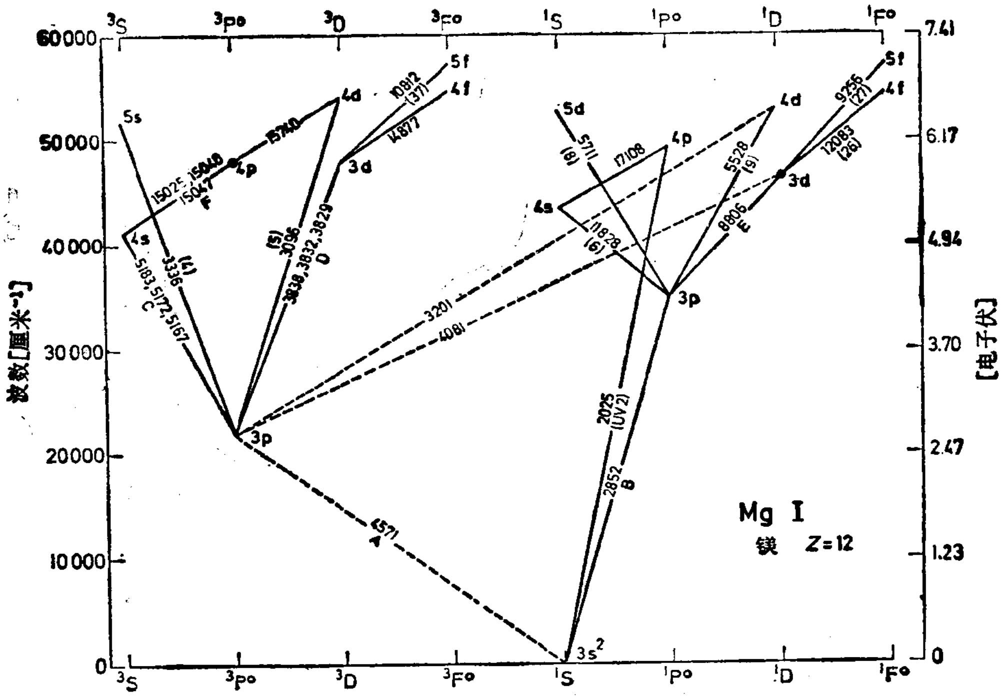
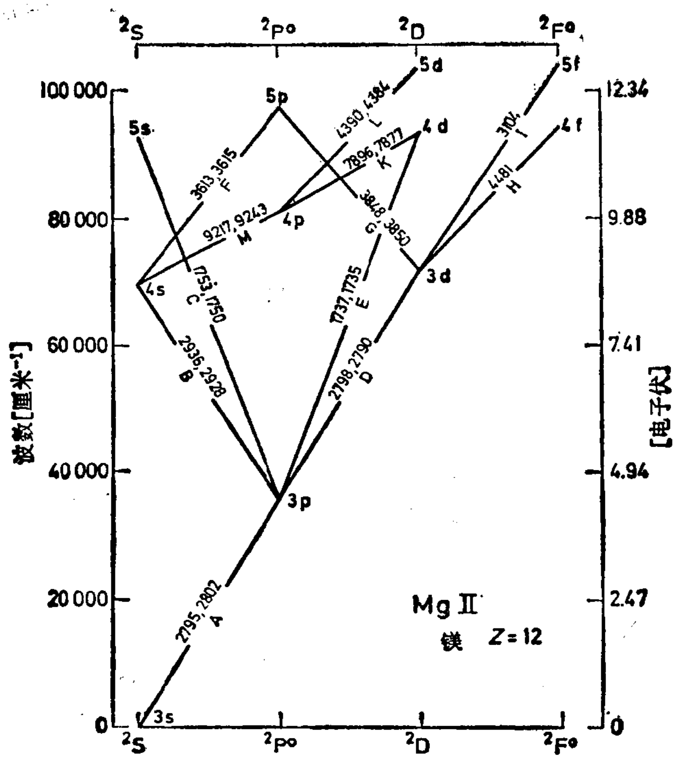


图 13 格罗特里安图(续)



Mg I
镁 Z=12
波数[厘米⁻¹]
[电子伏]
3s²
3p
4s
5s
3d
4d
4p
4f
5f
5d



Mg II
镁 Z=12
波数[厘米⁻¹]
[电子伏]
3s
3p
4s
5s
3d
4d
4p
5p
4f
5f
5d

图 18 格罗特里安图(续)

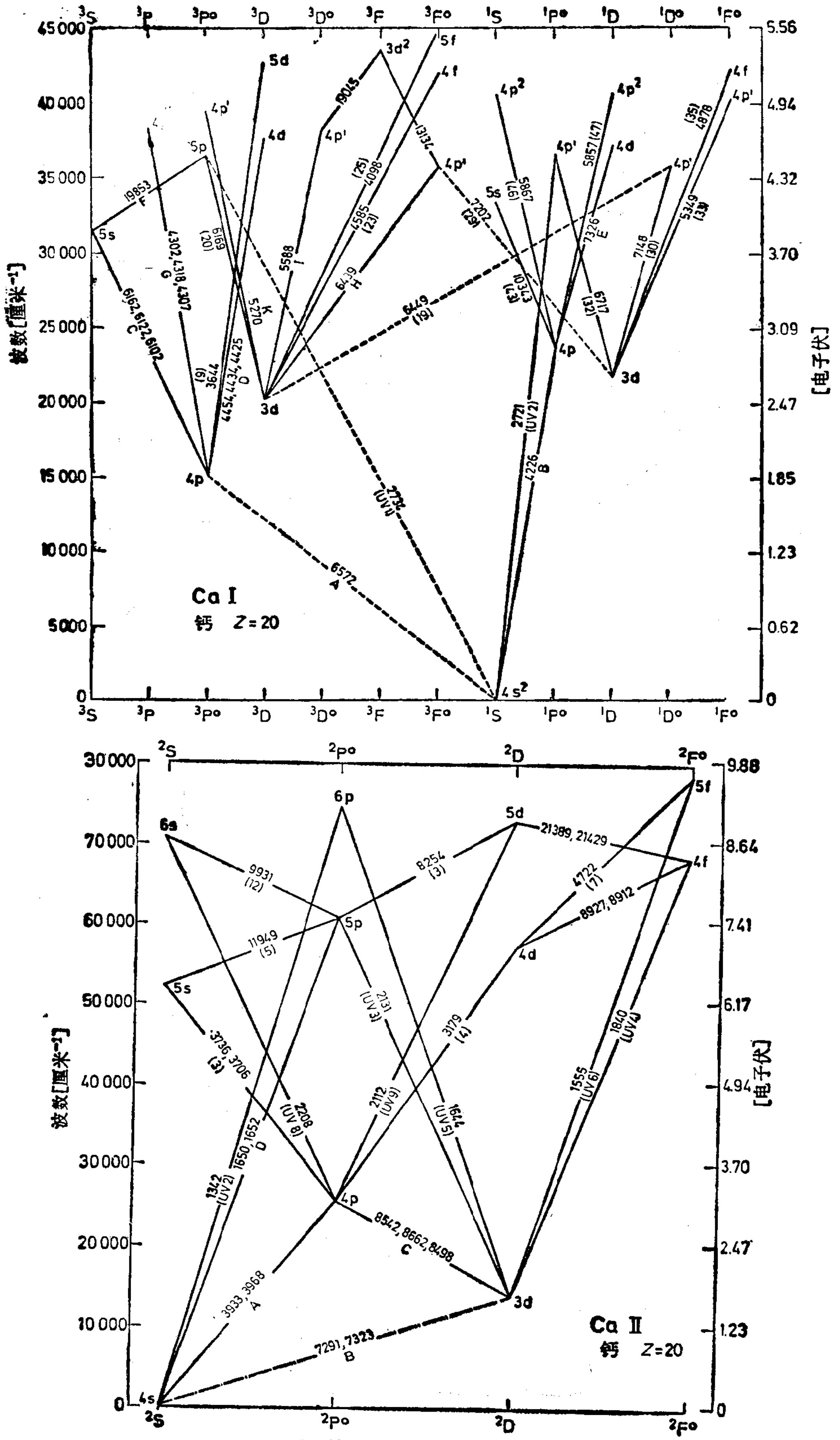


图 13 格罗特里安图(续)

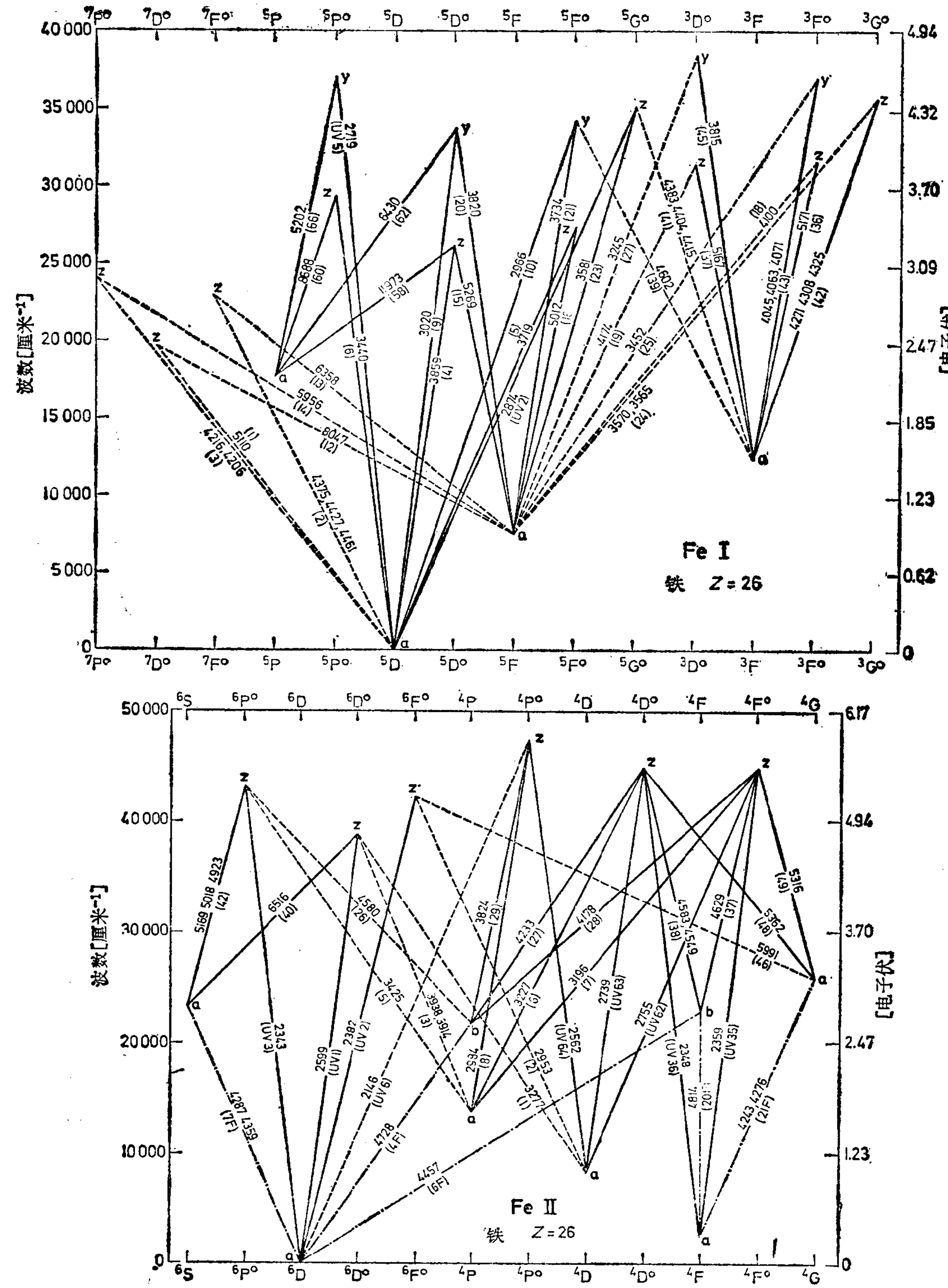


图 13 格罗特里安图(续)

表 14 各种元素光谱中的相应谱线(用于格罗特里安图)[1]

标号字母	多重载符号	λ	多重线数	λ	多重线数	λ	多重线数
		CI		NII		OIII	
A…	$2p^{2\,3}P-2p^{2\,1}D$	(9849.3P)	(1F)	6583.4	(1F)	5006.9	(1F)
		(9823.1P)		6548.1		4958.9	
B…	$2p^{2\,1}D-2p^{2\,1}S$	(8727.6P)	(3F)	5754.6	(3F)	4363.2	(2F)
C…	$3s^3P^0-3p^3P$	9094.9	(3)	4630.5	(5)	3047.1	(4)
		9078.3		4613.9		3055.4	
		9111.8		4643.1		3059.3	
		9088.6		4621.4		3043.0	
		9061.5		4601.5		3023.4	
		9062.5		4607.2		3024.6	
D…	$3s^1P^0-3p^1P$	14540.2		6482.1	(8)	5592.4	(5)
E…	$3s^1P^0-3p^1D$	9405.8	(9)	3995.0	(12)	2983.8	(6)
		CII		NIII		OIV	
A…	$2p^2P^0-3s^2S$	858.6	(UV4)	452.2	(UV4)	279.9	(UV4)
		858.1		451.9		279.6	
B…	$2p^2P^0-2p^{2\,2}D$	1335.7	(UV1)	991.6	(UV1)	790.2	(UV1)
		1334.5		989.8		787.7	
				991.5		790.1	
C…	$3s^2S-3p^2P^0$	6578.0	(2)	4097.3	(1)	3063.5	(1)
		6582.8		4103.4		3071.7	
D…	$3p^2P^0-3d^2D$	7236.2	(3)	4640.6	(2)	3411.8	(2)
		7231.1		4634.2		3403.6	
				4641.9		3413.7	
		CIII		NIV		OV	
A…	$2s^{2\,1}S-2p^1P^0$	977.0	(UV1)	765.1	(UV1)	629.7	(UV1)
B…	$2s^{2\,1}S-3p^1P^0$	386.2	(UV2)	247.2	(UV2)	172.2	(UV2)
C…	$2p^3P^0-3s^3S$	538.3	(UV5)	322.7	(UV4)	215.2	(UV4)
		538.2		322.6		215.1	
		538.1		322.5		215.0	
D…	$2p^1P^0-2p^{2\,1}D$	2296.9	(UV8)	1718.5	(UV7)	1371.3	(UV7)
E…	$2p^1P^0-2p^{2\,1}S$	1247.4	…	955.3	(UV8)	774.5	(UV8)
F…	$2p^1P^0-3s^1S$	690.5	(UV10)	387.4	(UV9)	248.5	(UV9)
G…	$2p^1P^0-3d^1D$	574.3	(UV11)	335.0	(UV10)	220.4	(UV10)
H…	$3s^3S-3p^3P^0$	4647.4	(1)	3478.7	(1)	2781.0	…
		4650.2		3483.0		2787.0	
		4651.4		3484.9		2789.9	
I…	$3p^1P^0-3d^1D$	5696.0	(2)	4057.8	(3)	3144.7	(2)
		NI		OII		NeIV	
A…	$2p^{3\,4}S^0-2p^{3\,2}D^0$	5200.4	(1F)	3728.8	(1F)	(2441±P)	…
		5197.9		3726.0		(2438±P)	
B…	$2p^{3\,2}D^0-2p^{3\,2}P^0$	(10396.5P)	(3F)	7319.9	(2F)	4714.2	(1F)
		(10406.2P)		7330.2		4725.6	
		(10396.5P)		7319.9		4715.6	
		(10406.2P)		7330.2		4724.2	
C…	$2p^{3\,4}S^0-2p^{3\,2}P^0$	(3466.4P)	(2F)	(2470.4P)	…	(1609±P)	…
		(3466.4P)		(2470.3P)		(1609±P)	
D…	$3s^4P-3p^4D^0$	8680.2	(1)	4649.1	(1)	—	—
		8683.4		4641.8			
		8686.1		4638.9			
		8718.8		4676.2			
		8711.7		4661.6			
		8703.2		4650.8			
E…	$3s^4P-3p^4P^0$	8216.3	(2)	4349.4	(2)	(2203.6P)	…
		8210.6		4336.9		(2192.4P)	
		8200.3		4325.8		(2188.0P)	
		8242.3		4367.0		(2220.3P)	
		8223.1		4345.6		(2206.2P)	
		8184.8		4319.6		(2176.1P)	
		8188.0		4317.1		(2174.4P)	
F…	$3s^4P-3p^4S^0$	7468.3	(3)	3749.5	(3)	(1875.2P)	…
		7442.3		3727.3		(1855.3P)	
		7423.6		3712.8		(1842.4P)	

[1] 取自穆尔等(Moore 和 Merrill, 1968)的著作。

S_{mn} 可用量子力学的详尽公式计算出来，或在实验室中直接测量它们的值。作为一个例子，类氢原子的 L 和 S 间的相互作用所引起的精细结构能量 $E_{精细}$ 由下式给出(Landé, 1923; Thomas, 1926):

$$E_{精细}=\alpha^2\frac{hcRZ^4}{n^3}\left[\frac{J(J+1)-L(L+1)-S(S+1)}{L(L+1)(2L+1)}\right], \tag{2-123}$$

式中精细结构常数 $\alpha=2\pi e^2/(hc)\approx{}^*7.2973506\times10^{-3}$, 里德伯常数 $R=Z^2R_A=2\pi^2\mu Z^2e^4/(ch^3)$, 其中 R_A 由(2-113)式给出，折合质量 $\mu=[mM_A/(m+M_A)]$, Z 是离子电荷。因而任何跃迁的频率可由(2-7)和(2-123)式得出。(2-123)式表示朗德(Landé)间隔定则，该定则指出，在给定的能级 J 与能级 $J-1$ 之间的间隔正比于 J。

能量和波长的值可以方便地从格罗特里安图上找到，该图形象地表示出了特征谱线与原子或离子的量子能级的关系。图 13 给出了天体物理学中感兴趣的原子和离子的格罗特里安图。多重线用直线代表：实线表示相同多重性的光谱项之间的跃迁，虚线表示不同多重性的光谱项之间的跃迁(系际多重线)，点划线表示较上面的光谱项是亚稳态的跃迁(相同宇称的光谱项之间的跃迁是禁戒的)。大于 2000 埃的波长是在空气中的国际埃值，而小于 2000 埃的波长是在真空中的值。为了使不止一种的元素用一张图，在表 14 中列出各种元素的相应光谱的谱线。图和表两者都是由穆尔等(Moore 和 Merrill, 1968)给出的数据得出的。

处在 LS 耦合态的电偶极子谱线强度由下式给出:

$$S_{mn}=\varphi(\mathscr{M})\varphi(\mathscr{L})\sigma_{mn}^2, \tag{2-124}$$

式中 $\varphi(\mathscr{M})$ 随跃迁特定多重线的排列而定，$\varphi(\mathscr{L})$ 随多重线的谱线而定，以及

$$\sigma_{mn}^2=(4l^2-1)^{-1}\left\{\int_0^\infty P_mP_nr'\,dr'\right\}^2, \tag{2-125}$$

式中 P_m/r' 和 P_n/r' 是当光电子处在角量子数为 l 和 $l-1$ 的组态时，高能态和低能态跃迁的径向波函数。这里按照原子单位，即取 $h=e=m=1$ 对波函数作了归一化(Hartree, 1928)，它们便是与时间无关的波动方程(Schrödinger, 1925, 1926):

$$H\Psi=E\Psi \tag{2-126}$$

的解，式中 Ψ 是波函数的振幅、E 是能态。哈密顿算符 H 作用于波函数，对于处在标势 $V(r)$ 中的一个质量为 m 的粒子来说，哈密顿算符为:

$$H=\left[-\frac{h^2}{8\pi^2m}\nabla^2+V(r)\right]。 \tag{2-127}$$

(2-126)和(2-127)式是直接根据：速度为 v 的粒子具有德布罗意波长(de Broglie, 1923, 1925) $\lambda=h/(mv)$，它的量子化角动量由(2-4)式给出以及波函数满足平面波方程的这些假定得出的。

为了完全解出罗素-桑德斯情况，我们必须用哈密顿算符

$$H=\sum_{i=1}^{p}\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_i^2-\frac{Ze^2}{r_i}\right]+\sum_{ij}\frac{e^2}{r_{ij}}, \tag{2-128}$$

式中 Z 是原子序数，p 是电子数，$\sum Ze^2/r_i$ 项表示电子与原子核的库仑相互作用，而双重求和表示电子本身的库仑相互作用(因此每一对电子只计及一次，略去 $i=j$，故共有 $p(p-1)/2$ 项)。在辏力场近似情况下得出一种更简单的哈密顿算符(Hartree, 1928):

$$H=\sum_{i=1}^{p}\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_i^2-V(r_i)\right], \tag{2-129}$$

式中当 $r\to0$ 时，电势 $V(r)$ 趋近于 $-Ze^2/r$；而当 r 很大时，则为 $(Z-p+1)e^2/r$。

表 15 最丰富元素在其最丰富电离级发出的最强的紫外、可见光及近红外谱线波长 λ 表(禁戒跃迁用方括号表示[1]

离 子	λ 埃	离 子	λ 埃	离 子	λ 埃	离 子	λ 埃	离 子	λ 埃
NII	917	NIV	1,488	OIII	3,047	[SII]	4,069,4,076	Hα	6,563
ArII	920,**932**	CIV	**1,549,1,551**	[NII]	3,063	NIII	4,097	[NII]	6,583
SVI	933	[NeV]	1,575	OIII	**3,133**	HeII	**4,100**	HeI	6,678
CIII	977	[NeIV]	1,602	HeII	3,203	Hδ	4,102	[SII]	**6,717,6,734**
NIII	990,992	HeII	1,640	OIII	3,299,3,312	HeII	**4,200**	[ArV]	**7,006**
HeII	993	OIII	1,661,1,663	OIII	3,341	Hγ	4,340	HeI	7,065
ArVI	992,**1,002**	OIII	1,667	[NeIII]	3,343	[OIII]	4,363	[ArIII]	7,136
ArVI	1,014,**1,023**	NIII	1,750	[NeV]	**3,346**	HeI	4,388,**4,471**	[OII]	7,320,7,325,**7,330**
NeVI	1,020	SiII	1,808,1,817	OIV	3,412	HeII	4,541	[ArIII]	7,751
OVI	1,035	[NeIII]	1,815	[NeV]	3,426	MgI	4,571	[ClIV]	8,046
CII	1,037	Hγ, CIII	1,909	OIII	3,429,**3,444**	NIII	**4,634,4,641**	HeII	8,237
SIV	**1,073**	NII	2,141	HI	3,691,3,697	CIII	4,647	P_{13}	8,665
NII	1,084,1,086	[OIII]	2,321	HI	3,704,3,712	CIV, [FeIII]	4,658	P_{12}	8,750
HeII, NII	1,085	CII	2,326	HI, [SIII]	3,722	HeII	4,686	P_{11}	8,862
SiII	1,194	[NeIV]	2,424,2,426	[OII]	3,727,**3,729**	[ArIV],HeI	4,711	P_{10}	9,014
SIII	1,201	[OII]	2,470	HI	**3,734,3,750**	[NeIV]	4,724,4,726	[SIII]	9,069
SiIII	1,207	HeII,[MgVII]	2,512	OIII	3,760	[ArIV]	4,740	P_9	**9,229**
Lyα, OV	1,216	[MgVII]	2,632	HI	3,771,**3,798**	Hβ	4,861	P_8[SIII]	9,545
NV	**1,240,1,243**	HeII	**2,734**	HeI	3,820	HeI	4,922	CIII	**9,710**
SII	1,261	[MgV]	2,786	HI	**3,835**	[OIII]	4,959,5,007	NaI	**9,961**
SiII	1,265	MgII	**2,796,2,799**	[NeIII]	3,869	HeII	**5,412**	P_δ	10,049
CII	1,336	MgII	2,804	Hζ	3,889	[NII]	5,755	HeII	**10,120,10,124**
SiIV	1,394,1,403	[ArIV]	2,855	HeI	3,965	HeI	5,876	[SII]	10,320
OIV	1,402,1,405	[ArIV]	2,869	[NeIII]	3,968	[OI][SIII]	6,300	SiI	**10,371,10,603**
OIV	1,406	[MgV]	2,931	Hε, [NeIII]	3,970	[OI]	6,364	SiI	**10,627,10,689**
OIV	1,410,1,413	[NeV]	2,973	HeI, HeII	4,026	[NII]	6,549	CI	**10,691**

[1] 取自阿勒尔等(Aller、Bowen 和 Wilson, 1963; O'Dell,1963; Osterbrock, 1963; Burbidge 和 Burbidge, 1967; 以及 Tarter, 1969)的文章。

罗素(Russell, 1925)和狄拉克(Dirac, 1926)首先计算了在一组多重线内的谱线相对强度的解。罗素(Russell, 1936)把这些解列成了实用的表。贝茨等(Bates 和 Damgaard, 1949)以(2-124)式为根据提供了计算σ_{mn}的表；戈德堡(Goldberg, 1935)和门泽尔等(Menzel 和 Goldberg, 1936)编制了多重线相对强度$\varphi(\mathscr{M})$，而怀特等(White 和 Eliason, 1933)以及罗素(Russell, 1936)编制的谱线相对强度$\varphi(\mathscr{L})$在艾伦(Allen, 1963)的书中已给出[1)]。某些求和定则可用于检验谱线的相对强度。伯格-多奇洛-奥恩斯坦(Burger-Dorgelo-Ornstein)求和定则(Burger 和 Dorgelo, 1924; Ornstein 和 Burger, 1924)指出，在属于相同初态或终态的一组 LS 多重线中，所有谱线的和分别正比于初态或终态的统计权重 $2J+1$。腊希-托马斯-库恩(Reiche-Thomas-Kuhn)f-求和定则(Thomas, 1925; Kuhn, 1925)指出，由单一原子能级引起的所有谱线的f值之和应该等于光电子的数目(包括处在给定光谱线和连续谱区的电子)。肖特利等(Shortley, 1935; Menzel 和 Goldberg, 1936; Menzel, 1947; 和 Rohrlich, 1959)已推导出了另外的一些有用的求和定则。

穆尔(C. E. Moore, 1949, 1952, 1958)给出了原子能级表。穆尔(C. E. Moore, 1949, 1952, 1959)和梅里尔(P. W. Merrill, 1958)给出了谱线频率值。加斯坦(Garstang, 1962)给出了原子禁线频率及强度的文献目录。格伦农(Glennon 和 Wiese, 1962)出版了关于f值和跃迁几率的文献目录。瓦萨夫斯基(Varsavsky, 1961)给出了某些谱线的强度。奥斯特布罗克等(Osterbrock, 1963; Burbidge 和 Burbidge, 1967; 以及 Tarter, 1969)给出了紫外及禁线强度。艾伦(Allen, 1963)[2)]编制了容许的和禁戒的原子谱线频率以及它们的振子

表 16 在类星体光谱中最可能发现的吸收线的波长[1]

离	子[2]	波长(埃)	离	子[2]	波长(埃)
HI	(0.1)	949.74	CII		1,335.3
HI	(0.2)	972.54	SiIV	(2)	1,393.76
CIII		977.03	SiIV	(1)	1,402.77
SiII	(0.15)	989.87	SiII	(0.15)	1,526.72
SiII[2]	(0.3)	992.68	SiII[2]	(0.3)	1,533.45
HI	(0.5)	1,025.72	CIV	(2)	1,548.20
OVI	(2)	1,031.95	CIV	(1)	1,550.77
OVI	(1)	1,037.63	AlII		1,670.81
NII		1,085.10	AlIII	(2)	1,854.72
FeIII		1,122.53	AlIII	(1)	1,862.78
FeII		1,144.95	FeII		2,344.2
SiII	(0.6)	1,193.28	FeII		2,374.5
SiII[2]	(1.4)	1,194.50	FeII		2,382.8
SiIII		1,206.51	FeII		2,586.7
HI	(3.3)	1,215.67	FeII		2,600.2
NV	(2)	1,238.81	MgII	(2)	2,795.50
NV	(1)	1,242.80	MgII	(1)	2,802.70
SiII	(1)	1,260.42	HeI	(0.7)	3,187.74
SiII[2]	(2)	1,264.76	HeI	(2.5)	3,888.65

[1] 取自巴考尔(Bahcall, 1968)的文章。

[2] 离子符号后的角标 2 表示由受激谱线结构态引起的谱线。圆括号内给出预期的相对强度。

1) 可参阅中译本《物理量和天体物理量》，上海人民出版社，1976年版 § 27。——译者注

2) 参看注 1) § 29、§ 30。——译者注

强度或跃迁几率的最完善用表。国际天文学联合会第14届委员会的报告(1955、1958、1961、1964、1967、1970、…)给出了原子和分子谱线频率和强度范围更为广泛的文献目录。

表15给出了从最丰富的元素[H、He、O、C、N、Ne、Si、Mg、S及Ar]所观测到的最强的原子谱线波长。符号I、II、III、… 分别表示中性的、一次电离的、二次电离的、…原子。巴考尔等(Bahcall, 1968; Bahcall, Greenstein 和 Sargent, 1968; 以及 Shields、Oke 和 Sargent, 1972)讨论了最可能在类星体光谱中发现的吸收线。表16给出这些谱线的波长。

在射电频率范围内只可能发现少数原子的精细结构跃迁。最可能发现的是 $n=2$ 氢的 $^2P_{3/2}$–$^2S_{1/2}$ 跃迁, $\nu_{mn}=9.9126\times10^9$ 赫, $n=2$ 氢的 $^2S_{1/2}$–$^2P_{1/2}$ 跃迁, $\nu_{mn}=1.0578\times10^9$ 赫。当这些能级很不稳定时, 这些谱线宽度将是很宽的, $\Delta\nu_L\approx10^8$ 赫。

2.14. 原子的超精细结构

当原子核的自旋变得重要时, 描述原子就要加上另外两个量子数。

I=原子核的总自旋角动量, 单位是 $h/2\pi$。I 是正的, 并取整数或半整数。

F=原子总角动量, 单位是 $h/2\pi$。它是 J 和 I 的矢量和, 按照 $J<I$ 或 $J\geqslant I$ 而取为 $2J+1$ 或 $2I+1$ 的值。

原子核具有磁矩 μ 为:

$$\mu=\mu_N g_N I, \tag{2-130}$$

式中 g_N 是朗德核因子($g_N\approx1$), $\mu_N=he/(4\pi m_p c)$ 是质量为 m_p 的质子的玻尔核磁子。此磁矩与电子产生的磁场发生相互作用而产生超精细劈裂。类氢原子的超精细结构的能量 $E_{超细}$ 为(Fermi, 1930; Bethe, 1933):

$$E_{超细}=g_N\left(\frac{m}{m_p}\right)\frac{\alpha^2 hcRZ^3}{n^3}\left[\frac{F(F+1)-I(I+1)-J(J+1)}{J(J+1)(2L+1)}\right], \tag{2-131}$$

其中精细结构常数 $\alpha=2\pi e^2/(hc)={}^*7.2973506\times10^{-3}$, 里德伯常数 $R=Z^2R_A=2\pi^2\mu Z^2e^4/(ch^3)$, 其中 R_A 是由(2-113)式给定, 折合质量 $\mu=[mM_A/(m+M_A)]$, 以及 Z 是离子电荷。跃迁的选择定则是 $\Delta J=0$、±1, $\Delta F=0$、±1 及 $F=0\nleftrightarrow F=0$。这是具有大约1个玻尔磁子和偶极矩阵元为 μ 的磁偶极子的辐射, $\mu=eh/(4\pi mc)={}^*0.9274078\times10^{-20}$ 尔格·高斯$^{-1}$。由(2-44)式可知:

$$A_{mn}=\frac{{}^*4\pi^2e^2h}{3c^5m^2}\nu_{mn}^3={}^*1.001094\times10^{-42}\nu_{mn}^3\ 秒^{-1}。 \tag{2-132}$$

可接收到的射电频率辐射可能是由丰富的原子或分子的 $\Delta F=\pm1$, $\Delta L=\Delta F=\Delta J=0$ 跃迁引起的。表17给出了某些射电频率的超精细跃迁。

范德赫斯特(van de Hulst, 1945)首先预言中性氢的1420兆赫超精细跃迁的辐射会在星际气体中发现, 尤恩等(Ewen 和 Purcell, 1951)证实了这个预言。继后对氢发射线的观测导致了绘制银河系的旋臂图(参看 Kerr, 1968 及本书第五章)。韦斯特霍特等(Westerhout, 1969; Weaver 和 Williams, 1974; Heiles 和 Habing, 1974; 以及 Heiles 和 Jenkins, 1974)近来已完成了发射线巡天观测。只要发射气体的角范围大于天线射束的大小, 同时气体又是光学薄的话, 则利用下式(Milne, 1930; Wild, 1952 或(2-69)和(2-75)式)由发射线峰值天线温度 ΔT_L 的测量就可得出中性氢柱密度 $N_{\rm H}$:

$$N_n=\frac{8\pi\nu_{mn}}{A_{mn}c^2}\frac{g_n}{g_m}\frac{k}{h}\frac{\Delta T_L\Delta\nu_L}{\eta_A} \tag{2-133}$$

表 17 射电频段的超精细跃迁表[1]

原子或分子	自旋	跃迁	频率（赫）	A_{mn}（秒$^{-1}$）
HI 中性氢	$\frac{1}{2}$	$^2S_{1/2}$, $F=0-1$	$1.420405751.786\times10^9\pm0.01$	2.85×10^{-15}
D 氘	1	$^2S_{1/2}$, $F=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}$	$3.27384349\times10^8\pm5$	4.65×10^{-17}
HeII 一次电离氦	$\frac{1}{2}$	$^2S_{1/2}$, $F=1-0$	$8.66566\times10^9\pm1.8\times10^5$	6.50×10^{-13}
NVII 电离氮	1	$^2S_{1/2}$, $F=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}$	5.306×10^7	1.49×10^{-19}
NI 中性氮	1	$^4S_{3/2}$, $F=\frac{3}{2}-\frac{5}{2}$	2.612×10^7	1.78×10^{-20}
		$F=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}$	1.567×10^7	3.84×10^{-21}
H_2^+ 电离分子氢	1	F_2, $F\ \frac{3}{2}, \frac{5}{2}-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$	$1.40430\times10^9\pm10^7$	2.75×10^{-15}
		F_2, $F\ \frac{3}{2}, \frac{3}{2}-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$	$1.41224\times10^9\pm10^7$	2.80×10^{-15}
NaI 中性钠	$\frac{3}{2}$	$^2S_{3/2}$, $F=1-2$	1.77161×10^9	5.56×10^{-15}

[1] 取自汤斯等(Townes, 1957; Field, Somerville 和 Dressler, 1966; 以及 Kerr, 1968)的文章。

或
$$N_H\approx\frac{4N_1}{3}={}^*3.846468\times10^{14}\Delta T_L\Delta\nu_L/\eta_A\ 厘米^{-2},$$
式中 N_n 是处于第 n 能级的原子的谱线累积密度，N_H 是中性氢的谱线累积总密度，ν_{mn} 是 $m-n$ 跃迁的频率，g_n 是第 n 能级的统计权重，A_{mn} 是能级 m 与 n 之间自发跃迁的爱因斯坦系数，h 和 k 分别是普朗克常数和玻耳兹曼常数，c 是光速，$\Delta\nu_L$ 是所观测到的发射线的半宽度，η_A 是天线效率。(2-133)式中给出的数值近似是对氢的超精细基态跃迁而言的，此时 $\nu_{mn}=1420.40575$ 兆赫，$A_{mn}={}^*2.868877\times10^{-15}$ 秒$^{-1}$，$g_n=2n^2$，并且假定 ΔT_L 的单位是开，$\Delta\nu_L$ 的单位是赫。若谱线宽度 $\Delta\nu_L$ 的单位是公里·秒$^{-1}$，则(2-133)式成为：
$$N_H\approx1.823\times10^{18}\Delta T_L\Delta\nu_L/\eta_A\ 厘米^{-2}。\qquad(2\text{-}134)$$
发射线测量只提供中性氢的谱线累积密度的量度。当吸收线测量与发射线测量合在一起时，也能确定气体的温度。若 T_S 表示气体的自旋温度，τ 表示根据吸收线研究所确定的光学深度，则自旋温度与发射线温度 ΔT_L 的关系为：
$$T_S=\frac{\Delta T_L}{\eta_A[1-\exp(-\tau)]}\approx\frac{\Delta T_L}{\tau\eta_A}，\qquad(2\text{-}135)$$
对于以有效亮度温度 T_{0S} 的源为背景的吸收中所观测到的光学薄气体来说，光学深度 τ 由下式给出：
$$\tau=\frac{\Delta T_A}{\eta_A T_{0S}},\qquad(2\text{-}136)$$
式中 ΔT_A 是吸收线温度(参看(2-75)式)。克拉克等(Clark, 1965; Hughes, Thompson 和 Colvin, 1971; 以及 Radhakrishnan 等, 1972)给出了我们银河系中性氢的吸收线观测。

激发温度或自旋温度 T_S 与气体的运动温度 T_k 和背景辐射的辐射温度 T_R 的关系为统计平衡方程(2-82)式。设 R_{mn} 表示由碰撞激发的跃迁几率系数，A_{mn} 表示自发跃迁的爱因斯坦系数，则我们得出关系式：
$$T_S=T_k\left[\frac{T_R+T_0}{T_k+T_0}\right],\qquad(2\text{-}137)$$

式中
$$T_0=\frac{h\nu_{mn}R_{mn}}{kA_{mn}},$$
而 ν_{mn} 是跃迁频率。可以由谱线的多普勒展宽测量出运动温度 T_k。对于 21 厘米氢谱线，我们取 $A_{mn}=$*2.868877×10^{-15} 秒$^{-1}$，碰撞激发跃迁的几率系数为:
$$R_{mn}=n_{\rm H}\sigma_F\langle v\rangle=n_{\rm H}\sigma_F\left(\frac{8kT_k}{\pi m_{\rm H}}\right)^{1/2}\approx7\times10^{-11}n_{\rm H}T_k^{1/2}\text{ 秒}^{-1},\tag{2-138}$$
式中 $n_{\rm H}$ 是氢原子的体密度，当 T_k 为 2～10000 开时，氢原子之间相互碰撞的平均有效截面 σ_F 是 6.6×10^{-15} 厘米^2～2.9×10^{-15} 厘米^2，而 $\langle v\rangle$ 表示平均热速度。根据(2-137)式和(2-138)式可知，若氢碰撞是主要的碰撞过程，当
$$n_{\rm H}>6\times10^{-4}T_k^{1/2}\text{ 厘米}^{-3}\tag{2-139}$$
时，自旋温度将等于运动温度。

试图发现星系际中性氢的发射线(Penzias 和 Wilson, 1969)和吸收线(Allen, 1969)未获成功。这些观测得出下列极限值：若假定哈勃常数为 75 公里·秒$^{-1}$·兆秒差距$^{-1}$，则 $n_{\rm H}<3\times10^{-6}$ 个原子·厘米$^{-3}$ 以及 $n_{\rm H}/T_S<2.7\times10^{-8}$ 厘米$^{-3}$·开$^{-1}$。这些测量也表明星系际中性氢密度的最大值是 5×10^{-30} 克·厘米$^{-3}$，不过，已经发现了在星系际桥中的中性氢(Hindman 等, 1963; Robert, 1968)，这种氢的 $N_{\rm H}\approx10^{20}$ 厘米$^{-2}$。对星系际介质来说，电子-原子碰撞及由赖曼-α辐射引起的电子-原子激发对(2-137)式是重要的贡献。菲尔德(Field, 1958, 1959)给出了考虑这些贡献的详尽公式。凯勒(Koehler, 1966)给出了 T_S 作为电子密度及运动温度的函数的计算。

2.15. 分子的谱线辐射

2.15.1. 分子跃迁的能量及频率

可以假定在分子中电子的相互作用类似于第 2.13 节讨论的原子的罗素-桑德斯(LS)耦合相互作用。分子的精细结构通常是用下列量子数来描述的:

$J=$不包括核自旋的总角动量，单位是 $h/2\pi$。

$N=$包括自旋的总轨道角动量，单位是 $h/2\pi$。

$K=N$ 在分子轴上的投影。

$O=$由于分子转动产生的轨道角动量，单位是 $h/2\pi$。

$\Lambda=$电子轨道角动量在分子轴上的投影，单位是 $h/2\pi$。分子能态按照 $\Lambda=0$、1、2、3、…用符号Σ、Π、Δ、φ、… 表示。当 $\Lambda=|M_L|$时，Λ 总是正值，其中 $M_L=L$、$L-1$、…、$-L$，而 L 是电子角动量。

$\Sigma=$电子自旋角动量在分子轴上的投影，单位是 $h/2\pi$(注意，不要与 $\Lambda=0$ 时的符号 Σ 混淆)。Σ 取 $2S+1$ 个值，其中 S 是电子自旋。

$\Omega=$相对于分子轴的总电子角动量，单位是 $h/2\pi$。对于洪德(Hund)耦合情况(a)来说，$\Omega=|\Lambda+\Sigma|$。

每一对 Λ 和 Σ 表示符号为 $^{2S+1}\Lambda_\Omega$ 的光谱项，其中 $2S+1$ 是多重性的数值，Λ 用希腊字母表示，Ω 是所有电子的总角动量数值。一个 Σ 能态的电子本征函数对通过核间轴的任何平面作反演时，根据其符号是否改变而把 Σ 分为 Σ^+ 或 Σ^-。按照对于对称中心作反演时，电子本征函数的符号是否改变而把电子能态分为偶态(g)或奇态(u)。按照旋转能态对原点进行反演时总本征函数的符号是否改变而把它分为正的(+)或负的(−)。当原子核是

表 18 双原子分子光谱的选择定则[1]

耦 合	电偶极子（容许的）	磁偶极子（禁戒的）	电四极矩（禁戒的）
(1) 一般	$\Delta J=0, \pm1$	$\Delta J=0, \pm1$	$\Delta J=0, \pm1, \pm2$
	$(0 \nleftrightarrow 0)$	$(0 \nleftrightarrow 0)$	$\left(0 \nleftrightarrow 0,\ 0 \nleftrightarrow 1,\ \frac{1}{2} \nleftrightarrow \frac{1}{2}\right)$
(2) 一般	$(+ \leftrightarrow -,\ + \nleftrightarrow +,\ - \nleftrightarrow -)$	$(+ \leftrightarrow +,\ - \leftrightarrow -,\ + \nleftrightarrow -)$	$(+ \leftrightarrow +,\ - \leftrightarrow -,\ + \nleftrightarrow -)$
(3) 一般	$(s \nleftrightarrow a,\ s \leftrightarrow s,\ a \leftrightarrow a)$	$(s \leftrightarrow s,\ a \leftrightarrow a,\ s \nleftrightarrow a)$	$(s \leftrightarrow s,\ a \leftrightarrow a,\ s \nleftrightarrow a)$
(4) 一般	$(g \leftrightarrow u,\ g \nleftrightarrow g,\ u \nleftrightarrow u)$	$(g \leftrightarrow g,\ u \leftrightarrow u,\ g \nleftrightarrow u)$	$(g \leftrightarrow g,\ u \leftrightarrow u,\ g \nleftrightarrow u)$
(5) (*a*) 及 (*b*)	$\Delta S=0$	$\Delta S=0$	$\Delta S=0$
(6) (*a*)	$\Delta\Lambda=0, \pm1$	$\Delta\Lambda=0$（若 $\Delta\Sigma=\pm1$）；$\Delta\Lambda=\pm1$（若 $\Delta\Sigma=0$）	$\Delta\Lambda=0, \pm1, \pm2$
(*b*)	$\Delta\Lambda=0, \pm1$	$\Delta\Lambda=0, \pm1$	$\Delta\Lambda=0, \pm1, \pm2$
(7) (*a*)	$\Delta\Sigma=0$	见 (6) (*a*)	$\Delta\Sigma=0$
(8) (*a*)	$\Delta\Omega=0, \pm1$	$\Delta\Omega=\pm1$	$\Delta\Omega=0, \pm1, \pm2$
(9) (*a*)	$\Delta J\neq0$（当 $\Omega=0\leftrightarrow\Omega=0$）	—	$\Delta J\neq1$（当 $\Omega=0\leftrightarrow\Omega=0$）
(10) (*b*)	$\Delta K=0, \pm1$	$\Delta K=0, \pm1$	$\Delta K=0, \pm1, \pm2$
(11) (*b*)	$\Delta K\neq0$（用于 $\Sigma\leftrightarrow\Sigma$ 跃迁）	$\Delta K=0$（用于 $\Sigma\leftrightarrow\Sigma$ 跃迁）	$\Delta K=0, \pm1, \pm2$（用于 $\Sigma\leftrightarrow\Sigma$ 跃迁）
(12) (*b*)	$\Sigma^+ \nleftrightarrow \Sigma^-$	$\Sigma^+ \nleftrightarrow \Sigma^-$	$\Sigma^+ \nleftrightarrow \Sigma^-$

[1] (3) 中假定核是全同的以及当核交换时，按照总的本征函数符号是否改变而分为对称的 s 光谱项或不对称的 a 光谱项。在 (4) 中 g 及 u 分别表示等电荷核的偶电子态或奇电子态。按照电子本征函数对于对称中心反演时，其符号是否改变而分为偶电子态或奇电子态。(5) 到 (10) 中的 (*a*) 及 (*b*) 分别表示洪德情况 (*a*) 及情况 (*b*)。(12) 中对于 Σ 能态，按照电子本征函数对于通过核间轴的任何平面反演时，其符号是否反演而分为 Σ^+ 能态或 Σ^- 能态。

全同的话，按照当原子核交换时总本征函数的符号是否改变而将光谱项分为对称的 (s) 或不对称的 (a)。能级之间的跃迁必须遵守选择定则，选择定则是随量子数、对称性和耦合类型而定的。在表 18 中给出适用于双原子分子的这些定则。

符号 $\nleftrightarrow$ 表示“不能与…组合”。耦合符号 (a) 和 (b) 分别表示洪德耦合情况 (a) 和 (b)。在情况 (a)，电子运动是强耦合到核间的连线上，所以 $\Omega=|\Lambda+\Sigma|$。在情况 (b)，只有电子轨道角动量 Λ 是强耦合到分子轴上，所以 Λ 和 N 耦合形成 K，而 K 与 S 耦合形成 J。

一个分子的总能量 E 可以看作是由于电子引起的能量 E_e、振动能量 E_v 和转动能量 E_r 的迭加：

$$E=E_r+E_v+E_e。\tag{2-140}$$

电子能态之间的跃迁发生于光学频段和紫外频段，振动能量通常相当于红外频段的跃迁，而转动跃迁是在射电频段。对刚性分子的整体旋转而言，转动能量 E_r 是薛定谔方程 (Schrödinger, 1925, 1926, (2-126) 式) 的解：

$$E_r=hBJ(J+1),\tag{2-141}$$

式中旋转角量子数 J 是零或是一个整数，总角动量是 $[J(J+1)]^{1/2}$，单位是 $h/2\pi$，转动常数 B 由下式给出：

$$B=\frac{h}{8\pi^2 I},$$

式中 I 是分子的转动惯量。对于由质量分别为 m_1 和 m_2、相距为 r_{12} 的两个原子组成的双原子分子来说

$$I=\frac{r_{12}^2 m_1 m_2}{m_1+m_2}=r_{12}^2\mu,$$

式中 μ 是折合质量。类似地对于三原子分子

$$I=\frac{m_1m_2r_{12}^2+m_1m_3r_{13}^2+m_2m_3r_{23}^2}{m_1+m_2+m_3},$$

式中 r_{ij} 代表质量分别为 m_i 和 m_j 的原子 i 和 j 之间的距离。

在洪德耦合情况(a),(2-141)式成为:

$$E_r=hB[J(J+1)-\Omega^2]。\tag{2-142}$$

在耦合情况(b)和 $^2\Sigma$ 能态,我们得到(Hund, 1927):

$$E_r=hBK(K+1)+\frac{1}{2}h\gamma K\qquad\left(当\ J=K+\frac{1}{2}\right)$$

和

$$E_r=hBK(K+1)-\frac{1}{2}h\gamma(K+1)\quad\left(当\ J=K-\frac{1}{2}\right),\tag{2-143}$$

式中劈裂常数 γ 与 B 相比是个小量。

当分子不是刚体旋转体并考虑到离心伸长时,(2-141)式成为:

$$E_r=hBJ(J+1)-hDJ^2(J+1)^2,\tag{2-144}$$

式中当振动角频率为 ω 时,由于离心伸长而引起的 B 的改变 D 为:

$$D=\frac{4B^3}{\omega^2}。$$

利用选择定则 $\Delta J=\pm1$ 与(2-144)式,就可得出容许的转动跃迁频率 ν_r:

$$\nu_r=2B(J+1)-4D(J+1)^3。\tag{2-145}$$

一个对称陀螺分子在沿分子三个主轴中的两个轴向上具有相等的转动惯量。角动量沿分子的一条内轴方向具有固定分量 $Kh/2\pi$,其中 K 从 $-J$ 到 J 共取 $2J+1$ 个值。转动能量 E_r 由下式给出:

$$E_r=h[BJ(J+1)+(A-B)K^2],\tag{2-146}$$

式中当 I_a 和 I_b 表示沿 a 和 b 轴的转动惯量时,$A=h/(8\pi^2I_a)$ 和 $B=h/(8\pi^2I_b)$。不过,选择定则是 $\Delta K=0$,而跃迁频率与按照(2-141)式所得结果相同。当分子是一个不对称陀螺分子时,量子数 J 加上 K_{-1} 值以限制扁长的对称陀螺(即 $I_a<I_b=I_c$)或加上 K_{+1} 值以限制扁圆的对称陀螺(即 $I_a=I_b<I_c$),其中 I_i 表示沿 i 轴的转动惯量。

对于频率为 ν_0 和力常数为 k 的一个谐振子来说,与时间无关的薛定谔方程(2-126)的解是:

$$E_v=h\nu_0\left(v+\frac{1}{2}\right)=hc\omega_e\left(v+\frac{1}{2}\right),\tag{2-147}$$

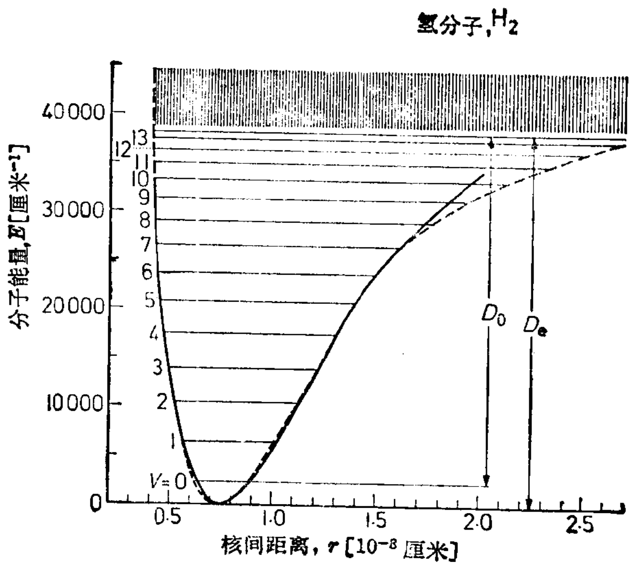
式中 E_v 是振动量子数为 v 的振动能量,$\omega_e=\nu_0/c$ 是光谱项的值,其中

$$\nu_0=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{k}{m}\right)^{1/2},$$

式中 m 是振子的质量。量子数 v 是零或是一个整数,选择定则是 $\Delta v=\pm1$,所以振动跃迁频率等于 ν_0。玻恩等(Born 和 Oppenheimer, 1927)首先证明,为了计算电子的势能贡献可以假定大质量的原子核是固定不动的,在这个假定下就能算出转动-振动能级。莫尔斯(Morse, 1929)提出一个双原子分子的势能 $U(r)$ 为:

$$U(r)=D_e\{1-\exp[-a(r-r_e)]\}^2,\tag{2-148}$$

式中 D_e 是分子的离解能,r_e 是核间平衡距离,a 是一个常数,r 是核间距离。图 14 为函数 $U(r)$,以及与氢分子的实际的 $U(r)$ 和它的振动能级的比较。当把 $U(r)$ 和由于转动引起的



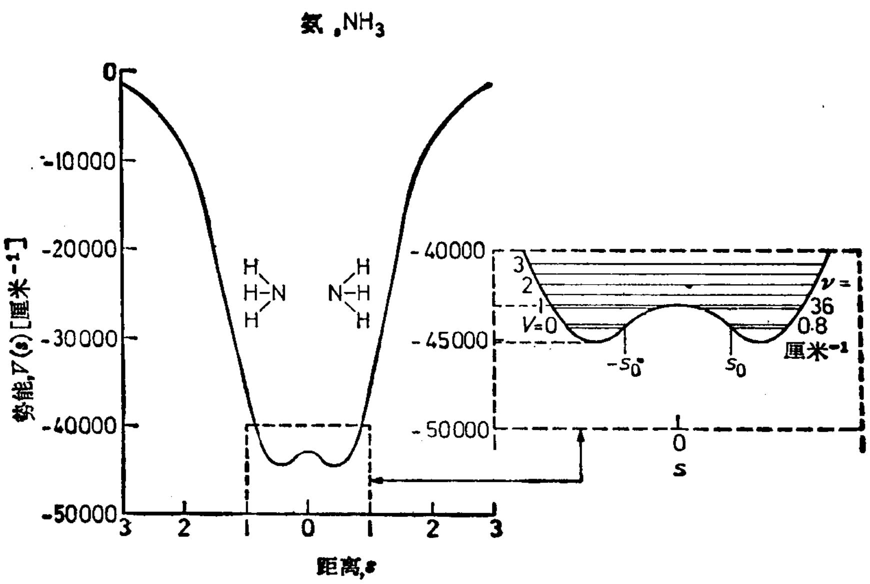


图 14 氢分子 H_2 及氨分子 NH_3 的势能曲线(取自 Herzberg, 1950; Townes 和 Schalow, 1955 的书)。用水平线表示不同的振动量子数 v 的振动能级。在氢分子曲线中的实线是由实验数据得出的, 而虚线是莫尔斯 (Morse, 1929) 曲线。变数 r 表示核间距离, 而 $v=14$ 以上的连续项光谱用垂直阴影线表示。氨分子曲线中变数 s 表示氮到氢平面的距离。氨分子在两个势能极小值之间作谐振动, 而这种谐振动使振动能级分裂成图中所示的双重线

势能 $J(J+1)/r^2$ 代入薛定谔方程(2–126)式时, 转动–振动能级的解为:

$$\frac{E_r+E_v}{h}=\omega_e\left(v+\frac{1}{2}\right)-x_e\omega_e\left(v+\frac{1}{2}\right)^2+B_eJ(J+1)$$
$$-DJ^2(J+1)^2-\alpha_e\left(v+\frac{1}{2}\right)J(J+1), \qquad (2\text{–}149)$$

式中

$$\left.\begin{aligned}\omega_e&=\frac{a}{2\pi}\left(\frac{2D_e}{\mu}\right)^{1/2}\\x_e&=\frac{h\omega_e}{4D_e}\\B_e&=\frac{h}{8\pi^2I_e}\\D&=\frac{4B_e^3}{\omega_e^2}=\frac{h^3}{128\pi^6\mu^3\omega_e^2r_e^6}\\\alpha_e&=6\left(\frac{x_eB_e^3}{\omega_e}\right)^{1/2}-\frac{6B_e^2}{\omega_e}\end{aligned}\right\},$$

J 和 v 分别是转动量子数和振动量子数，μ 是分子的折合质量。在赫茨伯格(Herzberg, 1950)以及汤斯等(Townes 和 Schawlow, 1955)的书的附录中给出了天体物理学上感兴趣的大多数简单分子的(2–149)式中转动–振动常数值。

虽然转动量子数 J 遵循简单的选择定则 $\Delta J=\pm1$，但振动量子数 v 却没有类似的简单的选择定则。此外，夫兰克(Franck, 1925)和康登(Condon, 1926, 1928)已提出一种理论，把有利的振动跃迁与所考虑的两种能态的势能曲线联系起来。发现有利跃迁是这样的一种跃迁，在这种跃迁中核的动量或位置均无瞬时的变化。这就是说 $\Delta v=0$ 对具有类似势能曲线的那些态是有利的，而对位移了的曲线来说，宽带的 Δv 是可能的。

从理论上说，如图 14 所示的氨那样，存在两个等效势能位形被一个势垒隔开的情况。这种性质反映了本征函数对其原点的反演。从量子力学来说，振动分子能够穿透势垒，穿透频率 ν 由下式给出(Dennison 和 Uhlenbeck, 1932)：

$$\nu=\frac{\nu_v}{\pi A^2},\tag{2–150}$$

式中 ν_v 是势能为极小之一的振动频率，A 代表在势垒下的面积；这里

$$A=\exp\left\{\frac{2\pi}{h}\int_0^{s_0}[2\mu(V-E_v)]^{1/2}ds\right\},$$

式中 μ 是折合质量，V 是势能，ds 是原子间距 s 的微小改变元，s_0 如图 14 中所示，E_v 是总振动能。对氨来说，反向势垒足够低以致振动能级具有双重线，其频率间距处在射电频率范围内(参看表 20)。钟氏等(Cheung 等, 1968)首先报告了星际氨的发现。

因为 Λ 的正值和负值分别代表轨道电子在一个旋向或相反旋向的旋转，而两者具有的能量是相同的。所以除非 $\Lambda=0$，能级都是双重简并的。但是，对于具有一个未配对的电子的转动分子来说，电子–转动相互作用会消除这种简并而使每一能级分裂成两个。在 Λ 双重线能级之间最重要的跃迁是那些当 $\Lambda=1$ 或 Π 能级的跃迁，而这些跃迁的能量 E 由下式给出(van Vleck, 1929; Townes 和 Schawlow, 1955)：

$$E=q_\Lambda J(J+1)\quad(\text{当 } S=0 \text{ 或 } S=1,\ \Omega=1),\tag{2–151}$$

对洪德耦合情况(b)和 $S=\frac{1}{2}$ 或 1，

$$E=q_\Lambda N(N+1);$$

对洪德耦合情况(a)和 $S=\frac{1}{2}$，$\Omega=\frac{1}{2}$，

$$E=a\left(J+\frac{1}{2}\right);$$

对洪德耦合情况(a)和 $S=\frac{1}{2}$, $\Omega=\frac{3}{2}$,

$$E=b\left(J^2-\frac{1}{4}\right)\left(J+\frac{3}{2}\right);$$

对 $^2\Pi$ 能态的中间耦合情况,

$$E\approx\frac{q_\Lambda}{2}\left(J+\frac{1}{2}\right)\left[\left(2+\frac{A}{B}\right)\left(1+\frac{2-A/B}{X}\right)+\frac{4\left(J+\frac{3}{2}\right)\left(J-\frac{1}{2}\right)}{X}\right]。$$

这里我们得到:

$$q_\Lambda=\frac{4B_v^2}{h\nu_e},\quad a=\frac{4AB_v}{h\nu_e},\quad b=\frac{8B_v^3}{Ah\nu_e}$$

和

$$X=\pm\left[\frac{A}{B}\left(\frac{A}{B}-4\right)+4\left(J+\frac{1}{2}\right)^2\right]^{1/2},$$

式中 B_v 是转动常数, $h\nu_e$ 是基态能级与第一激发电子能级之间的间距, A 和 B 是电子能态与转动能态之间的相互作用常数。$^2\Pi_{32}$ 和 $^2\Pi_{12}$ 态按照 A 是正值或负值而分别给以 $X=$ "+"和"−"或"−"和"+"。在 Λ 多重线之间的跃迁是具有偶极矩为 μ 的电子偶极跃迁, 而其偶极矩阵元 μ_{mn} 对洪德耦合情况(b)而言由下式给出:

$$|\mu_{mn}|^2=\frac{\mu^2\Lambda^2}{J(J+1)}。\tag{2-152}$$

对情况(a)来说, 只需用 Ω 代替 Λ。电子自旋-核自旋相互作用进一步导致了每组双重线能级的超精细劈裂。对 $^2\Pi$ 能态来说, 这种劈裂的能量差 ΔE 由下式给出(Townes, 1955):

$$\Delta E=\pm\frac{d(X+2-A/B_v)}{4XJ(J+1)}\left(J+\frac{1}{2}\right)\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{J},\tag{2-153}$$

式中

$$\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{J}=\frac{F(F+1)-I(I+1)-J(J+1)}{1}$$

和

$$d=3\mu_0\frac{\mu_I}{I}\left(\frac{\sin^2\theta}{r^3}\right)。$$

这里 A 是能量 $A\vec{s}\cdot\vec{\Lambda}$ 的精细结构常数, B 是转动常数, F 是包括核自旋的总分子角动量, 单位是 $h/2\pi$, I 是核自旋角动量, 单位是 $h/2\pi$, μ_0 是玻尔磁子, μ_I 是核磁矩, r 是从核到电子的距离, 而 θ 是分子轴与矢径之间的夹角。温雷布等(Weinreb, Barrett, Meeks 和 Henry, 1963)首先发现星际羟基(OH)的 $^2\Pi_{3/2}$ 能态的 Λ-双重线(即超精细劈裂间)的跃迁。表 20 给出相继发现的羟基谱线的 Λ-双重线的频率。特纳(Turner, 1970)给出了 50 个与 HII 区成协的 OH 区的参量。

表 19 在行星及卫星大气中已证认的气体[1]

行星或卫星	气体	行星或卫星	气体
水星	未肯定的证认	天王星	H_2, CH_4
金星	CO_2, CO, HCl, HF, H_2O	海王星	H_2, CH_4
地球	N_2, O_2, H_2O, A, CO_2, Ne, He, CH_4, Kr, N_2O, H_2, O, O_3, Xe	冥王星	无证认
火星	CO_2, CO, H_2O, O_2, O_3	木卫	无肯定证认
木星	H_2, CH_4, NH_3, C_2H_2, C_2H_6	土卫六	CH_4, H_2
土星	H_2, CH_4, NH_3(?)	海卫一	无证认

[1] 取自 *Planetary Astronomy*, 1968, National Academy of Sciences. Publ. 1688, Washington D. C.; 芒奇等(G. Munch 和 S. T. Ridgway, *Ap. J.* 187, L41, 1974)一文。

表 20 在光波段的吸收谱中观测到的星际分子的线辐射波长和分类，以及在射电频段观测到的星际分子的最强线辐射的频率、天线温度 T_A 和辐射源[2]

在光学波段观测到的分子:

波 长 (埃)	分 子	分 类
1,108	H_2-分子氢	$B'\Sigma_u - X^1\Sigma_u$, (0, 0)
1,092		(1, 0)
1,077		(2, 0)
1,063		(3, 0)
1,049		(4, 0)
1,037		(5, 0)
1,024		(6, 0)
1,013		(7, 0)
1,066.27	HD	3
1,054.29		
1,509.65	$C^{12}O^{16}$—一氧化碳	$A^1\Pi - X^1\Sigma^+$, (1, 0)
1,477.46		(2, 0)
1,447.26		(3, 0)
1,418.97		(4, 0)
1,367.56		(6, 0)
1,322.10		(8, 0)
1,301.37		(9, 0)
1,281.83		(10, 0)
1,478.8	$C^{13}O^{16}$	$A^1\Pi - X^1\Sigma^+$, (2, 0)
1,449.3		(3, 0)
1,421.4		(4, 0)
1,370.8		(6, 0)
3,876.84	CN-氰基	$B^2\Sigma^+ - X^2\Sigma^+$, (0, 0), $P(3)$
3,876.30		(0, 0), $P(2)$
3,875.77		(0, 0), $P(1)$
3,874.61		(0, 0), $R(0)$
3,874.00		(0, 0), $R(1)$
4,232.54	$C^{12}H^+$	$A^1\Pi - X^1\Sigma$, (0, 0), $R(0)$
3,957.70		(1, 0), $R(0)$
3,745.31		(2, 0), $R(0)$
3,579.02		(3, 0), $R(0)$
3,447.08		(4, 0), $R(0)$
4,232.08	$C^{13}H^+$	$A^1\Pi - X^1\Sigma$, (0, 0), $R(0)$
4,300.30	CH	$A^2\Delta - X^2\Pi$, (0, 0), $R_2(1)$
3,890.21		$B^2\Sigma^- - X^2\Pi$, (0, 0), $P_{Q_{12}}(1)$
3,886.41		(0,0), $Q_2(1) + {}^QR_{12}(1)$
3,878.77		(0, 0), $R_2(1)$
3,146.01		$C^2\Sigma^+ - X^2\Pi$, (0, 0), $P_{Q_{12}}(1)$
3,143.20		(0,0), $Q_2(1) + {}^QR_{12}(1)$
3,137.53		(0, 0), $R_2(1)$

[1] 对 T_A 已作望远镜及大气损失的所有改正。

[2] 取自斯奈德(Snyder, 1973)的文章及私人通讯。

[3] 参看施皮策(Spitzer 等, 1973)的文章。

在射电频段观测到的分子: （续表）

频率（京赫）	分子		T_A（开）	源
0.834267	CH_3OH	甲醇	+0.58	人马座 A
1.065075	$HCOCH_3$	乙醛	+0.25	人马座 A
1.538135	$HCONH_2$	甲酰胺	+0.08	人马座 B2
1.538693	$HCONH_2$	甲酰胺	+0.09	人马座 B2
1.539295	$HCONH_2$	甲酰胺	+0.10	人马座 B2
1.539570	$HCONH_2$	甲酰胺	+0.08	人马座 B2
1.539851	$HCONH_2$	甲酰胺	+0.36	人马座 B2
1.541018	$HCONH_2$	甲酰胺	+0.10	人马座 B2
1.612231	OH	羟基	+200	天鹅座 NML
1.63753	$O^{18}H$	羟基	−0.22	人马座 A
1.638805	HCOOH	甲酸	+0.06	人马座 A
1.63948	$O^{18}H$	羟基	−0.18	人马座 A
1.665401	OH	羟基	+100	W49
1.667358	OH	羟基	+34	W49
1.720533	OH	羟基	+28	W28
3.13938	H_2CS	硫代甲醛	−0.3	人马座 B2
3.263788	CH	甲川	+0.2	W12
3.335475	CH	甲川	+0.28	仙后座 A
3.349185	CH	甲川	+0.2	仙后座 A
4.388797	H_2CO^{18}	甲醛	−0.1	人马座 B2
4.593089	$H_2C^{13}O$	甲醛	−0.1	人马座 B2
4.617118	$HCONH_2$	甲酰胺	+0.07	人马座 B2
4.618970	$HCONH_2$	甲酰胺	+0.13	人马座 B2
4.619988	$HCONH_2$	甲酰胺	+0.03	人马座 B2
4.660242	OH	羟基	+0.5	人马座 B2
4.750656	OH	羟基	+0.3	人马座 B2
4.765562	OH	羟基	+0.2	人马座 B2
4.829660	H_2CO	甲醛	−9	人马座 B2
5.288980	H_2CNH	甲亚胺	+0.05	人马座 B2
5.289786	H_2CNH	甲亚胺	+0.15	人马座 B2
5.290726	H_2CNH	甲亚胺	+0.07	人马座 B2
5.291646	H_2CNH	甲亚胺	+0.07	人马座 B2
6.030739	OH	羟基	+12	W3
6.035085	OH	羟基	+19	W3
9.097067	HC_3N	氰基乙炔	+0.32	人马座 B2
9.098357	HC_3N	氰基乙炔	+0.87	人马座 B2
9.100286	HC_3N	氰基乙炔		人马座 B2
13.441371	OH	羟基	+3.2	W3
13.77886	$H_2C^{13}O$	甲醛	—	—
14.48865	H_2CO	甲醛	−1	人马座 B2
18.195085	HC_3N	氰基乙炔	} +0.4	人马座 B2
18.196275	HC_3N	氰基乙炔		人马座 B2
21.98052	HNCO	异氰酸	} 0.2	人马座 B2
21.98146	HNCO	异氰酸		人马座 B2
21.98206	HNCO	异氰酸		人马座 B2
22.23508	H_2O	水	+2,000	W49
22.83417	NH_3	氨	+0.11	人马座 B2
23.09879	NH_3	氨	+0.29	人马座 B2

在射电频段观测到的分子: (续表)

频率(京赫)	分子		T_A (开)	源
23.69448	NH_3	氨	+1.61	人马座 B2
23.72271	NH_3	氨	+1.32	人马座 B2
23.87011	NH_3	氨	+3.20	人马座 B2
24.13941	NH_3	氨	+0.61	人马座 B2
24.93347	CH_3OH	甲醇	+1	猎户座 A
24.95908	CH_3OH	甲醇	+1	猎户座 A
25.01814	CH_3OH	甲醇	+1.0	猎户座 A
25.05604	NH_3	氨	+0.4	人马座 B2
25.12488	CH_3OH	甲醇	+0.7	猎户座 A
25.29441	CH_3OH	甲醇	+0.7	猎户座 A
28.974803	H_2CO	甲醛	—	人马座 B2
36.16924	CH_3OH	甲醇	+2	人马座 B2
43.96277	HNCO	异氰酸	+0.8	人马座 B2
46.247472	$C^{13}S$	一硫化碳	+0.148	人马座 B2
48.206948	CS^{34}	一硫化碳	+0.38	DR21(OH)
48.37260	CH_3OH	甲醇	+3.0	人马座 B2
48.37709	CH_3OH	甲醇	+3.0	人马座 B2
48.583264	CS^{33}	一硫化碳		人马座 B2
48.585906	CS^{33}	一硫化碳	+0.12	人马座 B2
48.589068	CS^{33}	一硫化碳		人马座 B2
48.991000	CS	一硫化碳	+3.53	猎户座 A
72.409095	H_2CO	甲醛	+0.1	猎户座 A
72.41325	DCN	氰化氢	+0.20	猎户座 A
72.41462	DCN	氰化氢	+0.25	猎户座 A
72.41668	DCN	氰化氢	+0.20	猎户座 A
72.783822	HC_3N	氰基乙炔	—	人马座 B2
72.837974	H_2CO	甲醛	+0.5	猎户座 A
72.97680	OCS	硫化羰基	+0.4	人马座 B2
81.541	U81.5		+2.5	人马座 B2
81.883	HC_3N	氰基乙炔	—	人马座 B2
84.52121	CH_3OH	甲醇	+2.8	人马座 B2
85.13892	OCS	硫化羰基	+0.7	人马座 B2
85.435	U85.4		+0.15	人马座 B2
85.44261	CH_3C_2H	甲基乙炔	+0.15	人马座 B2
85.45729	CH_3C_2H	甲基乙炔	+0.45	人马座 B2
86.05505	HCN^{15}	氰化氢	+0.15	猎户座 A
86.093938	SO	一氧化硫	+1	猎户座 A
86.24328	SiO	一氧化硅	+14	猎户座 A
86.33875	$HC^{13}N$	氰化氢	+0.5	猎户座 A
86.34005	$HC^{13}N$	氰化氢	+0.7	猎户座 A
86.34216	$HC^{13}N$	氰化氢	+0.3	猎户座 A
86.846859	SiO	一氧化硅	+1	猎户座 A
87.3165	U87.316	未证认	+3.0	猎户座 A, M17
87.3283	U87.328	未证认	+1.5	猎户座 A, M17
87.4018	U87.402	未证认	+1.5	猎户座 A, M17
87.4068	U87.407	未证认	+0.75	猎户座 A, M17
87.92524	HNCO	异氰酸	+2.5	人马座 B2
88.23905	HNCO	异氰酸	+0.25	人马座 B2

在射电频段观测到的分子: （续表）

频率（京赫）	分子		T_A（开）	源
88.6304157	HCN	氰化氢	+7	猎户座 A
88.6318473	HCN	氰化氢	+12	猎户座 A
88.6339360	HCN	氰化氢	+5	猎户座 A
89.189	HCO	甲酰离子	+10	猎户座 A
89.5058	CH_3OH	甲醇	+0.3	猎户座 A
90.665	HNC	异氰化氢	+1.6	猎户座 A
90.981	HC_3N	氰基乙炔	—	人马座 B?
92.494084	$C^{13}S$	一硫化碳	+0.21$_5$	猎户座 A
96.412962	CS^{34}	一硫化碳	+0.62	猎户座 A
96.74142	CH_3OH	甲醇	—	—
97.171824	CS^{33}	一硫化碳	} 0.2	猎户座 A
97.171843	CS^{33}	一硫化碳		猎户座 A
97.30119	OCS	硫化羰基	+0.85	人马座 B2
97.981007	CS	一硫化碳	+6.94	猎户座 A
99.29985	SO	一氧化硫	+2.4	猎户座 A
100.076392	HC_3N	氰基乙炔	+1.0	人马座 B2
109.4628	OCS	硫化羰基	+0.7	人马座 B2
109.782182	CO^{18}	一氧化碳	+1	猎户座 A
109.90585	HNCO	异氰酸	+1.1	人马座 B2
110.201370	$C^{13}O$	一氧化碳	+7	猎户座 A
110.33079	CH_3CN	乙腈	+0.2	人马座 B2
110.34968	CH_3CN	乙腈	+0.45	人马座 B2
110.36452	CH_3CN	乙腈	+0.31	人马座 B2
110.37501	CH_3CN	乙腈	+0.81	人马座 B2
110.38139	CH_3CN	乙腈	+1.09	人马座 B2
110.38347	CH_3CN	乙腈	+1.09	人马座 B2
110.709552	CH_3CN	乙腈(V_8)	+0.4	科胡特克彗星
110.712220	CH_3CN	乙腈(V_8)	+0.6	科胡特克彗星
112.358720	CO^{17}	一氧化碳	+0.15	猎户座 A
112.358981	CO^{17}	一氧化碳	+0.15	猎户座 A
112.360016	CO^{17}	一氧化碳	+0.15	猎户座 A
113.1450	CN	氰基	—	猎户座 A
113.1710	CN	氰基	—	猎户座 A
113.1910	CN	氰基	—	猎户座 A
113.4881	CN	氰基	+1	猎户座 A
113.4909	CN	氰基	+3	猎户座 A
113.4990	CN	氰基	—	猎户座 A
113.5080	CN	氰基	—	猎户座 A
115.271203	CO	一氧化碳	+75[1]	猎户座 A
129.3613	SiO	一氧化硅	+0.9	猎户座 A
130.2684	SiO	一氧化硅	+0.7	人马座 B2
138.1786	SO	一氧化硫	+2.06	NGC2024
140.839529	H_2CO	甲醛	+3.3	猎户座 A
144.826810	DCN	氰化氢	} +0.65	猎户座 A
144.826841	DCN	氰化氢		猎户座 A
145.09375	CH_3OH	甲醇	+1.25	猎户座 A
145.09747	CH_3OH	甲醇	+1.45	猎户座 A
145.10323	CH_3CH	甲醇	+1.35	猎户座 A

在射电频段观测到的分子: （续表）

频率(京赫)	分子		T_A (开)	源
145.12441	CH_3OH	甲醇	+1.45	猎户座 A
145.12637	CH_3OH	甲醇		猎户座 A
145.13188	CH_3OH	甲醇	+1.25	猎户座 A
145.13346	CH_3OH	甲醇		猎户座 A
145.602971	H_2CO	甲醛	+1.9	猎户座 A
145.94679	OCS	硫化羰基	+0.45	人马座 B2
146.96916	CS	一硫化碳	+3.0	猎户座 A
150.498359	H_2CO	甲醛	+2.7	猎户座 A
168.762762	H_2S	硫化氢	+2.3	猎户座 A
169.33534	CH_3OH	甲醛	+0.7	猎户座 A
172.1081	HCN^{15}	氰化氢	+0.45	猎户座 A
172.6777	$HC^{13}N$	氰化氢	+0.91	猎户座 A
217.2384	DCN	氘化氰	—	—
219.560369	CO^{18}	一氧化碳	—	—
220.398714	$C^{13}O$	一氧化碳	+16[1]	猎户座 A
230.538001	CO	一氧化碳	+76[1]	猎户座 A

首先观测到地球外的一些分子是行星光谱中以吸收带出现的分子(Adams 和 Dunham, 1932)。后来在紫外、可见光和红外光谱区的谱线观测已得出大气气体的证认，其结果列在表 19 中。

星际分子首先是在恒星吸收光谱中发现的(Dunham 和 Adams, 1937)。在地球上的光学观测导致了星际 CH^+、CH、CN 和 NaH^- 的发现(参看 Mc Nalley, 1968)。火箭技术使我们可以对光谱的远紫外部分作出观测，用这种方法已经发现了星际 H_2(Carruthers, 1970) 和 CO(Smith 和 Stecher, 1971)。 在射电频段观测到的第一条分子谱线是羟基(OH)谱线(Weinreb 等, 1963)，其后已经观测到 36 种分子约 160 条谱线[1]。 表 20 给出了已观测到的星际分子的谱线辐射的频率和波长。 科德等(Cord, Lojko 和 Peterson, 1968) 汇总了许多分子的微波谱线频率的实验室测量值。

2.15.2. 谱线强度和分子丰度

由(2-72)和(2-74)式可知，在局部热动平衡条件下，对于由一种光学薄的气体所发射的谱线来说，观测到的谱线强度是正比于每单位长度吸收系数 α_ν(局部热动平衡)的线积分。对于频率处于 ν_r 的转动跃迁来说，我们由(2-69)式得出:

$$\alpha_{\nu_r}(\text{局部热动平衡}) = \frac{c^2}{8\pi\nu_r^2}\frac{N_J}{\Delta\nu_L}\exp\left(\frac{h\nu_r}{kT}\right)\left[1-\exp\left(\frac{-h\nu_r}{kT}\right)\right]A_J, \tag{2-154}$$

式中 T 是气体的激发温度或自旋温度，$\Delta\nu_L$ 是谱线的半极大全宽，电偶极子自发跃迁的爱因斯坦系数为:

$$A_J = \frac{64\pi^4\nu_r^3}{3hc^3}|\mu_J|^2,$$

式中电偶极子矩阵元 μ_J 由下式给出:

$$|\mu_J|^2 = \mu^2\frac{(J+1)}{(2J+1)} \quad (\text{用于 } J+1 \leftarrow J \text{ 跃迁}),$$

1) 这是 1974 年的观测情况，到 1982 年已观测到从 57 种分子来的 700 余条谱线。——译者注

表 21 最丰富元素处于气态时简单分子的电偶极矩测定值，电偶极矩单位是德拜(1德拜$=10^{-18}$静电单位·厘米)[1]

分子式	化合物名称	偶极矩
HNO_3	硝酸	2.17
HN_3	迭代酸	(0.8)
HO	羟基	1.66
$H_2N_2O_2$	硝酰胺	(3.6)
H_2O	水	1.85
H_2O_2	过氧化氢	2.2
H_2S	硫化氢	0.97
H_3N	氨	1.47
H_4N_2	联氨	1.75
NO	一氧化氮	0.153
NO_2	二氧化氮	0.316
N_2O	一氧化二氮(氧化亚氮)	0.167
OS	一氧化硫	1.55
OS_2	一氧化二硫	1.47
O_2S	二氧化硫	1.63
O_3	臭氧	0.53
CO	一氧化碳	0.112
COS	硫化羰基	0.712
CS	一硫化碳	1.98
CHN	氰化氢	2.98
$CHNO$	异氰酸氢	(1.6)
$CHNS$	异硫酸氢	(1.7)
CH_2N_2	氰胺	4.27
CH_2N_2	重氮甲烷	1.50
CH_2N_2	1,2-二氮(杂)环丙烯	1.59
CH_2O	甲醛	2.33
CH_2O_2	甲酸	1.41
CH_3NO	甲醛肟	0.44
CH_3NO	甲酰胺	3.73
CH_3NOS	硫杂异氰酸甲酯	1.70
CH_3NO_2	硝基甲烷	3.46
CH_3NO_3	硝酸甲酯	3.12
CH_3N_3	甲基迭氮	2.17
CH_4O	甲醇	1.70
CH_4S	甲硫醇	1.52
CH_5N	甲胺	1.31
CH_6Si	甲基硅烷	0.735
C_2N_2S	二氰基硫醚	3.02
$C_2H_2N_2O$	1,2,5-氧二氮茂	3.38
$C_2H_2N_2O$	1,3,4-氧二氮茂	3.04
$C_2H_2N_2S$	1,2,5-硫二氮杂茂	1.56
$C_2H_2N_2S$	1,3,4-硫二氮杂茂	3.29
C_2H_2O	乙烯酮	1.42
C_2H_3N	乙腈	3.92
C_2H_3N	异氰基甲烷	3.85
C_2H_3NO	异氰酸甲酯	(2.8)
C_2H_3NS	硫氰酸甲酯	(4.0)
C_2H_4O	环氧乙烷	1.89
C_2H_4O	乙醛	2.69
$C_2H_4O_2$	乙酸	1.74
$C_2H_4O_2$	甲酸甲酯	1.77
C_2H_4S	1,2-环硫乙烷	1.85
C_2H_4Si	乙炔甲硅烷	0.316
C_2H_5N	乙撑亚胺	1.90
C_2H_5N	甲亚胺基甲烷	1.53
C_2H_5NO	乙酰胺	3.76
C_2H_5NO	N-甲基甲酰胺	3.83
$C_2H_5NO_2$	亚硝酸乙酯	2.40
$C_2H_5NO_2$	硝基乙烷	3.65
C_2H_6O	乙醇	1.69
C_2H_6O	甲醚	1.30
C_2H_6OS	二甲亚砜	3.96
$C_2H_6O_2$	乙二醇	2.28
$C_2H_6O_2S$	二甲砜	4.49
C_2H_6S	乙硫醇	1.58
C_2H_6S	二甲硫	1.50
C_2H_6Si	乙烯基甲硅烷	0.66
C_2H_7N	氨基乙烷	1.22
C_2H_7N	二甲胺	1.03
C_2H_8Si	二甲基甲硅烷	0.75
C_2H_8Si	乙基甲硅烷	0.81
C_3HN	氰基乙炔	3.72
$C_3H_2N_2$	二氰基甲烷	3.73
C_3H_2O	丙炔醛	2.47
$C_3H_2O_3$	碳酸乙烯二醇酯	4.55
C_3H_3N	丙烯腈	3.87
C_3H_3NO	乙酰氰	3.45
C_3H_3NS	噻唑	1.62
C_3H_4	环丙炔	0.45
C_3H_4	丙炔	0.781
C_3H_4O	乙叉羰基	1.79
C_3H_4O	丙烯醛,反式构象	3.12
$C_3H_4O_2$	β 丙内酯	4.18
$C_3H_4O_2$	甲酸乙烯酯	1.49
C_3H_5N	丙腈	4.02
C_3H_6	丙烯	0.366
C_3H_6O	环氧丙烷	2.01
C_3H_6O	丙酮	2.88
C_3H_6S	丙抱硫	1.85

[1] 取自纳尔逊等(Nelson, Lide 和 Maryott, 1967)的文章。

$$|\mu_J|^2=\mu^2\frac{(J+1)}{(2J+3)}\quad (\text{用于 } J+1\to J \text{ 跃迁})。$$

表 21 给出最丰富元素的简单分子的电偶极矩的实测值。

处于 J 能态的分子数目 N_J 由玻耳兹曼方程(3-125)和(2-141)式给出:

$$N_J=\frac{(2J+1)}{U}N\exp\left[\frac{-hBJ(J+1)}{kT}\right], \tag{2-155}$$

式中 T 是气体的激发温度或自旋温度, $(2J+1)$ 是能级 J 的统计权重, N 是分子总数, 配分函数 U 由下式给出:

$$U=\sum_{J=0}^{\infty}(2J+1)\exp\left[\frac{-hBJ(J+1)}{kT}\right]\approx\frac{kT}{hB}\quad (\text{当 } B\ll kT),$$

当 $B\ll kT$ 和 $h\nu_r\ll kT$ 时, 把(2-154)和(2-155)式结合起来就得出关系式:

$$\alpha_{\nu_r}(\text{局部热动平衡})=\frac{8\pi^3|\mu_J|^2}{3hc}\left(\frac{h\nu_r}{kT}\right)^2\frac{BN(2J+1)}{\Delta\nu_L}\cdot\exp\left[\frac{-hBJ(J+1)}{kT}\right]。 \tag{2-156}$$

对低的 J 值, (2-156)式中的指数因子能够近似取作 1。由(2-74)至(2-77)式可以把(2-156)式给出的谱线吸收系数与观测到的谱线的天线温度和天线效率联系起来。

当考虑到振动时, 将 N 乘上处于能量为 $h\omega_e\left(v+\frac{1}{2}\right)$ 的振动态的分子的百分率 f_v, 以此对(2-156)式作修正。百分率 f_v 为:

$$f_v=\exp\left(\frac{-vh\omega_e}{kT}\right)\left[1-\exp\left(\frac{-h\omega_e}{kT}\right)\right]。 \tag{2-157}$$

有效激发温度或自旋温度 T_s 是相当于(2-156)式中所用的温度。它由玻耳兹曼方程(2-158)式所确定:

$$\frac{N_m}{N_n}=\frac{g_m}{g_n}\exp\left(\frac{-h\nu_{mn}}{kT_s}\right), \tag{2-158}$$

式中 N_m 和 g_m 分别是能级 m 的数密度和统计权重, ν_{mn} 是 m-n 跃迁的频率。假定速度为麦克斯韦分布, 气体是以运动温度 T_k 来表征, 而 T_k 与谱线的多普勒致宽有关。对由碰撞引起的激发跃迁来说, 跃迁率 R_{mn} 由下式给出:

$$R_{mn}=\frac{1}{\tau_c}=N\langle v\rangle\sigma, \tag{2-159}$$

式中 τ_c 是碰撞寿命, N 是碰撞粒子的密度, 平均速度 $\langle v\rangle$ 为:

$$\langle v\rangle=\left[\frac{8kT_k}{\pi\mu}\right]^{1/2},$$

式中 μ 是分子和碰撞粒子的折合质量。当 $\langle v\rangle>10^6$ 厘米·秒$^{-1}$, 碰撞截面 σ 由下式给出(Purcell, 1952):

$$\sigma=\frac{16e^2|\mu_{mn}|^2}{3\hbar^2\langle v\rangle^2}\ln\left[\frac{(0.706)3\hbar^2\pi\langle v\rangle^4}{32e^2|\mu_{mn}|^2\omega^2}\right],$$

这里 μ_{mn} 是偶极矩阵元, ω 是跃迁频率。罗杰斯等(Rogers 和 Barrett, 1968; 以及 Goss 和 Field, 1968)给出了强碰撞和低 $\langle v\rangle$ 值情况下的 R_{mn} 值。

对于由强度 I_ν 的辐射所激发的跃迁来说, 爱因斯坦系数 A_{mn} 和 B_{mn} 的关系为:

$$A_{mn}=\frac{1}{\tau_r}=I_\nu B_{mn}\left(\frac{h\nu}{kT_R}\right), \tag{2-160}$$

式中 τ_r 是辐射寿命；当 $h\nu \ll kT_R$ 时，辐射温度 T_R 与强度 I_ν 的关系为瑞利-琼斯近似式：

$$I_\nu = \frac{2kT_R\nu^2}{c^2}。 \tag{2-161}$$

三种温度 T_s、T_k 和 T_R 的关系为：

$$T_s = T_k\left[\frac{T_R+T_0}{T_k+T_0}\right], \tag{2-162}$$

式中
$$T_0 = \frac{k\nu R_{mn}}{kA_{mn}} = \frac{h\nu\tau_R}{k\tau_0}。$$

这是由统计平衡方程((2-82)式)和(2-159)至(2-161)式得出的。

当发现来自星际羟基(OH)分子的辐射是偏振时，具有反常的相对谱线强度；也就是说有很高的亮度温度时，就假定能级粒子数是反转的，并且产生了微波受激放大。由一个微波激射源接收到的累积流量密度由下式给出：

$$\int S_\nu\, d\nu = \frac{h\nu R_m}{D^2\Omega_m}, \tag{2-163}$$

式中 S_ν 是在频率 ν 处观测到的流量密度，D 为源的距离，Ω_m 是微波受激发射的立体角，微波光子的时间变化率 R_m 在未饱和微波受激的情况下正比于

$$R_m \propto \exp(\tau_0)；$$

对饱和微波受激的情况来说，

$$R_m \propto \tau_\nu。$$

利特瓦克(Litvak, 1969)给出了羟基分子的红外抽运的比例常数的详尽公式。这里 τ_ν 由下式给出：

$$\tau_\nu = \frac{hB_{mn}g_m\nu_{mn}}{\Delta\nu_L}\int\left(\frac{N_m}{g_m} - \frac{N_n}{g_n}\right)dl, \tag{2-164}$$

式中 B_{mn} 是谱线的受激发射的系数，g_m 是上能态的简并度，ν_{mn} 是谱线频率，$\Delta\nu_L$ 是谱线宽度，$\int(N_m/g_m - N_n/g_n)\,dl$ 是粒子数反转的线积分。对于未饱和微波受激情况来说，所观测到的多普勒致宽的谱线将变窄，而谱线宽度 $\Delta\nu_L$ 由下式给出：

$$\Delta\nu_L = \frac{1}{\sqrt{\tau_\nu}}\left[\frac{1.67}{\lambda}\left(\frac{2kT_k}{M}\right)^{1/2}\right], \tag{2-165}$$

式中 λ 是谱线的波长，T_k 是运动温度，M 是分子质量，方括号内的表达式是由于热运动而引起的谱线的多普勒宽度，饱和微波受激发射则并不显示出谱线变窄。

2.15.3. 分子的形成及破坏

产生或消耗分子的各种反应的力能学是由分子的离解能和电离电势以及其他反应物(例如光子或带电粒子)的能量所确定的。一个双原子分子的一个稳定电子态的离解能是指从最低的转动-振动能级离解成为原子所需的能量。当离解产物是正常的原子时，称为电子基态的离解能是以 D_0^0 来表示的。一个分子的电离电势定义为从外面已填满的分子基态轨道上取走一个电子而所需的能量。威尔金森(Wilkinson, 1963)列出了天体物理学中感兴趣的 148 种双原子分子的电离电势和离解能。表 22 中包括了其中的一些数据以及取自斯蒂弗等(Stief 等, 1972；以及 Stief, 1973)的其他数据。

表 22　丰富分子及离子的离解能及电离电势[2]

分子或离子	离解能 D_0^0 (电子伏)	电离电势 (电子伏)[1]	分子或离子	离解能 D_0^0 (电子伏)	电离电势 (电子伏)[1]
C_2	6.25±0.2	12.0	HCN		13.6
C_2^+	(5.5±0.5)		H_2CO		10.9
CH	3.47	10.64	H_2O		12.6
CH^+	4.09		HCOOH		11.1
CH_4		13.0	HD	4.51274±0.00020	
CH_3C		10.36	NH	(3.76)	13.10
CH_3OH		10.9	NH^+	(4.26)	
C_2H_2		11.4	NH_3		10.2
C_6H_6		9.24	NO	6.506	9.25
CN	7.5±0.15	14.2±0.3	NO^+	10.87	30.6±0.3
CN^+	(5.56±0.45)		OCS		11.2
CO	11.09	14.013	OH	4.395	13.36±0.2
CO^+	8.33	27.9±0.5	OH^+	(4.63±0.2)	
CS	7.6	11.8±0.2	O_2	5.115	12.075
CS^+	(6.2)		O_2^+	6.65±0.01	38.0±0.5
H_2	4.47718±0.00012	15.426	SO	5.357	12.1±0.3
H_2^+	2.646		SO^+	(3.4±0.3)	

[1] 按照 $\lambda=12396.3/E$ 可以把以电子伏为单位的能量转换成以埃为单位的波长。

[2] 取自威尔金森等(Wilkinson, 1963; Stief 等, 1972; Stief, 1973)的文章。

产生或破坏分子的一些基本反应按照它们在以后出现的前后次序而列于下表中:

反　　应	过　　程
光致离解	一个分子被一个光子所破坏而形成了另一分子和(或)组元原子
光致电离	一个分子被一个光子电离而形成一个离子和一个电子
气体交换反应	原子与分子相互作用而形成原子或分子
离子-分子反应	离子和分子相互作用而形成离子、分子和(或)原子
缔合分离	离子和原子相互作用而形成分子和原子
电荷交换反应	离子与原子相互作用而形成离子和(或)分子
表面复合	原子复合到一个微粒表面而形成一个分子,然后蒸发
辐射缔合	原子复合而形成一个分子和一个光子
辐射吸附	电子与原子相互作用而形成一个离子和一个光子
光致分离	一个光子与离子相互作用而形成一个原子和一个电子
离解复合	一个电子与一个离子或分子相互作用而形成一个分子或原子和(或)一个光子
辐射复合	一个电子和一个离子相互作用而形成一个分子或一个原子和一个光子

对星际分子来说最重要的破坏机制是星际辐射场所引起的它们的光致离解。光致破坏率或离解几率 P 由下式给出:

$$P=\frac{1}{h}\int_{912埃}^{\lambda_T} U_\lambda \sigma_\lambda \Phi \lambda \, d\lambda \text{ 秒}^{-1}, \tag{2-166}$$

式中 h 是普朗克常数, U_λ 是辐射场波长为 λ 时的能量密度, σ_λ 是吸收截面, Φ 是由离解引起的原来产生的主量子额。在这个方程中,积分限是 $\lambda=912$ 埃(此时氢被光致电离)和 $\lambda_T=12396.3/E$, 其中 E 是离解能, 单位是电子伏。阈波长 λ_T 处在紫外波长范围, 在这范围中的辐射能量密度由下式给出(Habing, 1968):

$$U_\lambda = 4\times10^{-17}\text{ 尔格·厘米}^{-3}\text{·埃}^{-1}\quad(\text{当 } 912\text{ 埃}\leqslant\lambda\leqslant2400\text{ 埃})。\tag{2-167}$$

当出现遮蔽云时，辐射场按下列因子衰减：

$$[a_\lambda+(1-a_\lambda)10^{0.4A_\lambda}]^{-1},\tag{2-168}$$

式中颗粒反照率 $a_\lambda\sim0.5$，而消光 A_λ 用星等表示，对于质量为 M 个太阳、平均粒子数密度为 N 的云的中心来说，A_λ 由下式给出：

$$A_\lambda=2.3\times10^7Qr_{\text{粒}}^2N^{2/3}M^{1/3}\text{ 星等},$$

这里消光系数 $Q\approx2.5$，颗粒半径 $r_{\text{粒}}\approx0.12\times10^{-4}$ 厘米，尘埃与气体的比值 $N_g/N\approx10^{-12}$。

克莱姆佩勒等(Klemperer, 1971; Solomon 和 Klemperer, 1971; Stief 等, 1972; 以及 Stief, 1973)已经给出了较完整的各种离子和分子的未衰减的光致消耗率。表 23 给出这些消耗率以及来自角注参考文献的少数几个其他消耗率。

表 23 丰富分子及离子的光致消耗率[5]

反应	光致消耗率(秒$^{-1}$)	反应	光致消耗率(秒$^{-1}$)
$C+h\nu\to C^++e$	1.4×10^{-10} [1]	$HD+h\nu\to H+D$	1.0×10^{-10} [4]
$C_2^++h\nu\to C^++C$	8×10^{-12}	$H_2CO+h\nu\to H_2+CO$ $\Phi=0.5$	1.0×10^{-9}
$CH+h\nu\to C+H$	1.1×10^{-10} [2]	$\to 2H+CO$ $\Phi=0.5$	1.0×10^{-9}
$CH+h\nu\to CH^++e$	5.0×10^{-11}	$H_2O+h\nu\to H+OH$	0.5×10^{-9}
$CH^++h\nu\to C^++H$	3.0×10^{-12}	$NH+h\nu\to N+H$	1.0×10^{-11}
$CH_4+h\nu\to H_2+CH_2$ 为主	0.75×10^{-9}	$NH+h\nu\to NH^++e$	1.0×10^{-12}
$CH_3C+h\nu\to CH_2C\to CH+H$	1.0×10^{-9}	$NH_3+h\nu\to H+NH_2$	
$\to C_3+2H_2$	1.0×10^{-9}	$\to H_2+NH$	0.75×10^{-9}
$C_2H_2+h\nu\to C_2H+H$ $\Phi=0.2$	$0.16\times10^{-8}\Phi$	$\to 2H+NH$	
$\to C_2+H_2$ $\Phi=0.1$	$0.16\times10^{-8}\Phi$	$NO+h\nu\to N+O$	3.3×10^{-10}
$C_6H_6+h\nu\to ?$	$0.66\times10^{-8}\Phi$	$OCS+h\nu\to CO+S$	3.3×10^{-9}
$CN+h\nu\to C+N$	4×10^{-11}	$\to CS+O$	
$CO+h\nu\to C+O$ $\Phi\sim0.07$	$3.3\times10^{-10}\Phi$	$OH+h\nu\to O+H$	4.0×10^{-12}
$H^-+h\nu\to H+e$	2.4×10^{-7} [3]	$OH+h\nu\to OH^++e$	1.0×10^{-12}
$H_2+h\nu\to H+H$	1.0×10^{-10} [4]		

[1] 取自沃纳(Werner, 1970)的文章，注意这种和其他光致分离反应所需要的特殊计算。
[2] 取自伊兰德等(Elander 和 Smith, 1973)的文章。
[3] 取自德戎(de Jong, 1972)的文章，也是一种光致分离反应。
[4] 取自霍伦巴克等(Hollenbach, Werner 和 Salpeter, 1971)的文章。在这种未衰减情况下，HD 率取为 H_2 的值，但是它们与有衰减的情况是不同的(参看 Black 和 Dalgarno, 1973)。
[5] 除非另外注明，表中破坏率取自克莱姆佩勒等(Klemperer, 1971; 以及 Stief, 1973)的文章。

天体物理学中重要的气体交换反应是下式给出的双分子型反应：

$$A+BC\to AB+C,$$

其中 A 和 C 是原子而 AB 和 BC 是分子。各反应物的数密度 N 间的关系为：

$$-\frac{dN_A}{dt}=-\frac{dN_{BC}}{dt}=\frac{dN_{AB}}{dt}=\frac{dN_B}{dt}=\varkappa N_AN_{BC},$$

式中 t 是时间变数，反应率常数 k 由下式给出(Polanyi, 1962)：

$$\varkappa=Pr_{AB}^2\left(\frac{8\pi}{\mu}kT\right)^{1/2}\exp\left[-\frac{E_a}{kT}\right]\text{ 厘米}^3\text{·秒}^{-1}$$

或

$$\varkappa=A\exp\left[-\frac{E_a}{kT}\right]\text{ 厘米}^3\text{·秒}^{-1}。\tag{2-169}$$

这里阿赫尼厄斯(Arrhenius)因子 A 随温度而缓慢地增加，激活能 E_a 是激活分子与正常分子之间的内能之差。空间因子 P 是一个接近于1的取向参量，反应物分子是假定相互接近到距离 r_{AB} 之内，这个距离是气体运动碰撞参数 r_{AA} 和 r_{BB} 的平均值，μ 是原子 A 和分子 BC 的折合质量，T 是气体运动温度。天体物理学中感兴趣的大多数气体交换反应是放热反应，所以不是太依赖于温度的。考夫曼 (Kaufman, 1969) 总结了在室温下所测定的一些 A 因子，对天体物理学中感兴趣的大多数原子分子反应来说，我们取：

$$A \sim 4\times10^{-11}\ \text{厘米}^3\cdot\text{秒}^{-1}。$$

表 24 给出了特定的几种反应率常数。

表 24 丰富分子的气体交换反应及反应率常数[1]

反　　应	反应率常数 A 或 $\varkappa$ (厘米^3·秒$^{-1}$)	反　　应	反应率常数 A 或 $\varkappa$ (厘米^3·秒$^{-1}$)
$C_2+O\to CO+C$	3×10^{-11}	$CN+O\to CO+N$	$10^{-11}\exp(-1,200/T)$
$C_2+N\to CN+C$	3×10^{-11}	$CN+N\to C+N_2$	$\ll1\times10^{-13}$
$CH+C\to C_2+H$	4×10^{-11}	$OH+H\to O+H_2$	1×10^{-11} [2]
$CH+H\to C+H_2$	1×10^{-14}	$N+OH\to NO+H$	7×10^{-11}(当 $T=320$ 开)
$CH+O\to CO+H$	4×10^{-11}	$O+OH\to O_2+H$	5×10^{-11}(当 $T=300$ 开)
$CH+N\to CN+H$	4×10^{-11}	$N+NO\to N_2+O$	2×10^{-11}(当 $T=300$ 开)

[1] 取自克莱姆佩勒(Klemperer, 1971)及赫布斯特等(Herbst 和 Klemperer: *Ap. J.* **185**, 505, 1973)的文章。

[2] 取自卡罗尔等(Caroll 和 Salpeter, 1966)的文章。

对于离子-分子反应、缔合分离和电荷交换反应来说，它们的反应形式为：

$$A+B\to C+D,$$

其中 A 是一个离子，B 是一个原子或分子，C 是一个原子或分子，D是一个离子或一个带电粒子。反应率常数 $\varkappa$ 定义为：

$$-\frac{dN_A}{dt}=-\frac{dN_B}{dt}=\frac{dN_C}{dt}=\frac{dN_D}{dt}=\varkappa N_A N_B,$$

式中 t 是时间变量，N_A、N_B、N_C 和 N_D 分别是 A、B、C 和 D 的数密度。离子 A 与原子或分子 B 之间的相互作用势 V 由下式给出(Rapp 和 Francis, 1962)：

$$V=-\frac{\alpha e^4}{2r^4},$$

式中 α 是原子或分子的偶极极化率，e 是电子的电荷，r 是核间距离。按照吉奥穆西斯等(Gioumousis 和 Stevenson, 1958)计算，临界碰撞参量 r_{AB} 由下式给出：

$$r_{AB}=\left[\frac{4e^2\alpha}{\mu v^2}\right]^{1/4}.$$

所以，反应率常数为：

$$\varkappa=\langle\sigma v\rangle=2\pi ef\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^{1/2}, \tag{2-170}$$

这里 σ 是电荷转移截面，v 是反应物的相对速度，角括号〈 〉表示对时间求平均，μ 是反应物的折合质量，f 是考虑了不是所有碰撞都导致电荷转移这个事实后引进的一个统计因子。对于天体物理学中感兴趣的大多数离子-分子、缔合分离和电荷交换反应来说，我们得出：

$$\varkappa\sim1\times10^{-9}\ \text{厘米}^3\cdot\text{秒}^{-1}。$$

表 25 给出了特定的几种反应率常数。

表 25 离子-分子、缔合分离及电荷交换反应的反应率常数[1]

反应	反应率常数 $\varkappa$ (厘米^3·秒$^{-1}$)	反应	反应率常数 $\varkappa$ (厘米^3·秒$^{-1}$)
$C^++Ca\to C+Ca^+$	2.0×10^{-9}	$D^++H_2\to HD+H^+$	0.8×10^{-9}
$C^++CH\to H+C_2^+$	1.0×10^{-9}	$H^-+H^+\to 2H$	$1.1\times10^{-6}T^{-0.4}$
			或 2.3×10^{-7}(在 $T=50$ 开)
$C^++K\to C+K^+$	2.0×10^{-9}	$H^-+H\to H_2+e$	1.3×10^{-9}
$C_2^++O\to CO+C^+$	1.0×10^{-9}	$H^++D\to H+D^+$	2.0×10^{-9}
$C_2^++N\to CN+C^+$	1.0×10^{-9}	$H^++O\to H+O^+$	0(当 $T=0$ 开[2])
$CH^++C\to H+C_2^+$	1.0×10^{-9}		0.01×10^{-9}(当 $T=50$ 开)
$CH^++H\to H_2+C^+$	$7.5\times10^{-15}T^{5/4}$	$H_2^++H\to H_2+H^+$	5.8×10^{-10}
$CH^++N\to CN+H^+$	$1.0+10^{-9}$	$O^-+H_2\to H_2O+e$	6.0×10^{-10}
$CH^++O\to CO+H^+$	1.0×10^{-9}	$O^-+O\to O_2+e$	1.4×10^{-10}
$CH^++O\to H+CO^+$	1.0×10^{-9}	$O^-+N\to NO+e$	2.0×10^{-10}
$CO^++H\to CO+H^+$	1.0×10^{-9}	$O^++H\to O+H^+$	0.76×10^{-9}(在 $T=0$ 开[2])
$CN^++H\to CN+H^+$	1.0×10^{-9}	$S^-+H_2\to H_2S+e$	$<1.0\times10^{-15}$

[1] 取自克莱姆佩勒等(Klemperer, 1971; de Jong, 1972; Black 和 Dalgarno, 1973; 以及 Dalgarno 和 McCray, 1973)的文章。离子-分子反应、电荷转移反应及离子-电子复合等其他反应率常数由赫布斯特等(Herbst 和 Klemperer, Ap. J. **185**, 505, 1973)的文章给出。

[2] 参看菲尔德等(Field 和 Steigmann, 1971)的文章。

范德赫斯特(van de Hulst, 1949)首先提出分子可能在三体过程中在星际尘粒上形成，在这种过程中尘粒内的点阵振动吸收了当气体原子复合以形成分子所释放的过剩能量。古尔德等(Gould 和 Salpeter, 1963; 以及 Gould, Gold 和 Salpeter, 1963)把这种概念发展为氢分子形成的一种机制。原子撞击一个尘埃表面并复合而形成一个分子的效率 γ 是两个因子的乘积：粘附系数 S(即一个从星际气体来的原子击中尘粒表面，热化并粘附在尘粒上的几率)与复合系数 γ'(即在第二个原子撞击尘粒时，被吸收并与第一个原子复合以前第一个被吸收的原子将保持被吸收且不蒸发的几率)。霍伦巴克等(Hollenbach 和 Salpeter, 1970, 1971)证明，若 $kT_{尘}<kT_{气}<D$，则粘附系数由下式给出：

$$S=\frac{\Gamma^2+0.8\Gamma^3}{1+2.4\Gamma+\Gamma^2+0.8\Gamma^3}, \tag{2-171}$$

这里 $\Gamma=E_c/(kT_{气})$，式中 E_c 是转移到尘粒表面的特征总能量，$T_{气}$ 是气体温度，$T_{尘}$ 是尘粒温度，D 是吸附基态的结合能。对氢原子来说，在 $T_{气}\approx100$ 开时，$\Gamma\approx1$ 和 $S\approx0.3$。对于如碳、氮和氧较重的原子来说，根据沃森等(Watson 和 Salpeter, 1972)的文章，可得 $S\approx1$。若一个新原子撞击尘粒表面的时间 $t_{撞}$ 比一个原子从尘粒表面蒸发的时间 $t_{蒸}$ 小得多，则复合系数 γ' 为 1。设 N 表示原子的数密度，v 是它们的热速度，则

$$t_{撞}\approx[SNv\pi r_{尘}^2]^{-1}, \tag{2-172}$$

式中 $r_{尘}$ 是尘粒的半径，通常取为 $r_{尘}\approx0.17\times10^{-4}$ 厘米。尘粒的特征点阵振动频率是 $\nu_0\approx10^{12}$ 秒$^{-1}$，蒸发时间为：

$$t_{蒸}\approx\nu_0^{-1}\exp\left(\frac{D}{kT_{尘}}\right), \tag{2-173}$$

式中 D 是原子吸附能量，$T_{尘}$ 是尘粒温度。关于分子形成的效率的争论集中在对尘粒温度 $T_{尘}$ 及吸附结合能 D 的不同的估计上(参看 Knaap 等, 1966; Stecher 和 Williams, 1966; Wentzel, 1967; Hollenbach 和 Salpeter, 1970, 1971)。流行的论证给出 $T_{尘}\lesssim25$ 开以及 D

的值，这样就使大多数原子的 $t_{脱}\ll t_{蒸}$，特别当计算 D 时包括了位错与化学杂质缺陷的情况下便是如此。

一个分子 AB 的形成率以及元素 A 的损耗率是决定于下列方程：

$$\frac{dN_{AB}}{dt}=\varkappa N_A N_{尘},$$

$$\frac{dN_A}{dt}=\frac{-\alpha\varkappa}{(1-\alpha)}N_A N_{尘},$$

式中 N_{AB}、N_A 及 $N_{尘}$ 分别表示分子 AB、原子 A 及尘粒的密度，t 是时间变数，α 是一个原子永久地固定在尘粒上的几率，而$(1-\alpha)$是一个分子蒸发并回到气体中的几率。反应率常数 $\varkappa$ 由下式给出：

$$\varkappa=S(1-\alpha)\pi r^2_{尘}(1+\gamma Z)v\approx 6\times 10^{-9}(1-\alpha)(1+2.5Z)r^2_{尘}T^{1/2}\ 厘米^3\cdot 秒^{-1},\quad (2\text{-}174)$$

式中 S 是粘附系数，尘粒半径 $r_{尘}\approx 0.17\times 10^{-4}$ 厘米，γ 由描述在尘粒上的电荷平衡方程所确定，Z 是元素 A 的电荷，v 是元素 A 的热速度：

$$v=\left(\frac{8kT_{气}}{\pi M_A}\right)^{1/2},$$

式中 $T_{气}$ 是气体温度，M_A 是元素 A 的质量。霍伦巴克等(Hollenbach, Werner 和 Salpeter, 1971)讨论了氢分子 H_2 在尘粒上的形成。因为 H_2 是具有低的吸附能量的轻度饱和的分子，它是很易热蒸发的，并且 $\alpha\approx 0$。在计算分子丰度时，气体与尘埃的密度比看作常数。典型的尘粒具有密度 $\rho_{尘}\approx 2$ 克·厘米$^{-3}$，半径 $r_{尘}\approx 0.17\times 10^{-4}$ 厘米，质量 $M_{尘}\approx 4\times 10^{-14}$ 克，以及数密度 $N_{尘}$ 由下式给出：

$$N_{尘}\approx 4\times 10^{-13}N_A,$$

式中 $N_A=N_H+2N_2$ 是以原子 N_H 及分子 N_2 形式存在的氢原子的总的数密度。沃森等(Watson 和 Salpeter, 1972)讨论了 H 与较重的分子碳、氢及氮的形成。在这种情况，$S=1$，不过分子返回到气体中的机制并不清楚。对于象甲烷(CH_4)、水(H_2O)及氨(NH_3)这样的饱和分子来说，吸附能量是低的，它们也许是热蒸发的。

在星际介质的低气体密度情况下，经由辐射缔合过程可以形成一些简单的分子(Swings, 1942; Kramers 和 ter Haar, 1946)：

$$A+B\rightarrow AB+h\nu,$$

这里 A 和 B 是两个互相碰撞的基态原子，并且它们可以处在一个激发分子态的连续谱中。若在这两个原子分离以前，受激复合物张弛并发射一个能量为 $h\nu$ 的光子，那就会形成一个分子 AB。表 26 给出一些较丰富的双原子分子的辐射缔合过程。

贝茨(Bates, 1951)首先给出计算辐射缔合反应率常数 $\varkappa$ 的正确理论。设原子 A 及 B 以及分子 AB 的数密度分别为 N_A、N_B 及 N_{AB}；则

表 26 丰富的双原子分子的辐射缔合过程[1]

分子	辐射缔合过程
CH	$C(^3P)+H(^2S)\rightarrow CH(B^2\Sigma^-)\rightarrow CH(X^2\Pi)+h\nu$
CH^+	$C^+(^2P)+H(^2S)\rightarrow CH^+(A^1\Pi)\rightarrow CH(X^1\Sigma^+)+h\nu$
CN	$C(^3P)+N(^4S)\rightarrow CN(A^2\Pi)\rightarrow CN(X^2\Sigma^+)+h\nu$
CO	$C(^3P)+O(^3P)\rightarrow CO(A^1\Pi)\rightarrow CO(X^1\Sigma^+)+h\nu$
CS	$C(^3P)+S(^3P)\rightarrow CS(A^1\Pi)\rightarrow CS(X^1\Sigma^+)+h\nu$

[1] 取自卢茨(Lutz, 1972)。

$$\frac{dN_{AB}}{dt}=\varkappa N_A N_B,$$

式中 t 是时间变数，相遇的两个能量均为 E 的原子，它们的反应率常数是：

$$\varkappa=g\int\sigma(E)v(E)W(E)dE,$$

式中 g 是两个原子处在所要求的激发分子态的连续谱中的几率，$v(E)$ 是相碰原子的相对速度，$\sigma(E)$ 是辐射缔合的截面，$W(E)$ 是原子的能量分布。辐射缔合的总截面(Lutz, 1972)为：

$$\sigma(E)=\frac{32\times2^{1/2}\pi^4h^2}{3\mu^{3/2}E^{1/2}c^3G'v}\sum_{v''}\sum_{J''}|\langle\psi''|D|\psi'\rangle|^2\rho'(E)\nu(E,\ v'')^3,$$

式中 μ 是两个原子的折合质量，G' 是激发态 $|\psi'\rangle$ 的电子简并度，$\rho'(E)\rangle$ 是起始连续态的密度，频率 $\nu(E,\ v'')$ 是从连续谱能量 E 跃迁到低能态 $|\psi''\rangle$ 的一个振动能级 v'' 所发出的光子的频率。在麦克斯韦速度分布时，对能量的积分给出反应率常数 $\varkappa$ 为：

$$\varkappa=g\frac{64\times2^{1/2}\pi^{7/2}h^2}{3\mu^{3/2}(kT)^{1/2}c^3G'}S_e\sum_{v''}|\langle\psi''_{v''}|\psi'_E\rangle|^2\rho'(E_0)\nu(E_0v'')^3, \tag{2-175}$$

式中 E_0 取为温度 T 的平均能量，S_e 是分子电偶极强度，以及 $|\langle\psi''_{v''}|\psi'_E\rangle|^2$ 是夫兰克-康登因子。

贝茨等(Bates 和 Spitzer, 1951)假设 CH 和 CH^+ 是由下列辐射缔合过程所形成：

$$C+H\rightarrow CH+h\nu$$

和

$$C^++H\rightarrow CH^++h\nu,$$

他们首先计算出了碳氢基(CH)和碳氢离子(CH^+)的平衡丰度。他们的结论是观测到的 CH 和 CH^+ 的密度要求氢的数密度是每立方厘米几百个。索洛蒙等(Solomon 和 Klemperer, 1972; 以及 Smith, Liszt 和 Lutz, 1973) 已重新计算出了这些反应率，更新近的值为：

$\varkappa=1.5\times10^{-17}$ 厘米^3·秒$^{-1}$ (当碳氢基在 $T=100$ 开形成时)

和 $\varkappa=5\times10^{-18}$ 厘米^3·秒$^{-1}$ (当碳氢离子在 $T=100$ 开形成时)。

朱利恩等(Julinne、Krauss 和 Donn, 1971)证明羟基(OH)分子可以经由分子连续谱中的那些共振态而间接地通过辐射缔合形成。这种过程称为逆预离解过程。间接辐射缔合的反应率由下式给出(Julienne 和 Krauss, 1973)：

$$\varkappa=\hbar^2\left(\frac{2\pi}{\mu kT}\right)^{3/2}\frac{1}{g_Ag_B}\sum_n(2J_n+1)\frac{\Gamma_{nr}\Gamma_{np}}{\Gamma_{nr}+\Gamma_{np}}\exp\left(-\frac{E_n}{kT}\right), \tag{2-176}$$

式中 μ 是反应原子的折合质量，g_A 和 g_B 是基态原子能级的简并度，Γ_{nr} 是自然辐射宽度，Γ_{np} 是预离解宽度，E_n 是在最低的原子精细结构渐近能量以上的共振能级 n 的能量。朱利恩等(Julienne, Krauss 和 Donn, 1971)应用该方程得到：

$\varkappa\approx2\times10^{-20}$ 厘米^3·秒$^{-1}$ (当羟基在 $T\geqslant50$ 开形成时)。 (2-177)[1)]

2.16. 恒星大气的谱线辐射——夫琅和费光谱和生长曲线

如图 10 所示，太阳光谱包括不同波长及强度的夫琅和费(Fraunhofer, 1817)谱线，它们在明亮的连续谱上看到的是吸收线。表 27 列出这些谱线中最值得注意的一些波长，而表 28 列出了最强的太阳发射线。基尔霍夫(Kirchhoff 和 Bunsen, 1861) 证明夫琅和费谱线

1) 这里应给出辐射吸附、光致分离、离解复合及辐射复合的内容，原文漏缺。——译者注

表 27 来自太阳的最强的夫琅和费谱线[1]

波 长 (埃)	等值宽度 (毫埃)	元 素	波 长 (埃)	等值宽度 (毫埃)	元 素	波 长 (埃)	等值宽度 (毫埃)	元 素
2,795.4		MgII	3,709.256	573	FeI[2]	4,077.724	428	SrII[2]
2,802.3		MgII	3,719.947	1,664	FeI	4,101.748	3,133	Hδ
2,851.6		Mg	3,734.874	3,027	FeI	4,132.067	404	FeI[2]
2,881.1		Si	3,737.141	1,071	FeI	4,143.878	466	FeI
3,067.262	663	FeI[2]	3,745.574	1,202	FeI[2]	4,167.277	200	MgI
3,134.116	414	NiI[2]	3,748.271	497	FeI	4,202.040	326	FeI
3,242.007	270	TiII	3,749.495	1,907	FeI	4,226.740	1,476	CaI
3,247.569	246	CuI	3,758.245	1,647	FeI	4,235.949	385	FeI[2]
3,336.689	416	MgI	3,759.299	334	TiII	4,250.130	342	FeI[2]
3,414.779	816	NiI	3,763.803	829	FeI	4,250.797	400	FeI[2]
3,433.579	492	NiI[2]	3,767.204	820	FeI	4,254.346	393	CrI[2]
3,440.626	1,243	FeI	3,787.891	512	FeI	4,260.486	595	FeI
3,441.019	634	FeI	3,795.012	547	FeI[2]	4,271.774	756	FeI
3,443.884	655	FeI	3,806.718	209	FeI[2]	4,325.775	793	FeI[2]
3,446.271	470	NiI	3,815.851	1,272	FeI	4,340.475	2,855	Hγ
3,458.467	656	NiI	3,820.436	1,712	FeI	4,383.557	1,008	FeI
3,461.667	758	NiI	3,825.891	1,519	FeI	4,404.761	898	FeI
3,475.457	622	FeI	3,827.832	897	FeI	4,415.135	417	FeI[2]
3,476.712	465	FeI[2]	3,829.365	874	MgI	4,528.627	275	FeI[2]
3,490.594	830	FeI	3,832.310	1,685	MgI	4,554.036	159	BaII
3,492.975	826	NiI	3,834.233	624	FeI	4,703.003	326	MgI
3,497.843	726	FeI	3,838.302	1,920	MgI	4,861.342	3,680	Hβ
3,510.327	489	NiI	3,840.447	567	FeI	4,891.502	312	FeI
3,515.066	718	NiI	3,841.058	517	FeI[2]	4,920.514	471	FeI[2]
3,521.270	381	FeI	3,849.977	608	FeI	4,957.613	696	FeI[2]
3,524.536	1,271	NiI	3,856.381	648	FeI	5,167.327	935	MgI[2]
3,554.937	404	FeI	3,859.922	1,554	FeI	5,172.698	1,259	MgI
3,558.532	485	FeI[2]	3,878.027	555	FeI	5,183.619	1,584	MgI
3,565.396	990	FeI	3,886.294	920	FeI	5,250.216	62	FeI[3]
3,566.383	458	NiI	3,899.719	436	FeI	5,269.550	478	FeI[2]
3,570.134	1,380	FeI	3,902.956	530	FeI[2]	5,328.051	375	FeI
3,578.693	488	CrI	3,905.532	816	SiI	5,528.418	293	MgI
3,581.209	2,144	FeI	3,920.269	341	FeI	5,889.973	752	NaI(D_2)[2]
3,586.990	532	FeI	3,922.923	414	FeI[2]	5,895.940	564	NaI(D_1)
3,593.495	436	CrI	3,927.933	187	FeI	6,102.727	135	CaI
3,608.869	1,046	FeI	3,930.308	108	FeI	6,122.226	222	CaI
3,618.777	1,410	FeI	3,933.682	20,253	CaII[2]	6,162.180	222	CaI
3,619.400	568	NiI	3,944.016	488	AlI	6,302.499	83	FeI[3]
3,631.475	1,364	FeI[2]	3,961.535	621	AlI	6,562.808	4,020	Hα
3,647.851	970	FeI[2]	3,968.492	15,467	CaII[2]	8,498.062	1,470	CaII
3,679.923	448	FeI[2]	4,045.825	1,174	FeI	8,542.144	3,670	CaII
3,685.196	275	TiII	4,063.605	787	FeI[2]	8,662.170	2,600	CaII
3,705.577	562	FeI	4,071.749	723	FeI	10,830		HeI

1 取自穆尔等(Moore, Minnaert 和 Houtgast, 1966)的书。

2 混合谱线。

3 磁灵敏谱线。

表 28 来自太阳的最强的发射线[1]

从日冕、色球及两者之间的过渡区的紫外发射线[1]

波 长 (埃)	在地球处的强 度 (尔格·厘米$^{-2}$·秒$^{-1}$)	元 素	波 长 (埃)	在地球处的强 度 (尔格·厘米$^{-2}$·秒$^{-1}$)	元 素	波 长 (埃)	在地球处的强 度 (尔格·厘米$^{-2}$·秒$^{-1}$)	元 素
284.2	0.017	FeXV	625	0.011	MgX	1,037.6	0.025	OVI
303.8	0.25	HeII (Lyα)	629.7	0.045	OV	1,215.7	5.1	HI (Lyα)
335.0	0.012	FeXVI	770.4	0.011	NeVIII	1,548.2	0.11	CIV
361.7	0.005	FeXVI	787.7	0.008	OIV	1,550.8	0.06	CIV
368.1	0.031	MgIX	790.1	0.003	OIV	1,561.4	0.09	CI
465.2	0.005	NeVII	832–835	0.013	OII, III	1,640.5	0.07	HeII
499.3	0.006	SiXII	810–911	0.28	HI (Lyα)	1,657.0	0.16	CI
554	0.009	OIV	977.0	0.050	CIII	1,808.0	0.15	SiII
584.3	0.053	HeI	1,025.72	0.060	HI (Lyβ)	1,817.4	0.45	SiII
609.8	0.011	MgX	1,031.9	0.020	OVI	1,892.0	0.10	SiIII

日食期间观测到的色球发射线[2]

波 长 (埃)	在太阳上的总强度 (10^{11} 尔格·秒$^{-1}$·厘米$^{-1}$·球面度$^{-1}$)	元 素	波 长 (埃)	在太阳上的总强度 (10^{11} 尔格·秒$^{-1}$·厘米$^{-1}$·球面度$^{-1}$)	元 素	波 长 (埃)	在太阳上的总强度 (10^{11} 尔格·秒$^{-1}$·厘米$^{-1}$·球面度$^{-1}$)	元 素
3,685.196	90	TiII	3,835.39	228	HI (H9)	4,861.342	1,632	HI (Hβ)
3,691.56	29	HI (H18)	3,838.302	60	MgI	5,015.67	6	HeI
3,697.15	35	HI (H17)	3,889.05	381	HI (H8)	5,183.619	66	MgI
3,703.86	43	HI (H16)	3,933.66	818	CaII	5,875.65	994	HeI (D3)
3,711.97	53	HI (H15)	3,968.47	615	CaII	6,562.808	4,738	HI (Hα)
3,721.94	73	HI (H14)	3,970.076	306	HI (Hϵ)	7,065.18	138	HeI
3,734.37	99	HI (H13)	4,026.36	24	HeI	7,771.954	91	OI
3,750.15	108	HI (H12)	4,077.724	75	SrII	7,774.177	75	OI
3,759.299	90	TiII	4,101.748	459	HI (Hδ)	7,775.395	53	OI
3,761.320	82	TiII	4,215.539	51	SrII	8,498.02	512	CaII
3,770.63	116	HI (H11)	4,226.740	22	CaI	8,542.09	1,362	CaII
3,797.90	157	HI (H10)	4,246.837	18	ScII	8,545.38	23	HI (P15)
3,819.61	5	HeI	4,340.425	505	HI (Hγ)	8,598.39	26	HI (P14)
3,820.436	14	FeI	4,471.69	121	HeI	8,662.14	1,181	CaII
3,829.365	20	MgI	4,685.68	2	HeI	8,665.02	34	HI (P13)
3,832.310	46	MgI	4,713.14	9	HeI	8,750.47	46	HI (P12)

日冕发射线[3]

波 长 (埃)	等值宽度 (毫埃)	元 素	波 长 (埃)	等值宽度 (毫埃)	元 素	波 长 (埃)	等值宽度 (毫埃)	元 素
3,329	0.7	CaXII	4,232.0	1.1	NiXII	6,374.5	5	FeX
3,388.0	10	FeXIII	4,256.4	0.1	KXI	6,701.9	1.2	NiXV
3,534.0	1	VX	4,351.0	0.1	CoXV	6,740	0.1	KXIV
3,600.9	1.3	NiXVI	4,412.4	0.3	ArXIV	7,059.6	0.8	FeXV
3,642.8	0.4	NiXIII	4,566.6	0.5	CrIX	7,891.9	6	FeXI
3,685	0.2	MnXII	5,116.0	0.8	NiXIII	8,024.2	0.3	NiXV
3,800.7	0.5	CoXII	5,302.9	20	FeXIV	10,776.8[1)]	50	FeXIII
3,987.1	0.7	FeXI	5,445.5	0.2	CaXV	10,797.9	30	FeXIII
3,998	0.1	CrXI	5,536	0.3	ArX			
4,086.5	0.4	CaXIII	5,094.5	0.3	CaXV			

[1] 取自欣特雷格(Hinteregger, 1965)的文章。

[2] 取自邓恩(Dunn 等, 1968)的文章。

[3] 取自艾伦(Allen, 1963)的书。

[1)] 原文有误，应改为 10,746.8。——译者注

的波长相应于在地球上观测到的元素的某种跃迁；艾布特等(Abt、Meinel、Morgan 和 Tabscott, 1969; Moore、Minnaert 和 Houtgast, 1966; Morgan、Keenan 和 Kellman, 1943; 以及 Striganov 和 Sventitskii, 1968)列出了不同元素的不同原子及离子能态的谱线波长。

为了确定恒星大气中的激发温度、湍流速度、电子和气体压力、表面重力以及元素的丰度，可以把谱线强度和宽度的观测值与理论的预期值作比较。两种经典的大气模型是舒斯特-史瓦西大气(Schuster-Schwarzschild 大气，简称 SS 大气)(Schuster, 1905; Schwarzschild, 1906)和米尔恩-爱丁顿大气(Milne-Eddington 大气，简称 ME 大气)(Milne, 1921, 1930; Eddington, 1917, 1926)。在 SS 近似中假定连续光谱是在光球中形成的，而线光谱是完全由光球之上迭加的"反变层"形成的。在 ME 近似中假定谱线及连续光谱两者都是在同一层中以谱线吸收系数与连续谱吸收系数之比是常数的方式形成的。此处我们将概述一种包括这些经典解的普遍解法。在米哈拉斯(Mihalas, 1970)的书中给出这种解法的详尽讨论。金格里奇等(Gingerich、Noyes、Kalkofen 和 Cuny, 1971; 以及 Gingerich 和 de Jager, 1968)给出了与观测到的太阳的连续谱和谱线数据拟合得最好的大气模型。前者是非局部热动平衡模型，而后者是局部热动平衡模型。

频率为 ν 的辐射强度 I_ν 的转移方程由下式给出：

$$\frac{\mu dI_\nu}{d\tau_\nu}=I_\nu-S_\nu。\tag{2-178}$$

对于一个平行大气的平面来说，转移方程具有出射强度解：

$$I_\nu(0,\ \mu)=\int_0^\infty S_\nu(t_\nu)\exp\left(\frac{-t_\nu}{\mu}\right)\frac{dt_\nu}{\mu},\tag{2-179}$$

给出总表面通量为：

$$F_\nu=2\int_0^\infty S_\nu(t_\nu)E_2(t_\nu)dt_\nu,\tag{2-180}$$

式中指数积分 $E_n(x)$ 由下式给出：

$$E_n(x)=\int_1^\infty\frac{\exp(-xt)}{t^n}dt=x^{n-1}\int_x^\infty\frac{\exp(-t)}{t^n}dt,\tag{2-181}$$

这里 $\mu=\cos\theta$，其中 θ 是表面法线与辐射方向之间的夹角，光学深度 τ_ν 由下式给出：

$$\tau_\nu=(\varkappa+l_\nu+\sigma+\sigma_\nu)\rho dz,\tag{2-182}$$

式中 $\varkappa$ 和 l_ν 分别是每单位质量对连续谱和谱线辐射的吸收系数，σ 和 σ_ν 分别是连续谱和谱线辐射的相干散射的系数，ρ 是质量密度，而 z 是沿与大气分层平面法线方向测量的高度。设连续谱为热辐射，则源函数 S_ν 由下式给出：

$$S_\nu=\lambda_\nu B_\nu(T)+(1-\lambda_\nu)J_\nu,\tag{2-183}$$

式中

$$\lambda_\nu=\frac{(1-\rho)+\varepsilon\eta_\nu}{1+\eta_\nu},$$

$$\eta_\nu=\frac{l_\nu}{\varkappa+\sigma},$$

$$\rho=\frac{\sigma}{\varkappa+\sigma}。$$

普朗克函数 $B_\nu(T)$ 由下式给出(Planck, 1901)：

$$B_\nu(T)=\frac{2h\nu^3}{c^2}\left[\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)-1\right]^{-1},\tag{2-184}$$

式中 T 是温度，$(1-\varepsilon)$ 是被吸收的光子散射而形成谱线辐射的百分比，J_ν 是平均强度，质量吸收系数 $\varkappa$ 乘上因子 $[1-\exp(h\nu/kT)]$ 是对受激发射的修正。

当恒星处于辐射平衡时，平均强度由下式给出(Schwarzschild, 1906; Milne, 1921)：

$$J_\nu(\tau_\nu)=\frac{1}{2}\int_0^\infty S_\nu(t_\nu)E_1(t_\nu-\tau_\nu)\,dt_\nu=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}I_\nu(\tau_\nu,\ \mu)d\mu, \tag{2-185}$$

式中 E_1 由(2-181)式取 $n=1$ 给出。应用爱丁顿(1926)近似：

$$J_\nu(\tau_\nu)=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}I_\nu(\tau_\nu,\ \mu)\mu^2d\mu \tag{2-186}$$

和普朗克函数的米尔恩(Milne, 1930)展开式：

$$B_\nu(T)=a+b\tau=a+p_\nu\tau_\nu, \tag{2-187}$$

其中 τ 和 τ_ν 分别是连续谱和谱线的光学深度，而

$$p_\nu=\frac{b}{1+\eta_\nu}; \tag{2-188}$$

这样就得到史瓦西-米尔恩(Schwarzschild-Milne)方程(2-185)式的米尔恩-爱丁顿(Milne-Eddington)解为：

$$J_\nu=a+p_\nu\tau_\nu+\left[\frac{p_\nu-\sqrt{3}\,a}{\sqrt{3}\,(1+\sqrt{\lambda_\nu})}\right]\exp(-\sqrt{3\lambda_\nu}\,\tau_\nu)。 \tag{2-189}$$

当研究谱线辐射时，用下列定义的吸收深度 A_ν 和 a_ν 是方便的：

$$A_\nu=1-\frac{F_\nu^L}{F_\nu^C}, \tag{2-190}$$

$$a_\nu=1-\frac{I_\nu^L(0,\ \mu)}{I_\nu^C(0,\ \mu)},$$

其中 I_ν 及 F_ν 分别由(2-179)式及(2-180)式给出，上角标 L 和 C 分别表示谱线和连续辐射。当应用米尔恩-爱丁顿解时，

$$A_\nu=1-\left[\frac{p_\nu+\sqrt{3\lambda_\nu}\,a}{1+\sqrt{\lambda_\nu}}\right]\left[\frac{1+(1-\rho)^{1/2}}{b+a[3(1-\rho)]^{1/2}}\right], \tag{2-191}$$

利用

$$I_\nu^L(0,\ \mu)=a+p_\nu\mu+\frac{p_\nu-\sqrt{3}\,a}{\sqrt{3}\,(1+\sqrt{\lambda_\nu})}\,\frac{(1-\lambda_\nu)}{(1+\sqrt{3\lambda_\nu}\,\mu)} \tag{2-192}$$

以及由(2-192)式取 $\tau_\nu=0$ 所给出的 $I_\nu^C(0,\ \mu)$，就可由(2-190)式得出 a_ν。

等值宽度 W_ν 或 W_λ 由下式给出：

$$W_\nu=\int_0^\infty A_\nu d\nu=\frac{\nu_{mn}^2}{c}W_\lambda, \tag{2-193}$$

式中 ν_{mn} 是谱线的中心频率。因为等值宽度与仪器所引起的轮廓畸变无关，同时因为它给出了一颗恒星大气中元素相对丰度的一种量度，所以它是一个有用的参量。一个函数的等值宽度是函数下的面积除以中心的纵坐标。换句话说，一个函数的等值宽度就是一个高度为该函数的矩形的宽度。对于标准偏差为 σ 的高斯函数来说，等值宽度为 2.5066σ，而半极大全宽度为 2.355σ。

如果我们假定谱线形成发生在处于局部热动平衡的等温层中，则(ME)与(SS)近似法两者都得到了下述近似关系式(Menzel, 1936)：

$$
\begin{aligned}
\frac{W_\nu}{2A_0\Delta\nu_D} &= \int_0^\infty \frac{\eta_0 H(a,\ b)}{1+\eta_0 H(a,\ b)}\,db \\
&\approx \frac{\eta_0 \pi^{1/2}}{2} \qquad (\text{当 } \eta_0 \ll 1) \\
&\approx (\ln \eta_0)^{1/2} \qquad (\text{当 } 10 \leqslant \eta_0 \leqslant 1000) \\
&\approx \frac{(\pi a \eta_0)^{1/2}}{2} \qquad (\text{当 } \eta_0 \geqslant 1000),
\end{aligned}
\tag{2-194}
$$

这里 A_0 是谱线的中心深度，$\Delta\nu_D$ 是至半极大的多普勒致宽的全宽度，$H(a,\ b)$是在第 2.22 节中所讨论过的佛格特函数，参数 a 由下式给出：

$$
a = \frac{\Gamma}{4\pi \Delta\nu_D}, \tag{2-195}
$$

式中 Γ 是谱线的阻尼常数，而

$$
\eta_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{\varkappa} \frac{e^2}{mc} \frac{f\lambda}{V} N_{r,s}, \tag{2-196}
$$

式中 $\varkappa$ 是连续谱不透明度，最可几速度 V 由下式给出：

$$
V = \left[\frac{2kT_K}{M} + V_{湍}^2\right]^{1/2}, \tag{2-197}
$$

其中 T_K 是气体运动温度，M 是原子质量，$V_{湍}$ 是最可几湍流速度。科利斯等(Corliss 和 Bozman, 1962；以及 Corliss 和 Warner, 1964)把振子强度 f 列成了表；λ 是波长，第 r 次电离级的第 s 能态的原子数目由下列沙哈方程(3-127)式(Saha, 1921)给出：

$$
N_{r,s} = \frac{N_r g}{U} \exp\left(\frac{-\chi}{kT_{激发}}\right), \tag{2-198}
$$

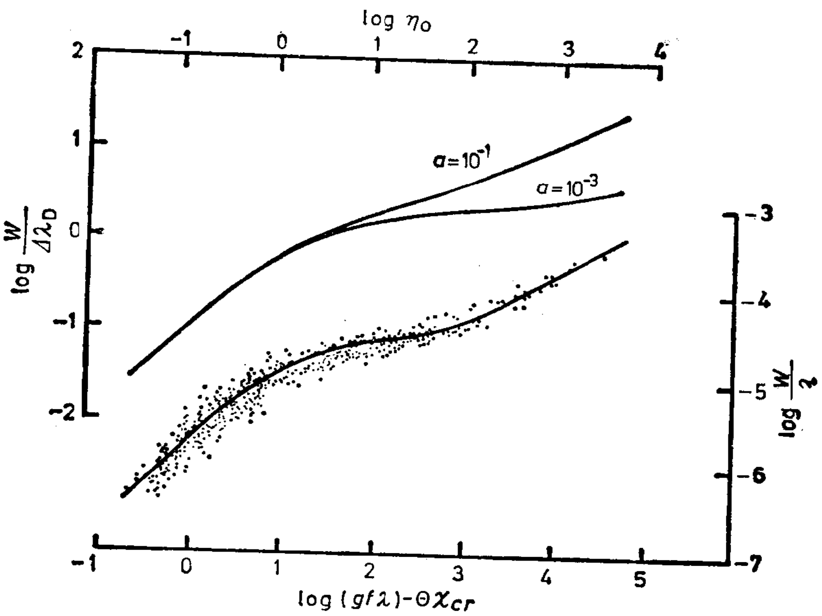


图 15 理论的生长曲线[参看(2-194)式]及太阳的生长曲线(取自 Cowley 和 Cowley, 1964 的文章)。在太阳生长曲线中，W 是谱线的等值宽度，符号 χ_{cr} 表示横坐标用铬的标度给出，而每一点代表一条单独的谱线。发现激发温度 5143 开最近似于这些数据；并且假定激发温度等于气体运动温度，则得到湍流速度为 1.4±0.2 公里·秒$^{-1}$。理论生长曲线与经验生长曲线也得出观测阻尼常数与经典阻尼常数之比的对数值为 1.4。参数 $a=\Gamma/(4\pi\Delta\nu_D)$，其中 Γ 是阻尼常数，$\Delta\nu_D$ 是多普勒致宽谱线轮廓的半极大全宽度。变数 η_0 与横坐标的其他参数的关系为(2-199)式

表 29 太阳光球中元素的相对丰度(密度)[1]

原子序数	元素	丰度 $\log N(H)=12.00$	丰度 $N(S_i)=10^6$	原子序数	元素	丰度 $\log N(H)=12.00$	丰度 $N(S_i)=10^6$
1	H	12.00	3.32×10^{10}	36	Kr	(3.15)	(46.8)
2	He	10.77	1.96×10^{9}	37	Rb	2.48	10.0
3	Li	0.96	0.30	38	Sr	3.02	34.7
4	Be	2.36	7.58	39	Y	3.20	52.5
5	B	3.6	131.8	40	Zr	2.65	14.8
6	C	8.55	1.17×10^{7}	41	Nb	2.30	6.60
7	N	7.98	3.16×10^{6}	42	Mo	2.30	6.60
8	O	8.79	2.04×10^{7}	43	Tc	—	—
9	F	(4.87)	(2.45×10^{3})	44	Ru	1.82	2.18
10	Ne	7.87	2.46×10^{6}	45	Rh	1.37	0.77
11	Na	6.18	5.0×10^{4}	46	Pd	1.57	1.23
12	Mg	7.41	8.5×10^{5}	47	Ag	0.75	0.18
13	Al	6.40	8.3×10^{4}	48	Cd	1.54	1.14
14	Si	7.48	1.0×10^{6}	49	In	1.45	0.93
15	P	5.43	8.9×10^{3}	50	Sn	1.54	1.14
16	S	7.27	6.17×10^{5}	51	Sb	1.94	2.88
17	Cl	(5.23)	(5.7×10^{3})	52	Te	(2.29)	(6.42)
18	Ar	(6.55)	(1.172×10^{5})	53	I	(1.52)	(1.09)
19	K	5.05	3.72×10^{3}	54	Xe	(2.21)	(5.38)
20	Ca	6.33	7.08×10^{4}	55	Cs	(1.07)	(0.387)
21	Sc	2.85	23.4	56	Ba	2.10	4.16
22	Ti	4.81	2.14×10^{3}	57	La	2.03	3.54
23	V	4.17	489.8	58	Ce	1.78	1.99
24	Cr	5.01	3.39×10^{3}	59	Pr	1.45	0.93
25	Mn	4.85	2.34×10^{3}	60	Nd	1.93	2.81
26	Fe	6.82	2.19×10^{5}	61	Pm	—	—
27	Co	4.70	1.66×10^{3}	62	Sm	1.62	1.38
28	Ni	5.77	1.95×10^{4}	63	Eu	0.96	0.30
29	Cu	4.45	933.3	64	Gd	1.13	0.44
30	Zn	3.52	109.6	65	Tb	(0.22)	(0.055)
31	Ga	2.72	17.4	66	Dy	1.00	0.33
32	Ge	2.49	10.2	70	Yb	1.53	1.12
33	As	(2.30)	(6.6)	72	Hf	(0.80)	(0.21)
34	Se	(3.31)	(67.2)	80	Hg	(1.08)	(0.40)
35	Br	(2.61)	(13.5)	82	Pb	1.63	1.41

[1] 许多较轻元素的丰度取自兰伯特等(Lambert 和 Warner, 1968; Rogerson, 1969; 以及 Mitler, 1970)的文章，而其他轻元素及重元素取自戈德伯格等(Goldberg, Müller 和 Aller, 1960; 以及 Unsöld, 1969)的文章。括号中的值是表 38 给出的宇宙丰度。

式中 N_r 是第 r 次电离级的原子总数，g 是第 s 能级的统计权重，U 是配分函数，χ 是第 s 能级的激发电势。于是我们可把(2-196)式写成:

$$\log \eta_0 = \log(gf\lambda) - \frac{5040\chi}{T_{激发}} + \log C, \tag{2-199}$$

式中 $\log C = \log N_r + \log[\sqrt{\pi}e^2/(mc)] - \log V - \log U - \log \varkappa$，以及 $\log[\sqrt{\pi}e^2/(mc)] = -1.824673$。理论的生长曲线为 $\log(W_\lambda/\Delta\lambda_D)$ 随 $\log\eta_0$ 变化的曲线，例如见图 15。生长曲线法是斯特鲁维等(Struve 和 Elvey, 1934)所预见的。范德赫尔德等(van der Held, 1931;

Wrubel, 1950; Wrubel, 1954; 以及 Hunger, 1956) 给出了(ME)以及(SS)近似法的生长曲线。经验生长曲线为 $\log(W_\lambda/\lambda)$-$\log(gf\lambda)$ 曲线，考利等(Cowley 和 Cowley, 1964; 以及 Pagel, 1965)给出了太阳的曲线。如图 15 所示，经验曲线与理论曲线的纵坐标都移动了一个量：

$$\log\left(\frac{V}{c}\right)=\log\left(\frac{W_\lambda}{\lambda}\right)-\log\left(\frac{W_\lambda}{\Delta\lambda_D}\right), \tag{2-200}$$

由此可以求出 V 值。激发温度 $T_{激发}$ 可由经验生长曲线与各种理论曲线的比较得出，或者由一种激发电势的谱线的经验曲线与另一种激发电势的谱线的类似曲线作比较而得出。只要激发温度等于气体运动温度，利用(2-197)式，就可以根据 V 和 $T_{激发}$ 来估算湍流速度 $V_{湍}$。对太阳来说，考利等(Cowley 和 Cowley, 1964)得出了 $T_{激发}=5143$ 开和 $V_{湍}=1.4\pm0.2$ 公里·秒$^{-1}$。理论曲线与经验曲线的横坐标之差得出 $\log C$，然后就由 $\log C$ 得出元素丰度的相对量度。罗素等(Russell, 1929; Goldberg 等, 1960; Aller, 1961; Lambert 和 Warner, 1968; Unsöld, 1969; Rogerson, 1969; 以及 Mitler, 1970) 给出了太阳与其他正常恒星的大气中元素的相对丰度[1)]，表 29 给出了这些丰度。萨金特等(Sargent, 1964; 以及 Aller 和 Greenstein, 1960)分别概括了特殊 A 型星及金属欠缺的 G 型亚矮星的元素丰度。可以根据碰撞阻尼是以与中性氢碰撞为主还是以二次斯塔克效应为主，而由生长曲线的阻尼部分的斜率值来估算出气体压力 P_g 或电子压力 P_e。气体压力和电子压力与气体质量密度 ρ 的关系为：

$$\rho kT_K=(P_g-P_e)\mu m_H, \tag{2-201}$$

式中 m_H 是氢的质量，μ 是平均分子量，T_K 是气体运动温度。

质量吸收系数 $\varkappa_\nu$ 与质量密度 ρ 的关系为：

$$\varkappa_\nu=\frac{\alpha_\nu}{\rho}, \tag{2-202}$$

其中谱线辐射的共振、光致电离和类氢原子的自由-自由跃迁而产生的每单位长度的吸收系数 α_ν 则分别由(2-69)与(2-71)式、(1-237)与(1-221)式和(1-219)与(1-221)式给出。对于 $T_K>7000$ 开的炽热恒星来说，氢原子的连续吸收起主要作用，而对较冷的恒星来说，则是以负氢离子 H^- 的吸收为主。张德拉塞卡等(Chandrasekhar 和 Breen, 1946) 给出后一种跃迁的吸收系数，他们给出在 5600 开与单位电子压力下 $\alpha(H^-)=5.81\times10^{-26}$ 厘米$^{-2}$。在某些情况下，HeI 和 HeII 吸收以及汤姆孙散射与瑞利散射((1-311)式和(1-305)式)也是重要的。连续谱吸收截面的更为新近的测定是由米哈拉斯(Mihalas, 1970)作出的。当要求一种与频率无关的吸收系数时，就可以采用罗斯兰德平均不透明度(Rosseland, 1924)：

$$\frac{1}{\varkappa_R}=\frac{\pi\int_0^\infty\frac{1}{\varkappa_\nu}\frac{dB_\nu(T)}{dT}d\nu}{4\sigma T^3}, \tag{2-203}$$

式中斯特凡-玻耳兹曼常数 $\sigma={}^*5.67032\times10^{-5}$ 尔格·厘米$^{-2}$·开$^{-4}$·秒$^{-1}$，以及

$$\frac{dB_\nu(T)}{dT}=\frac{2h^2\nu^4}{c^2kT}\frac{\exp[h\nu/(kT)]}{\{\exp[h\nu/(kT)]-1\}^2}。 \tag{2-204}$$

考克斯等(Cox 和 Stewart, 1970)给出了星族 II 中各种成分的罗斯兰德不透明度。

用于靠近恒星表面的与频率无关的吸收系数是下式给出的普朗克平均不透明度 $\varkappa_P$：

$$\varkappa_P=\frac{\pi}{\sigma T^4}\int_0^\infty\varkappa_\nu B_\nu(T)d\nu, \tag{2-205}$$

1) 更新的数据见 Aller L. H. *etal.*, *Science* **191**, 1223, 1976。——译者注

式中普朗克函数由(2-184)式给出。若连续谱吸收系数与频率无关，则温度 $T(\tau)$ 将按照下式给出的灰体关系式(Milne, 1930)随光学深度变化:

$$T^4(\tau)=\frac{3}{4}\left(\tau+\frac{2}{3}\right)T^4_{有效}, \tag{2-206}$$

式中 $T_{有效}$ 是辐射通量等于恒星辐射通量的一个黑体辐射体的有效温度。

2.17. 改变发射谱线频率的效应

正常塞曼效应 对于具有单线的原子(自旋 $S=0$)，磁场将使任何一个能级分裂成 $2J+1$ 个等间距能级(其中 J 是总角动量)。各能级的能量 E_M 由下式给出(Zeeman, 1896, 1897; Lorentz, 1897):

$$E_M=E_n\pm\frac{ehHM}{4\pi mc}=E_n+hoM, \tag{2-207}$$

式中 M 取 0 至 J 之间的整数值，E_n 是无磁场时的能级的能量，H 是磁场强度，因子 $eh(4\pi mc)={}^*9.274077\times10^{-21}$ 尔格·高斯$^{-1}$是玻尔磁子的磁矩，以及 $o=eH/(4\pi mc)={}^*1.399612\times10^6H$ 赫是拉莫尔进动频率。

在不同光谱项的能级之间的容许跃迁的选择定则是 $\Delta M=0$、±1，并且一个具有 $M=0$ 的能级不能与另一个 $M=0$ 的能级合在一起。因为所有的光谱项都有等间距的分裂，任何单线的频率 ν_{mn} 将分成三个分量：频率为 ν_{mn} 的 π 分量和下列频率的两个 σ 分量(Lorentz, 1897):

$$\nu=\nu_{mn}\pm\frac{eH}{4\pi mc}=\nu_{mn}\pm{}^*1.399612\times10^6\,H\,赫, \tag{2-208}$$

式中磁场强度 H 的单位是高斯。π 分量是在视线和磁场矢量组成的平面内偏振。两个 σ 分量是椭圆偏振的。当在磁场方向观测时，中央的 π 分量是没有的，两个 σ 分量是具有相反旋向的圆偏振(频率较低的是右旋圆偏振)。在垂直于磁场方向观测时，则三个分量都存在，未位移的分量(π)是平行于磁场的线偏振，而其他两个分量(σ)是垂直于磁场的线偏振。

通常，在频率 ν 处所观测到的强度 $I(\nu)$ 将取决于无磁场时产生的强度 $I_0(\nu)$、磁矢量与视线的倾角 γ 以及天线的偏振接收特征而变。具有右旋圆偏振的射束中的总强度为(Seares, 1913):

$$I_R(\nu)=\frac{1}{8}(1-\cos\gamma)^2I_0(\nu+\Delta\nu_0)+\frac{1}{4}\sin^2\gamma I_0(\nu)+\frac{1}{8}(1+\cos\gamma)^2I_0(\nu-\Delta\nu_0), \tag{2-209}$$

式中塞曼劈裂频率 $\Delta\nu_0={}^*1.399612\times10^6H$ 赫。在具有左旋偏振的射束中的强度 $I_L(\nu)$，可在 $I_R(\nu)$ 中改变其 $\cos\gamma$ 项的符号即可得出。

在弱磁场时，塞曼劈裂 $\Delta\nu_0={}^*1.399612\times10^6H$ 可以比所观测到的谱线的半极大全宽 $\Delta\nu_L$ 小很多。在这种情况下，磁场的视线分量 $H\cos\gamma$ 可以由比较天线中分别观测到的右旋圆偏振 $I_R(\nu)$ 和左旋圆偏振 $I_L(\nu)$ 谱线的轮廓而得出。这两个轮廓的频率差为 $\Delta\nu={}^*1.399612\times10^6H\cos\gamma$ 赫。由两个轮廓相加和相减就可分别得到轮廓之和 $I(\nu)$ 与差 $D(\nu)$:

$$I(\nu)=I_L(\nu)+I_R(\nu);$$
$$D(\nu)=I_L(\nu)-I_R(\nu)={}^*2.799224\times10^6I'(\nu)H\cos\gamma, \tag{2-210}$$

式中 $I'(\nu)$ 表示 $I(\nu)$ 对频率的一阶导数。以 $I(\nu)$ 的峰值天线温度 T_A、$I(\nu)$ 的半宽度 $\Delta\nu_L$ 以

及 $D(\nu)$ 的峰值天线温度 ΔT_A 表示，我们得出：

$$H\cos\gamma \approx 10^{-6}\frac{\Delta\nu_L \Delta T_A}{4T_A} \text{ 高斯。} \tag{2-211}$$

用这种方法已测定了小到 $0.005\Delta\nu_L$ 的有效塞曼频率位移。

塞曼效应首先用于光学波段以测量太阳黑子磁场(Hale, 1908)和特殊 A 型星磁场(Babcock, 1947)；后来在 1420 兆赫处测量星际磁场(Verschuur, 1968)。太阳上的磁场强度值的范围从 1 至几百高斯(Babcock 和 Babcock, 1955)。特殊 A 型星的磁场强度范围从检测极限 100 高斯至 HD215441 星的 34000 高斯(Babcock, 1960; Cameron, 1967)。对于星际介质，塞曼效应给出 $H\approx 10^{-6}$ 高斯，这与对脉冲星的法拉第旋转和频散测量的结果是一致的。表 30 给出 89 颗磁星的磁场强度以及其他观测数据。

反常塞曼效应 当自旋 $S\neq 0$，同时存在罗素-桑德斯(LS)耦合时，磁场会使一个光谱项分裂成 $2J+1$ 个等间距能级。各能级的能量 E_M 由下式给出(Preston, 1898; Landé, 1920, 1923)：

$$\begin{aligned} E_M &= E_n \pm \frac{ehHgM}{4\pi mc} = E_n \pm hogM \\ &= E_n \pm {}^*9.274077\times 10^{-21} HgM \text{ 尔格,} \end{aligned} \tag{2-212}$$

式中 E_n 是没有磁场情况下的光谱项的能量，H 是磁场强度，其单位是高斯，o 是拉莫尔进动频率，M 是 J 在 H 方向的分量，LS 耦合的朗德 g 因子由下式给出(Uhlenbeck 和 Goudsmit, 1925, 1926)：

$$g = 1 + \frac{J(J+1)+S(S+1)-L(L+1)}{2J(J+1)}, \tag{2-213}$$

式中 J 是总角动量，S 是自旋角动量，L 是轨道角动量。

因为不同光谱项之间没有同样的谱线分裂，谱线数就只取决于高能级和低能级的 J、L 和 S。在不同光谱项的能级间容许跃迁的选择定则是 $\Delta M=0$(π 分量)和 $\Delta M=\pm 1$(σ 分量)。在垂直于磁场方向观测时将会看到平行于磁场的线偏振的 π 分量和垂直于磁场的线偏振的 σ 分量。在平行于磁场的方向观测时，只观测到两个 σ 分量，两者是具有相反旋向的圆偏振(频率较低的是右旋圆偏振)。

当考虑到原子核的磁矩时，相应的朗德 g 因子由下式给出(Back 和 Goudsmit, 1928)：

$$g(F) = g\frac{F(F+1)+J(J+1)-I(I+1)}{2F(F+1)}, \tag{2-214}$$

式中 g 是原子中电子的 g 因子，I 是原子核自旋量子数，J 是除了原子核自旋以外的总角动量，F 是总角动量量子数。

对分子来说，电子的朗德 g 因子由下式给出(Townes 和 Schawlow, 1955)：

$$g = \frac{(\Lambda+2.002\Sigma)\Omega}{J(J+1)} = \frac{(\Omega+1.002\Sigma)\Omega}{J(J+1)} \quad \text{(洪德耦合情况}(a)\text{)}; \tag{2-215}$$

$$\begin{aligned} g = \frac{1}{2J(J+1)}\Big\{ &\Lambda^2 \frac{[N(N+1)-S(S+1)+J(J+1)]}{N(N+1)} \\ &+ 2.002[J(J+1)+S(S+1)-N(N+1)]\Big\} \end{aligned}$$

$$\text{(洪德耦合情况}(b)\text{)}, \tag{2-216}$$

这里 Λ 是电子轨道角动量在分子轴上的投影，Σ 是电子自旋角动量在分子轴上的投影，Ω 是除了原子核自旋以外的总角动量在分子轴上的投影，N 是包括分子转动在内的总角动量。

表 30 89 颗具有强磁场恒星的亨利·德雷伯(Henry Draper)星表(HD)号数、目视星等(v 表示变星)、色指数(B-V)(其中 v 同样表示变星)、光谱型、磁场 H 的极值(+号表示磁场方向向着观测者)及光变周期(l=光度, s=光谱, v=视向速度, m=磁场, b=分光双星,偏心率(e)放在圆括号内)[1]

HD 星表号数	名 称	α(1950.0)			δ(1950.0)		V (星等)	$B-V$ (星等)	光谱型	H 极 值 (高 斯)		周 期 (日)
		h	m	s	°	′						
2453	BD+31°59	00	25	48	32	09	6.8	0.05v	A1pv	−710	−425	
4174	BD+39°167	00	41	54	40	24	7.5	—	M2epv	−1200	+1100	
8441	BD+42°293	01	21	24	42	53	6.6	0.02	A2p	−750	+400	b:106.3
9996	BD+44°341	01	35	30	45	09	6.3	0.13	A0p	−990	+135	
10221	43Cas	01	38	36	67	47	5.6	−0.06	A0p	−1200	—	
10783	BD+7°275	01	43	06	08	18	6.6v	−0.06	A2p	+2200	−1200d	4.^{d}16m, l, v
11187	BD+54°393	01	48	12	54	40	7.2	−0.08	A0p	+1250	−70d	
15144A	ADS1849A	02	23	36	−15	34	5.8v	0.15	A4p	−1080	−320	b:2.9978
18296	21Per	02	54	12	31	44	5.2v	0.00v	A0pv	+1350	−1270d	1.73, l, m?
19445	CC209	03	05	30	26	09	8.0	0.45	A8:p		+415d	
20210A	ADS2433A	03	12	54	34	30	6.4v	0.30v	A6:pm	−260	—	b:5.5435(0.04)
22374	9Tau	03	34	00	23	03	6.7	0.13	A1p	—	+140	
22649	B826	03	37	48	63	03	5.3	1.6	S5	+450	+0	
24712	BD−12°752	03	52	54	−12	15	5.9	—	A8	+1000	+570	
25267	36τ⁹Eri	03	57	48	−24	09	4.7	−0.13	A0pv	—	+400	b:5.954
25354	BD+37°866	03	59	54	37	55	7.9v	0.09v	A0pv	−380	0	3.900l
25823	41Tau	04	03	30	27	28	5.2v	−0.12	A0pv	+700	−530	11.9l, b?
27962A	68TauA	04	22	36	17	49	4.3	0.05	A2m	—	−400	
30466	BD+29°742	04	46	06	29	29	7.2v	0.05	A0p	+2320	—	
32633	BD+33°953	05	02	54	33	51	7.0v	−0.06	B9p	−5870	+2200	6.43l, m?
33254	16hOri	05	06	36	09	46	5.4	0.25	A2−F2m	−420	+375	
33904	5μLep	05	10	42	−16	16	3.3v	−0.10v	B9p	+325	−170	
42474	WYGem	06	08	54	23	14	7.9v	—	M3ep	+540	—	
42616	BD+41°1392	06	10	12	41	43	6.9v?	0.09	A2p	−840	0:d	
45677	MWC142	06	26	00	−13	01	7.5	—	B2epv	—	−1600:d	
49976	BD−7°1592	06	48	18	−07	59	6.2v	0.02	A0pv	−810	—	
50169	BD−1°1414	06	49	24	−01	35	8.9	—	A4pv	+2120	+670	

1 取自勒杜克斯等(Ledoux 和 Renson, 1966)的文章。

(续表)

HD 星表号数	名 称	α(1950.0) h	m	s	δ(1950.0) °	′	V (星等)	B−V (星等)	光谱型	H 极 值 (高 斯)		周 期 (日)
53791	RGem	07	04	18	22	47	6+v	—	Se	+400	+370d	370l
56495	BD−7°1851	07	14	30	−07	26	7.5	0.34	A3pmv	+500	—	
604145	B1985	07	31	30	−14	25	5.1	—	M2p+Be	—	−670	
65339A	53CamA	07	57	30	60	28	6.0v	0.15v	A3pv	−5410	+3760	8.026m, l, s
68351	15Cnc	08	10	06	29	48	5.6v	−0.07v	A0p	+强	0	
71866	BD+40°2066	08	27	54	40	24	6.7v	0.07v	A0pv	+2460	−2170d	6.798m, l, s
72968	3Hya	08	33	00	−07	48	5.6	−0.01	A2pmv	+740	+480d	
74521	49bCnc	08	42	00	10	16	5.6v	−0.09	A1p	+1450	−200	
77350	69νCnc	08	59	48	24	39	5.5v	−0.05	B9p	+470	+105	
78316	76κCnc	09	05	00	10	52	5.1	−0.10	B8p	−640	+460d	b:6.3932(0.14)
89822	B2754	10	20	36	65	49	4.9	−0.06	A0p	+340	−290	b:11.583(0.38)
90569A	45LeoA	10	25	00	10	01	5.9v	−0.06	A1pv	+400	—	2:s
98088A	ADS8115A	11	14	24	−06	52	6.1v	0.21	A9pv	−1188	+1000d	5.905v, s, m
107168	8Com	12	16	48	23	19	6.2	0.22	A6m	—	−150d	
108651	17ComB	12	26	12	26	11	6.7	—	A4m	—	中	
108662	17ComA	12	26	24	26	11	5.4v	−0.05	A0pv	−1150	+360	
110066	BC+36°2295	12	36	54	36	14	6.3v	0.06	A3p	+300	−55	
110073	1Cen	12	37	12	−39	43	4.8	−0.10v	B8p	—	+580	b?
110380	29γ¹Vir(N)	12	39	06	−01	10	3.7	0.35	F0	—	−390	
111133	BD+6°2660	12	44	30	06	13	6.4	−0.04	A2p	−1540	−990	
112413	12α²CVn	12	53	42	38	35	2.9v	−0.11	A0pv	+1600	−1400d	5.4694s, m, v, l
115708	BD+27°2234	13	16	12	26	38	8.2v	0.25	A2p	+740	0	
118022	78oVir	13	31	36	03	55	4.9	0.03	A2pv	−1680	−140	
—	BD+46°1913	13	53	48	45	59	9.8	−0.09	Am(p)v	−500(估)	—	
125248	B3669	14	15	54	−18	29	5.8v	0.00v	A1pv	+2500	−2080d	9.296s, m, v, l
126515	BD+1°2927	14	23	24	01	13	7.1	0.01	A2p	+1310	−780	
129174	29π¹Boo	14	38	24	16	38	4.9	−0.1?	B9pv	+190	−75d	(2.2445?)s
130559A	7μLibA	14	46	36	−13	56	5.6		A1p	−1300	−200	
133029A	ADS9477A	14	58	54	47	28	6.2	−0.13v	A0p	3270	1150d	

134793	BD+9°3006	15	09	06	08	43	8v	0.14	A3pv	−530	+450	(2:?m)
135297	BD+0°3322	15	11	48	00	33	8.0v	−0.01	A0p	−1110	—	
137909	3βCrP	15	25	48	29	17	3.7	0.27v	A9p	+1020	−960	18.50m+b:3834(0.4)
137949	33Lib(ξ²)	15	26	42	−17	16	7	0.38	F0p	+1120		
143807	14ιCrB	15	59	24	29	59	4.9v	−0.05v	A0p	−340	+75d	
152107A	52HerA	16	47	48	46	04	4.8	0.08	A3pv?	+1430	+840	
153286	BD+47°2407	16	54	42	47	27	6.9	—	A2−Fpm	−580	−370	
153882A	ADS10310A	16	59	18	15	01	6.2v	0.04	A3pv	+2710	−1330	6.008m, l, s, v
165474	ADS11056B	18	03	24	12	00	7.4	—	A6p	—	+900	
171586A	ADS11477A	18	33	06	04	54	6.6v	0.08	A2p	−740	—	
173650	BD+21°3550	18	43	30	21	56	6.4v	0.01v	A0pv	+700	−540	10.1l, s, m, v?
176232	10Aql	18	56	30	13	50	5.9	0.25	A4p	+440	−315	
179761A	21AqlA	19	11	12	02	12	5.1	−0.07	B8pv	−590	+170	
182989	RRLyr	19	23	54	42	41	7.8v	0.33	A3−F1v	−1580	+1170	0.567l, v, s
184552	51h¹Sgr	19	33	00	−24	50	5.7	—	A3−F5m		−230	b:8.1158(0.17)
184905	BD+43°3290	19	33	12	43	50	6.6v	−0.03	A0pv	−强		~1−2?s
187474	B5060	19	48	30	−40	01	5.4	−0.05v	A0pv	−2000	+1900	~2500?m, b
188041	B5074	19	50	42	−03	15	5.6	0.19v	A6pv	+1470	−230d	226m, s
190073	BD+5°4393	20	00	30	05	36	7.9	—	A0epv	+强	+130d	
191742	BD+42°3616	20	08	06	42	24	7.8	0.22v	A6p	−910	−175	
192678	BD+53°2368	20	12	18	53	30	7.1	−0.03	A3p	—	+2000	
192913	BD+27°3668	20	14	24	27	37	6.7	−0.07	A0p	−670	+380d	
196502	73Dra	20	32	12	74	47	5.2v	0.07	A2pv	−700	−200	20.26s, l, m
201601A	5γEquA	21	07	54	09	56	4.8v	0.27v	A9pv	+880	+180	
203006	θ¹Mic	21	17	36	−41	01	4.9	0.02v	A2pv	−650	—	
204075A	34ξCapA	21	23	48	−22	38	3.9v	—	G4p	—	−340	
207757	AGPeg	21	48	36	12	23	6.4−7.9v	—	Bep+M	−1800	+520	800:
208816	VVCep	21	55	12	63	23	4.9−5.7v	—	M2+B9p	+850	−360	b:7450(0.25)
215038	BD+74°980	22	38	18	75	24	8.0v	−0.03v	A0p	−3000	—	2.036l
215441	BD+54°2846	22	42	06	55	20	8.6v	0.03v	A0pv	11500	4100	9.48l
216533	BD+58°2497	22	50	36	58	33	7.9v	0.08v	A2pv	−700	+100d	
221507	βSci	23	30	18	−38	06	4.5	−0.11	B9p	—	+660d	
224801	BD+44°4538	23	58	12	44	58	6.3v	−0.08v	A0pv	+2300	—	3.74l, b?

塞曼分量的强度 在垂直于磁场方向观测时寻常塞曼分量(弱磁场)的相对强度 I 是:

当 $J \to J$ 跃迁

$$\begin{aligned} &\pi \text{ 分量} (\Delta M=0) && I=4AM^2, \\ &\sigma \text{ 分量} (\Delta M=\pm 1) && I=A[J(J+1)-M(M\pm 1)]。 \end{aligned} \tag{2-217}$$

当 $J \to J+1$ 跃迁

$$\begin{aligned} &\pi \text{ 分量} (\Delta M=0) && I=4B[(J+1)^2-M^2], \\ &\sigma \text{ 分量} (\Delta M=\pm 1) && I=B[J\pm M+1][J\pm M+2]。 \end{aligned} \tag{2-218}$$

这里 A 和 B 对给定的塞曼图样来说是常数。当从平行于磁场方向观测时,将会看到具有上述相对强度的 σ 分量。这些公式是由康登等(Condon 和 Shortley, 1963)导出的,而首先得到经验公式的是奥恩斯坦等(Ornstein 和 Burger, 1924),并由克朗尼格(Kronig, 1925)和亨尔(Hönl, 1925)导出理论公式。

强磁场的塞曼效应——帕邢-巴克效应,二次塞曼效应及热辐射的圆偏振 当磁场比几千高斯更强时,磁分裂就会比多重线分裂更重要,反常塞曼效应转变为正常塞曼效应。这种帕邢-巴克效应(Paschen 和 Back, 1912, 1913)就是 L 与 S 之间磁去耦合的结果。那些分裂能级的能量 E_M 的一级近似式为:

$$E_M = E_n + \frac{eh}{4\pi mc}(M_L + 2M_s)H, \tag{2-219}$$

式中 E_n 是没有磁场时光谱项的能量,$eh/(4\pi mc) = {}^*9.274077\times 10^{-21}$ 尔格·高斯$^{-1}$,量子数 M_L 和 M_S 分别取 $\pm L$ 之间与 $\pm S$ 之间的整数值,选择定则是 $\Delta M_L = 0$、± 1 和 $\Delta M_S = 0$。

若磁通量在引力坍缩过程中是守恒的,则可预期白矮星和中子星具有的磁场分别为 $\sim 10^6$ 和 10^{12} 高斯。对这些极强的磁场来说,可以预期二次塞曼效应与线性效应相对地占优势(Preston, 1970)。二次塞曼效应产生的谱线位移(即 $\Delta\lambda$)指向短波方向。对氢来说,位移由下式给出(van Vleck, 1932; Jenkins 和 Segrè, 1939):

$$\Delta\lambda = \frac{-e^2 a_0^2}{8mc^3 h}\lambda^2 n^4 (1+M^2) H^2 = {}^* -4.965462\times 10^{-23}\lambda^2 n^4 (1+M^2) H^2 \text{ 埃}, \tag{2-220}$$

这里 a_0 是第一玻尔轨道的半径,n 是主量子数,M 是磁量子数,H 是磁场强度,式中右端的数值近似是对 $\Delta\lambda$ 与 λ 以埃为单位(1 埃 $=10^{-8}$ 厘米)而言的。

遗憾的是对白矮星和中子星来说,所能观测到二次塞曼效应的光谱结构太少了。不过,从一个热源来的任何辐射都会显示一种圆偏振的漫射光谱分量。这可以这样理解,把热辐射当作来自一个谐振子集合的辐射的迭加,而这些谐振子是以它们的塞曼分裂频率 $\nu \pm eH/(4\pi mc)$ 发射出圆偏振辐射的。热辐射的总相对偏振度由下式给出(Kemp, 1970):

$$q(\nu) = \frac{I_+(\nu) - I_-(\nu)}{I_+(\nu) + I_-(\nu)} \approx \frac{-eH}{4\pi m\nu} = {}^*4.195932\times 10^{16}\frac{H}{\nu}, \tag{2-221}$$

式中 $I(\nu)$ 表示观测到的频率为 ν 的辐射强度,$+$ 与 $-$ 分别表示右旋与左旋圆偏振,H 是磁场沿视线方向的分量,$q(\nu)$ 对电子来说是右旋的。当频率 $\nu > \nu_p$(等离子体频率 $\nu_p = {}^*8.978658\times 10^3 N_e^{1/2}$ 赫),圆偏振百分比的减少比 ν^{-1} 更快。肯普等(Kemp 等, 1970; Angel 和 Landstreet, 1971)已探测到 DC 型[1]白矮星光辐射中的圆偏振。他们观测到 $q(\nu)$ 为百分之几,表明磁场强度为 10^6 至 10^7 高斯。表 35 给出了有名的白矮星的圆偏振测量值以及其他参数。

---

1 白矮星的类型可参阅 Luyten W. J. 编 White Dwarfs(白矮星), 1971 年版第 50 页。——译者注

氢原子的斯塔克效应 当一个氢原子受到强度为 E 的电场作用时，能级能量的改变 ΔE 为(Stark, 1913; Schwarzschild, 1916; Epstein, 1916, 1926; Bethe 和 Salpeter, 1957)：

$$\Delta E = AE + BE^2 + CE^3, \tag{2-222}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{3h^2}{8\pi^2 me} n(n_2 - n_1) \\ B &= \frac{-h^6 n^4}{2^{10}\pi^6 m^3 e^6}[17n^2 - 3(n_2 - n_1)^2 - 9m_l^2 + 19] \\ C &= \frac{3h^{10}}{2^{15}\pi^{10} m^5 e^{11}} n^7 (n_2 - n_1)[23n^2 - (n_2 - n_1)^2 + 11m_l^2 - 71] \end{aligned}\right\},$$

这里 n 是主量子数，m_l 是轨道量子数 l 在电场方向的分量，m_l 取 $-l$ 与 $+l$ 之间的整数，量子数 n_2 和 n_1 可假定是 0 与 $n-1$ 之间的整数值。A、B 和 C 的系数分别是 $^*1.270883\times 10^{-20}$ 尔格·厘米·伏$^{-1}$、$^*1.029060\times 10^{-31}$ 尔格·厘米^2·伏$^{-2}$ 和 $^*2.999705\times 10^{-41}$ 尔格·厘米^3·伏$^{-3}$。系数 C 中方括号内的因子 -71 是取自康登等(Condon 和 Shortley, 1963)的值，而贝蒂等(Bethe 和 Salpeter, 1957)给出此值为 $+39$。

作为一级近似，主量子数 n 的每一能级分裂成$(2n-1)$个等间距能级，每个能级的能量为：

$$\begin{aligned} E_s &= E_n + \frac{3h^2}{8\pi^2 me} n(n_2 - n_1) E \\ &= E_n + {}^*3.812649\times 10^{-18} n(n_2 - n_1) E \text{ 尔格}, \end{aligned} \tag{2-223}$$

式中 E 用静电单位(^{*1} 静电单位 $= {}^*3\times 10^2$ 伏·厘米$^{-1}$)，E_n 是没有电场时第 n 能级的能量，n_2 与 n_1 可假定为在 0 与 $n-1$ 之间的整数值。对于在高能级 m 与低能级 n 之间的跃迁来说，频率分裂成下式给出的各种频率 ν_{mn}：

$$\begin{aligned} \nu_{m,n} &= \nu_{mn} + \frac{3hE}{8\pi^2 m_e e}\{m(m_2 - m_1) - n(n_2 - n_1)\} \\ &= \nu_{mn} + {}^*1.917974\times 10^6 E\{m(m_2 - m_1) - n(n_2 - n_1)\} \text{ 赫}, \end{aligned} \tag{2-224}$$

式中场强 E 的单位是伏·厘米$^{-1}$，n_2 及 n_1 可假定为 0 与 $n-1$ 之间的整数值，m_2 及 m_1 可假定为 0 与 $m-1$ 之间的整数值。与 $\nu_{m,n}-\nu_{mn}$ 相对应的波长的改变 $\Delta\lambda$ 为：

$$\Delta\lambda = {}^*0.6397671\times 10^{-4}\lambda^2 E\{m(m_2 - m_1) - n(n_2 - n_1)\} \text{ 厘米}, \tag{2-225}$$

式中 λ 的单位是厘米，E 的单位是伏·厘米$^{-1}$。

若我们定义新的量子数 $|kn| = n-1-n_1-n_2$ 与 $|km| = m-1-m_1-m_2$，则当沿垂直方向观测时，如果 $kn=km$，辐射(π)是平行于电场方向的偏振，而如果 $km-kn=\pm 1$，辐射(σ)是垂直于电场方向的偏振。

当考虑天体物理学中的等离子体时，电场是不均匀的而且并不是不变的；我们涉及的是任何一个运动带电粒子的电场的几率分布。对于缓慢地运动的离子来说，净效应是使谱线致宽并使谱线向高频端移动(参看第 2.20 节)。

多普勒频移 当相对于静止的观测者以速度 v 行进的一个天体发出频率为 ν_L 的谱线辐射时，观测者观测到的频率 $\nu_{观}$ 是(Doppler, 1842; Lorentz, 1904; Einstein, 1905)：

$$\begin{aligned} \nu_{观} &= \nu_L\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right)^{-1}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} \\ &\approx \nu_L\left(1 - \frac{v_r}{c}\right) \quad \text{当 } v \ll c \text{ 及 } \theta \ll \pi/2, \end{aligned} \tag{2-226}$$

式中 θ 是速度矢量与辐射波矢量之间的夹角。当辐射天体远离观测者运动时，视向速度 $v_r=-v\cos\theta$ 为正值。因而，当在光学频段观测后退天体时，谱线向红端(向长波段)位移。红移 z 定义为：

$$z=\frac{\lambda_{观}-\lambda_L}{\lambda_L}=\frac{\nu_L-\nu_{观}}{\nu_{观}}\approx\frac{v_r}{c}, \tag{2-227}$$

式中 $\lambda_{观}$ 和 λ_L 分别表示谱线辐射的观测波长及发射波长，$\nu_{观}$ 及 ν_L 分别表示谱线辐射的观测到的频率及发射频率，v_r 是视向速度。当速度很大时，狭义相对论的多普勒效应由下式表达：

$$1+z=\left[\frac{c+v_r}{c-v_r}\right]^{1/2} \tag{2-228}$$

以及

$$\frac{v_r}{c}=\frac{(z+1)^2-1}{(z+1)^2+1}。 \tag{2-229}$$

对所测得的速度常常要作地球绕太阳轨道运动的改正，以及太阳相对于本星群的运动的改正。在第五章里将讨论这种相等于本地静止标准速度的改正。艾布特等(Abt 和 Biggs, 1972; Boyarchuk 和 Kopylov, 1964)给出了恒星视向速度的表与文献目录。赫马森等(Humason, Mayall 和 Sandage, 1956; Mayall 和 de Vaucouleurs, 1962)以及在德·伏古勒等(de Vaucouleurs 和 de Vaucouleurs, 1964)的书中给出了光学星系的实测红移。福特等(Ford, Rubin 和 Roberts, 1971)给出了正常星系的红移的射电值与光学值的比较。表 31 给出了所观测到的射电星系和类星体的红移值。

引力红移　一个质量为 m、速度为 v 的粒子在质量为 M、半径为 R 的物体表面上的能量 E 为：

$$E=\frac{mv^2}{2}-\frac{GMm}{R}, \tag{2-230}$$

因而逃逸速度(即 $E=0$ 时)为：

$$v_{逃}=\left(\frac{2GM}{R}\right)^{1/2}。 \tag{2-231}$$

对一个光子来说，$v_{逃}=c$，光子逃逸时的史瓦西极限半径 R_g 为：

$$R_g=\frac{2GM}{c^2}。 \tag{2-232}$$

当能量为 $h\nu=mc^2$ 的光子离开大质量天体的表面时，它的能量损失为：

$$\varDelta E=h\varDelta\nu=\frac{GMm}{R}=\frac{GMh\nu}{Rc^2}, \tag{2-233}$$

因而引力红移由下式给出：

$$z_{引力}=\frac{\varDelta\nu}{\nu}=\frac{GM}{Rc^2}=\frac{Rg}{2R}={}^*1.4748\times10^5\ \frac{M}{M_\odot R}, \tag{2-234}$$

式中太阳质量 $M_\odot={}^*1.9891\times10^{33}$ 克，更确切的表达式(Einstein, 1911, 1916)为：

$$z_{引力}=\frac{\nu_L-\nu_{观}}{\nu_{观}}=\left(1-\frac{2GM}{Rc^2}\right)^{-1/2}-1。 \tag{2-235}$$

对太阳来说，$z_{引力}={}^*2.1190\times10^{-6}$，这应是由后退速度约 0.64 公里·秒$^{-1}$ 所引起的多普勒效应所产生的值，因此是很难测量的。然而，这种测量已有过报导(Blamont 和 Roddier, 1961)。作为双星成员的白矮星提供具有大的引力红移的谱线，而这种谱线可以与不太密的伴星的未红化谱线作比较。白矮星光谱测量表明天狼 B 星的引力红移相当于 19 公里·秒$^{-1}$

表 31 383 个射电星系及类星体的方位、目视星等 V、红移 z、频率为 1400 兆赫的流量密度 S_{1400}、频谱指数 α 及最大的角大小 θ [1]

天体[2]		α(1950.0)			δ(1950.0)			V	z	S_{1400}	α	θ
		h	m	s	°	′	″	(星等)		(央)		(角秒)
PHL	658	00	03	25.4	15	53	07	16.40	0.450	2.6	−0.6	14
3C	2	00	03	48.82	−00	21	06.5	19.35	1.037	3.83	−0.8	<6
3C	9	00	17	49.944	15	24	16.21	18.21	2.012	2.19	−1.05	9.6
PKS	0023−33 [2]	00	23	04.0	−33	20	06.0	16.7	0.0497	1.3	−0.9	360
WK	10 [2]	00	28	30.4	39	25	20	18.0	0.0728	0.1	—	—
4C	42.01	00	32	23.0	42	21	48	18.30	1.588[3]	—	—	<3
3C	15.0 [2]	00	34	30.58	−01	25	32	15.34	0.0733	4.1	−0.65	52
3C	17.0 [2]	00	35	47.13	−02	24	15	18.02	0.2201	6.0	−0.60	18
4C	03.01 [2]	00	36	42.8	03	04	54	14.3	0.0145	1.5	−0.70	—
5C	03.100 [2]	00	39	10.0	04	05	06	16.0	0.0718	(0.02)	—	—
5C	03.175 [2]	00	44	48.7	39	48	02	16.0	0.1343	(0.01)	—	—
PKS	0045−25 [2]	00	45	04.9	−25	33	33	7.0	0.00086	6.3	−0.90	420
3C	26.0 [2]	00	51	35.67	−03	50	13.5	17.94	0.2106	2.0	−1.01	<15
3C	28.0 [2]	00	53	08.70	26	08	21.4	17.54	0.1959	1.8	−1.20	29
3C	29.0 [2]	00	55	01.0	−01	39	35	14.07	0.0450	4.6	−0.59	—
PHL	923	00	56	31.79	−00	09	18.4	17.33	0.717	2.6	−0.40	<7
PHL	938	00	58	12.0	01	56	00	17.16	1.930[3]			
PHL	957	01	00	36.0	13	00	00	16.60	2.720[3]			
3C	31.0 [2]	01	04	42.6	32	08	26	12.14	0.0169	5.0	−0.79	150
PKS	0106+01	01	06	04.48	01	19	01.45	18.39	2.107	1.4	−0.70	<7
3C	33.0 [2]	01	06	13.4	13	03	28	15.19	0.0600	13.2	−0.71	228
PKS	0108−14.2 [2]	01	08	37.0	−14	13	54	15.8	0.0518	1.2	−0.9	42
3C	35.0 [2]	01	09	05.04	49	12	48.9	15.0	0.0677	2.1	−0.95	558
PKS	0115+02	01	15	43.74	02	42	20.5	17.50	0.672	1.5	−0.94	9
OC	328 [2]	01	16	47.27	31	55	06.4	14.5	0.0590	3.0	−0.40	<2
PKS	0119−04	01	19	55.9	−04	37	07	16.88	1.955[3]	1.3	−0.40	<7
PKS	0122−00	01	22	55.20	−00	21	30.7	16.70	1.070	1.5	−0.10	<6
4C	25.05	01	23	56.0	25	43	56.0	17.50	2.360[3]	0.7	−0.63	<6
3C	40.0 [2]	01	23	27.8	−01	38	29.0	12.28	0.0177	4.4	−1.13	312
4C	18.06 [2]	01	24	12.30	18	57	46.0	15.5	0.0437	1.4	−0.30	—
PHL	3375	01	28	24.0	07	28	00	18.02	0.390			
PHL	1027	01	30	30.0	03	22	00	17.04	0.363			
PHL	3424	01	31	12.0	05	32	00	18.25	1.847			
PKS	0131−36 [2]	01	31	42	−36	44	36	14.2	0.030	5.6	—	—
3C	47	01	33	40.3	20	42	16	18.10	0.425	3.8	−0.99	60
3C	48	01	34	49.836	32	54	20.26	16.20	0.367	15.63	−0.8	<5
PHL	1078	01	35	29.0	−05	42	06	18.25	0.308	—	—	—
PHL	1093	01	37	22.7	01	16	18	17.07	0.258	1.4	−0.41	11
PHL	3632	01	39	54.0	06	10	00	18.15	1.479			

[1] 取自伯比奇等(Burbidge 和 Burbidge, 1969; Burbidge, 1970; Burbidge 和 Burbidge, 1972; Burbidge 和 Strittmatter, 1972; Cohen 和 Shaffer, 1971; Ekers, 1969; Fomalont 和 Moffet, 1971; Miley, 1971; Moffet, 1974; Peterson 和 Bolton, 1972; Wyndham, 1966; 以及 de Veny, Osborn 和 Janes, 1971)的文章。

[2] 天体名称后面角标 2 表示是射电星系。致密源的位置是射电位置，同时位置通常精确到所引用数据最后一位小数的 10 倍。角大小是观测到的最大的角大小。在剑桥第四射电源表(4C 射电源表)中附加的 51 个射电星系的红移值是萨金特(Sargent, 1973)的文章中给出的。

[3] 红移值标以角标 3 者表示在光谱中有一条或多条特征吸收线。

(续表)

天　体[2]	α(1950.0) h	m	s	δ(1950.0) °	′	″	V (星等)	z	S_{1400} (央)	α	θ (角秒)
4C 33.03	01	41	18.0	33	57	00	17.50	1.455			
PHL 1127	01	41	30.0	05	14	00	18.29	1.990[3]			
PHL 1186	01	47	36.0	09	01	00	18.60	0.270			
PHL 1194	01	48	42.0	09	02	00	17.50	0.298[3]			
PHL 1222	01	51	12.0	04	48	00	17.63	1.910[3]			
PHL 1226	01	51	48.0	04	34	00	18.20	0.404			
PKS 0153+05[2]	01	53	46.0	05	23	00	13.2	0.0188	0.9	−0.60	113
PKS 0155−10	01	55	13.10	−10	58	16.6	17.09	0.616	1.9	−0.70	<6
3C 57	01	59	30.32	−11	46	58.4	16.40	0.680	3.2	−0.59	<3
DW 0202+31	02	02	09.69	31	57	11.3	18.00	1.466	1.0	—	<10
PKS 0202−17	02	02	34.47	−17	15	39.5	18.00	1.740	1.2	0.1	—
PKS 0203+05[2]	02	03	22	05	12	24	17.0	0.1300	0.5	−0.6	—
4C 35.03[2]	02	06	39.40	35	33	41.0	14.5	0.0374	2.2	−0.8	—
3C 61.1[2]	02	10	46.10	86	04	51.5	19.0	0.18	6.3	−1.00	180
PKS 0214+10	02	14	26.9	10	50	24	17.00	0.408	1.2	−0.6	58
3C 66.0[2]	02	20	02.4	42	46	27	12.9	0.0215	9.7	−0.74	498
PKS 0225−014	02	25	35.0	−01	29	12	18.00	0.685			
PHL 1305	02	26	21.0	−03	54	00	16.96	2.064	—	—	<7
PKS 0229+13	02	29	02.52	13	09	40.7	17.71	2.065[3]	1.2	0.20	<6
PKS 0231+022	02	31	14.6	02	16	18	18.00	0.322			
PHL 1377	02	32	36.6	−04	15	05	16.46	1.434[3]	1.5	−0.80	10.2
PKS 0237−23	02	37	52.62	−23	22	06.0	16.63	2.224[3]	7.2	−0.50	0.002
4C 08.11[2]	02	38	26.4	08	31	57	14.8	0.0216	1.2	—	—
3C 71.0[2]	02	40	07.09	−00	13	30.7	8.91	0.0034[illegible]	4.9	−0.69	9
3C 75.0[2]	02	55	04.9	05	50	41.0	13.62	0.0241	5.8	−0.68	168
PKS 0256−005	02	56	54.4	−00	31	54.0	17.5	1.998			
4C 34.09[2]	02	58	35.6	35	00	13	14.0	0.0203	2.0	−0.44	—
3C 76.1[2]	03	00	27.4	16	14	31	14.86	0.0326	3.0	−0.87	45
3C 78.0[2]	03	05	49.11	03	55	13.8	12.84	0.0289	7.1	−0.53	80
3C 79.0[2]	03	07	10.6	16	54	42	19.0	0.2561	4.9	−1.02	60
4C 39.11[2]	03	09	13.1	39	05	06	14.0	0.0163	2.1	—	—
3C 83.1[2]	03	14	56.8	41	43	46	12.5	0.0181	8.4	−0.64	396
3C 84.0[2]	03	16	29.568	41	19	51.84	11.87	0.0176	13.5	−0.77	300
FornaxA[2]	03	20	42.0	−37	25	00	8.90	0.00577	108.0	−0.35	1740
3C 88.0[2]	03	25	18.9	02	23	22	13.95	0.0302	4.4	−0.66	150
4C 39.12[2]	03	31	01.3	39	10	12	15.0	0.0209	0.5	—	—
NRAO140	03	33	22.38	32	08	36.8	17.50	1.258	4.0	−0.05	<2
PKS 0336−35[2]	03	36	48.1	−35	33	03.0	10.9	0.0043	(2.0)	−0.8	330
CTA 26	03	36	58.97	−01	56	16.7		0.852	1.5	−0.10	<6
PKS 0349−14	03	49	09.5	−14	38	07	16.22	0.614	2.8	−1.09	117
PKS 0349−27[2]	03	49	32.6	−27	53	05	16.8	0.066	5.2	−0.80	252
4C 21.13[2]	03	49	45.1	21	17	32	16.0	0.1325	0.8	—	—
3C 94.0	03	50	05.41	−07	19	57.2	16.49	0.962	2.9	−0.98	6
3C 98.0[2]	03	56	10.4	10	17	34	14.45	0.0306	10.0	−0.87	192
PKS 0403−13	04	03	13.98	−13	16	17.95	17.17	0.571	4.0	−0.10	<6
PKS 0405−12	04	05	27.42	−12	19	30.3	17.07	0.574	3.3	−0.80	17.2
3C 109.0[2]	04	10	55.08	11	04	46	17.0	0.3056	4.1	−0.84	81

（续表）

天　　体[2]	α(1950.0)			δ(1950.0)			V	z	S_{1400}	α	θ
	h	m	s	°	′	″	(星等)		(央)		(角秒)
PKS 0424−13	04	24	48.0	−13	09	36	17.50	2.165[3]	1.5	−0.43	384
PKS 0427−53[2]	04	27	53.5	−53	56	06	13.2	0.0392	4.4	−0.7	—
3C 120.0[2]	04	30	31.605	05	15	00.19	15.0	0.0333	4.1	0.03	<3
PKS 0431−13.5[2]	04	31	49.30	−13	28	58.0	16.3	0.0360	(0.7)	−1.07	414
PKS 0449−17[2]	04	49	08.0	−17	35	12.0	13.7	0.0313	0.8	−0.7	—
PKS 0453−20[2]	04	53	14.16	−20	39	00.9	14.0	0.0354	3.7	−0.60	<15
PKS 0454+039	04	54	08.4	03	56	06	16.5	1.345			
3C 135.0[2]	05	11	31.7	00	53	04.0	17.00	0.1270	2.0	−0.53	222
3C 138.0	05	18	16.508	16	35	27.03	18.84	0.759	9.64	−0.37	0.4
PICT.A[2]	05	18	18.18	−45	49	39	15.7	0.0342	52.1	−0.80	420
PKS 0521−36[2]	05	21	13.21	−36	30	19	16.8	0.061	14.7	−0.70	14
3C 147.0	05	38	43.464	49	49	43.22	17.80	0.545	22.24	−0.66	1
3C 153.0[2]	06	05	44.384	48	04	49.23	18.5	0.2771	4.15	−0.71	6
PKS 0618−37[2]	06	18	18.0	−37	10	10	16.6	0.0326	2.4	−0.6	—
PKS 0620−52[2]	06	20	37.3	−52	40	01.0	15.5	0.0502	2.7	−0.7	—
PKS 0634−20[2]	06	34	23.1	−20	39	18	16.8	0.056	7.0	−0.90	270
3C 171.0[2]	06	51	11.05	54	12	50.4	18.8	0.2387	3.89	−0.75	<9
4C 23.18[2]	06	58	27.1	23	17	45	15.7	0.0905	1.2	—	—
3C 175.0	07	10	15.60	11	51	20.5	16.6	0.768	2.61	−0.96	45
OI 318	07	11	05.62	35	39	52.6		1.620	1.8	−0.70	<2
PKS 0718−34[2]	07	18	57.2	−34	01	09	16.5	0.0297	1.7	1.7	144
3C 178.0[2]	07	22	31.07	−09	34	03	13.0	0.0073	1.4	−0.97	—
3C 181.0	07	25	20.35	14	43	46.3	18.92	1.382	2.37	−0.81	6
3C 184.1(Q)	07	29	22.0	81	52	36	17.50	1.022			
3C 184.1(G)[2]	07	34	28.2	80	33	32	17.0	0.1187	3.3	−0.71	168
PKS 0736+01	07	36	42.56	01	44	00.4	17.47	0.191	2.47	−0.40	<6
OI 363	07	38	00.19	31	19	02.2		0.63	2.2	0.10	<2
3C 186.0	07	40	56.742	38	00	31.08	17.60	1.063	1.32	−1.19	<5
4C 56.16[2]	07	45	45.2	56	02	03.1	16.0	0.0356	3.0	−0.90	—
4C 37.21[2]	07	56	26.88	37	45	40.0	14.9	0.0433	1.5	−1.13	228
3C 191.0	08	02	03.76	10	23	57.6	18.40	1.952[3]	1.7	−1.09	<3
3C 192.0[2]	08	02	35.51	24	18	28.2	15.46	0.0596	4.8	−0.82	210
4C 05.34	08	05	20.0	04	41	24	18.00	2.877			
3C 196.0	08	09	59.386	48	22	07.71	17.79	0.871	14.23	−0.83	5.2
PKS 0812+02	08	12	47.20	02	04	13.4	18.50	0.402[3]	1.95	−0.90	39
3C 197.1[2]	08	18	01.11	47	12	11.0	16.5	0.1302	0.3	−0.80	12
3C 198.0[2]	08	19	50.77	06	06	35.0	16.78	0.0809	2.1	−0.93	168
4C 37.24	08	27	55.09	37	52	16.9	18.11	0.914	2.45	−0.60	<6
3C 204.0	08	33	18.025	65	24	04.44	18.21	1.112	1.3	−0.95	31.4
3C 205.0	08	35	09.942	58	04	51.76	17.62	1.534[3]	2.43	−0.81	15.8
4C 19.31	08	36	15.0	19	33	00	17.60	1.691	—	—	13.0
4C 24.18[2]	08	37	02.3	24	14	36.0	17.0	0.0423	0.8	—	—
PKS 0837−12	08	37	28.0	−12	03	54	15.76	0.200	1.7	−1.06	150.0
3C 207	08	38	01.84	13	23	06.1	18.15	0.684	2.59	−0.69	7
PKS 0843−33[2]	08	43	08.7	−33	36	21	12.5	0.00732	1.6	−0.6	—
4C 54.17[2]	08	44	11.6	54	04	36.0	15.0	0.0449	(2.0)	—	—
LB 8707	08	46	01.0	14	32	00	18.10				

(续表)

天体[2]		α(1950.0)			δ(1950.0)			V	z	S_{1400}	α	θ
		h	m	s	°	′	″	(星等)		(央)		(角秒)
LB	8755	08	48	05.0	15	33	30	17.70	2.010			
3C	208.0	08	50	22.98	14	04	18.9	17.42	1.110	2.26	−1.23	10.5
4C	17.46	08	56	03.0	17	03	12	17.40	1.449	—	—	10.0
PKS	0859−14	08	59	55.0	−14	03	37	17.80	1.327	3.1	−0.40	<7
3C	215.0	09	03	44.23	16	58	17.3	18.27	0.411	1.66	−0.86	25
3C	218.0[2] 长蛇座 A	09	15	41.27	−11	53	05.0	14.8	0.065	36.3	−0.96	16
3C	219.0[2]	09	17	50.48	45	51	48.0	17.22	0.1745	7.2	−0.91	138
PKS	0922+14	09	22	22.3	14	57	26	17.96	0.896	0.7	−1.00	40
PKS	0922+005	09	22	35.7	00	32	06	18.07	1.720	—	—	<7
4C	39.25	09	23	55.33	39	15	23.5	17.86	0.698	1.1	−0.34	<4
PKS	0932+02	09	32	42.99	02	16	06	17.39	0.659[3]	0.7	−0.20	40
3C	223.0[2]	09	36	50.49	36	08	05	17.06	0.1367	3.1	−0.95	300
3C	223.1[2]	09	38	18.0	39	58	20.0	16.36	0.1075	1.9	−0.62	71
3C	227.0[2]	09	45	08.48	07	39	19.0	17.0	0.0855	7.3	−0.85	180
3C	231.0[2]	09	51	43.0	69	54	58.9	8.39	0.00107	8.1	−0.34	35
AO	0952+17	09	52	11.84	17	57	44.45	17.23	1.472	—	—	<6
3C	232.0	09	55	25.435	32	38	23.2	15.78	0.530	1.5	−0.57	<3
PKS	0957+00	09	57	43.8	00	19	50.0	17.57	0.907	1.0	−0.90	34
3C	234.0[2]	09	58	56.8	29	01	41.0	17.5	0.1846	5.3	−1.20	76
3C	236.0[2]	10	03	05.40	35	08	48.1	15.97	0.0988	4.3	—	360
PKS	1004+13	10	04	43.99	13	03	28.0	15.15	0.240	1.2	−0.60	28
TON	490	10	11	06.0	25	06	00	15.40	1.631			
4C	48.28	10	12	49.0	48	55	12	19.00	0.385	—	—	110
3C	245.0	10	40	06.00	12	19	15.1	17.29	1.029	3.17	−0.75	3.5
4C	14.37[2]	10	44	00.0	14	01	00.0	11.6	0.0092	0.4	—	—
PKS	1049−09	10	48	59.5	−09	02	12	16.79	0.344	2.2	−0.84	81
5C	02.10	10	49	41.0	48	55	54	18.00	0.478			
5C	02.56	10	55	18.0	49	55	36	20.00	2.380	0.6	—	—
PKS	1055+20	10	55	36.9	20	08	18	17.07	1.110	2.2	−0.60	21
3C	249.1	11	00	27.316	77	15	08.62	15.72	0.311	2.36	−0.71	19
QS	1108+285	11	08	26.5	28	57	56	20.00	2.192			
3C	254	11	11	53.11	40	53	41.1	17.98	0.734	3.14	−0.91	13.5
4C	29.41[2]	11	13	53.7	29	31	44	14.0	0.0481	2.0	—	—
PKS	1116+12	11	16	20.755	12	51	06.5	19.25	2.118[3]	2.42	−0.6	<6
3C	255.0[2]	11	16	52.61	−02	46	44	15.5	0.0238	1.6	−1.35	<5
PKS	1123−35[2]	11	23	28.99	−35	06	42.0	16.0	0.0336	2.1	−0.80	102
4C	25.35[2]	11	25	30.0	25	56	00	12.9	0.0088	1.0	—	—
PKS	1127−14	11	27	35.61	−14	32	54.0	16.90	1.187	6.2	0.10	<0.025
4C	−03.43[2]	11	30	30.8	−03	44	32	15.5	0.0482	(1.0)	—	—
4C	21.32[2]	11	31	23.99	21	23	00.0	16.0	0.066	0.7	−1.36	
3C	261	11	32	16.49	30	22	02.0	18.24	0.614	1.7	−0.56	10.8
PKS	1136−13	11	36	38.37	−13	34	09.3	17.80	0.554	4.5	−0.80	23
3C	263	11	37	09.296	66	04	27.04	16.32	0.652[3]	3.1	−0.81	47
4C	17.52[2]	11	37	40.4	17	59	48	13.3	0.0105	1.5	—	—
3C	264.0[2]	11	42	29.59	19	53	16.0	12.74	0.0206	5.1	−0.78	180
PKS	1148−00	11	48	10.17	−00	07	13.05	17.60	1.982	2.9	−0.20	0.0019
4C	49.22	11	50	48.00	49	47	48.0	16.10	0.334[3]	1.4	−0.70	7

（续表）

天　体[2]	α(1950.0) h	m	s	δ(1950.0) °	′	″	V（星等）	z	S_{1400}（央）	α	θ（角秒）
4C 31.38	11	53	44.08	31	44	46.85	18.96	1.557	3.3	−0.40	<3
4C 29.45	11	56	58.18	29	33	24.0	15.60	0.729	2.0	−0.70	<7
3C 268.4	12	06	41.98	43	55	59.9	18.42	1.400	2.3	−0.73	9.4
MSH12+04A[2]	12	15	01.20	03	54	57.0	17.0	0.0756	2.0	−0.80	270
MSH12+04B,C[2]	12	15	01.20	03	54	57.0	17.0	0.0771	2.0	−0.80	270
3C 270.0[2]	12	16	50.07	06	06	09.0	10.40	0.00697	15.3	−0.60	282
PKS 1217+02	12	17	38.33	02	20	20.9	16.53	0.240	0.8	−0.90	150
3C 270.1	12	18	03.90	33	59	48.2	18.61	1.519[3]	2.64	−1.09	7.5
4C 21.35	12	22	23.48	21	40	00	17.50	0.435	1.5	−0.73	10
3C 272.1[2]	12	22	31.48	13	09	46.0	9.36	0.00293	6.1	−0.63	90
TON 1530	12	23	12.0	22	51	00	17.00	2.051[3]			
4C 25.40	12	23	12.0	25	14	30	16.00	0.268			
3C 273.0	12	26	33.246	02	19	43.38	12.80	0.158	46.4	−0.24	20
3C 274.0[2] 室女座 A	12	28	17.565	12	40	01.66	8.74	0.0041	197.0	−0.82	282
PKS 1229−02	12	29	25.88	−02	07	31.0	16.75	0.388[3]	1.7	−0.60	<8
TON 1542	12	29	48.0	20	25	00	15.30	0.064			
PKS 1233−24	12	32	59.40	−24	55	46.0	17.20	0.355	2.3	−0.90	—
3C 275.1	12	41	27.56	16	39	18.0	19.00	0.557	2.94	−0.86	13.2
B 19	12	45	02.7	34	31	29	17.94	2.065			
PKS 1245−41[2]	12	46	03.86	−41	02	08.0	12.0	0.0086	3.2	−0.90	36
BSO 1	12	46	29.0	37	46	25	16.98	1.241[3]			
B 46	12	46	29.2	34	40	49	17.83	0.271			
BSO 2	12	48	17.7	33	47	04	18.64	0.186			
B 86	12	49	40.6	33	54	42	17.58	1.431			
PKS 1250−10[2]	12	50	15.0	−10	12	18.0	12.0	0.0138	0.9	−1.2	—
3C 277.1	12	50	15.278	56	50	36.72	17.93	0.320	2.51	−0.57	<4
3C 277.3[2] Coma A	12	51	46.10	27	53	45.0	15.94	0.0857	3.1	−0.54	34
3C 278.0[2]	12	52	00.08	−12	17	07.0	11.46	0.014	6.6	−0.73	103
PKS 1252+11	12	52	07.78	11	57	20.8	16.64	0.870	1.2	−0.10	<4
B 114	12	52	57.7	35	55	26	17.92	0.221			
3C 279	12	53	35.825	−05	31	07.65	17.75	0.536	11.2	−0.35	<1
B 142	12	54	55.0	37	03	29	17.84	0.280			
5C 04.51[2]	12	54	58.8	27	46	02.0	14.2	0.0249	(0.08)	—	—
B 154	12	55	02.1	35	21	21	18.56	0.183			
B 185	12	55	40.2	37	15	19	18.12	1.530			
B 194	12	56	07.8	35	44	56	17.96	1.864[3]			
B 189	12	56	51.1	36	48	10	19.22	2.075			
5C 04.81[2]	12	56	56.7	28	10	50	13.9	0.0224	0.37	—	—
5C 04.85[2]	12	57	10.72	28	13	48.2	12.4	0.0239	0.18	—	—
B 201	12	57	26.6	34	39	34	16.79	1.375			
3C 280.1	12	58	14.2	40	25	15	13.44	1.659	—	—	19.0
B 246	12	58	31.0	34	04	48	18.18	0.690			
B 196	12	58	42.0	35	38	48	18.28	0.323			
B 471	12	58	49.0	34	22	42	17.66	0.774			
B 228	12	59	21.4	36	46	22	17.83	1.194			
BSO 6	12	59	30.5	34	27	15	17.87	1.956			
B 264	12	59	30.9	32	21	58	16.89	0.095			

(续表)

天体[2]		α(1950.0)			δ(1950.0)			V	z	S_{1400}	α	
		h	m	s	°	′	″	(星等)		(央)		(角秒)
B	234	13	00	43.2	36	07	48	17.52	0.060			
B	272	13	01	35.0	37	30	48	17.25	0.036			
B	286	13	01	43.0	35	49	32	18.65	0.330			
PKS	1302−49[2]	13	02	33.1	−49	12	00	9.0	0.00184	5.8	−0.4	—
B	288	13	02	18.0	35	45	22	18.39	1.293			
B	340	13	04	47.1	34	40	39	16.97	0.184			
B	312	13	04	53.1	37	29	33	19.08	0.450			
3C	281.9	13	05	22.5	06	58	16	17.02	0.599	1.2	−0.81	40.1
B	330	13	05	26.0	36	25	54	18.01	0.920			
B	337	13	05	30.2	35	17	50	17.62	0.300			
B	382	13	06	53.0	35	01	32	17.55	0.194			
B	360	13	08	17.6	38	14	17	17.56	2.090			
3C	284.0[2]	13	08	41.39	27	44	03.1	18.0	0.2294	2.0	−0.75	162
BSO	8	13	09	15.0	34	03	08	17.43	1.750			
BSO	11	13	11	22.1	36	16	30	18.41	2.084[3]			
PKS	1317−00	13	17	04.5	−00	34	21	17.32	[illegible]	1.8	−0.70	<6
TON	153	13	17	24.0	27	45	00	15.30				
TON	156	13	18	54.0	29	06	00	16.00				
3C	285.0[2]	13	19	05.70	42	50	48.0	15.99	0.0797	2.3	−0.53	132
TON	157	13	21	00.0	29	27	00	16.00	0.960			
CENTA[2]		13	22	31.59	−42	45	24.0	6.98	0.00157	912.0	−0.60	—
4C	31.42[2]	13	26	07.97	31	01	00.0	15.5	0.0241	0.7	−0.31	—
PKS	1327−21	13	27	23.2	−21	26	34	16.74	0.528	2.0	−0.70	16
3C	287.0	13	28	15.925	25	24	37.7	17.67	1.055	7.31	−0.52	0.06
3C	286.0	13	28	49.67	30	45	58.35	17.25	0.846	15.4	−0.38	0,05
3C	287.1[2]	13	30	20.99	02	16	12.0	19.0	0.2156	2.7	−0.45	63
RS	12	13	31	11.0	28	08	24	18.61				
RS	13	13	31	30.0	27	45	48	17.94	1.287			
4C	55.27	13	32	17.0	55	15	48	16.00	0.249	—	—	78
PKS	1333−33[2]	13	33	44	−33	43	00	11.9	0.0122	(3.0)	—	—
RS	23	13	33	55.0	28	40	18	18.74	1.908[3]			
PKS	1334−29[2]	13	34	09.5	−29	36	25	8.0	0.00112	2.1	−0.8	420
PKS	1335+023	13	35	07.3	02	22	06	18.00	0.610			
MSH	13−011	13	35	31.3	−06	11	57	17.68	0.625	3.2	−0.80	7.8
RS	32	13	36	03.0	26	29	06	18.91	0.341			
PKS	1340+05[2]	13	40	12.42	05	19	38.8	18.0	0.1333	1.8	−0.60	—
3C	288.1	13	40	29.911	60	36	48.51	18.12	0.961	1.5	1.08	6.4
PKS	1345+12[2]	13	45	06.17	12	32	20.1	17.0	0.1218	4.9	−0.50	<18
3C	293.0[2]	13	50	03.23	31	41	32.6	14.32	0.0454	4.5	−0.75	130
PKS	1354+19	13	54	42.14	19	33	42.9	16.02	0.720	2.28	−0.70	13
PKS	1358−11[2]	13	58	58.37	−11	22	00.0	15.0	0.025	2.1	−0.70	300
PKS	1400−33[2]	14	00	58	−33	48	00	12.4	0.0143	(2.0)	—	—
OQ	208[2]	14	04	45.63	28	41	29.4	14.0	0.0768	(1.0)	—	—
4C	−01.32[2]	14	07	23.9	−01	01	12	14.8	0.0249	(0.4)	—	—
3C	295.0[2]	14	09	33.50	52	26	13.0	20.11	0.4614	23.1	−0.75	4
3C	296.0[2]	14	14	28.2	11	01	56	12.21	0.0237	4.4	−0.34	180
3C	298.0	14	16	38.80	06	42	20.65	16.79	1.439[3]	5.96	−1.17	<5

（续表）

天体[2]		α(1950.0)			δ(1950.0)			V	z	S_{1400}	α	θ
		h	m	s	°	′	″	(星等)		(央)		(角秒)
PKS	1417−19[2]	14	17	01.78	−19	15	00.0	17.5	0.1192	1.7	−0.70	<5
4C	20.33	14	22	37.0	20	13	49	17.86	0.871	1.8	−0.69	8
TON	202	14	25	18.0	26	46	00	15.68	0.366	3.2	−0.72	4
OQ	172	14	42	50.48	10	11	12.4		3.53	2.42	−0.09	—
3C	305.0[2]	14	48	17.13	63	28	37.0	13.74	0.0416	3.2	—	—
3C	306.0[2]	14	52	01.39	16	34	36.0	14.9	0.0458	0.7	−0.90	360
MSH	14−121	14	53	12.25	−10	56	51.5	17.37	0.938	3.90	−0.82	33
PKS	1454−06	14	54	02.68	−06	05	45.0	18.00	1.249	1.2	−0.80	(4)
3C	309.1	14	58	56.476	71	52	11.42	16.78	0.905[3]	8.5	−0.48	<2
OR	103	15	02	00.18	10	41	21.5		0.572	1.2	0.40	<3
3C	310.0[2]	15	02	48.59	26	12	29.0	15.24	0.0543	7.8	−1.14	252
3C	311.0	15	02	58.0	60	12	36	18.00	1.022	1.7	−0.47	—
PKS	1508−05	15	08	14.95	−05	31	49.1	17	1.191	3.9	−0.70	—
PKS	1510−08	15	10	08.915	−08	54	47.2	16.52	0.361[3]	3.95	—	<0.05
3C	315.0[2]	15	11	30.79	26	18	26.0	16.80	0.1086	3.9	−0.92	180
4C	37.43	15	12	47.48	37	02	30	15.50	0.370	0.9	−0.81	56
4C	00.56[2]	15	14	06.19	00	26	01.0	16.5	0.053	2.5	−0.60	—
3C	317.0[2]	15	14	16.97	07	12	16.6	13.50	0.0351	5.2	−1.23	<20
4C	−06.41[2]	15	20	11.8	−06	19	42	18.0	0.1280	(0.5)	—	—
3C	323.1	15	45	31.30	21	01	38.5	16.69	0.264	2.51	−0.77	68.1
3C	327.0[2]	15	59	56.7	02	06	20	15.88	0.1041	9.8	−0.83	210
4C	17.66[2]	16	02	54.0	17	51	00.0	15.1	0.0320	0.5	—	—
PKS	1610−60.8[2]	16	10	40.8	−60	47	46	12.8	0.0284	45.4	—	552
DA	406	16	11	47.93	34	20	20.9	17.50	1.401	2.9	0.04	<2
TON	256	16	12	08.7	26	13	00	15.41	0.131			
3C	332.0[2]	16	15	47.27	32	29	45.0	16.0	0.1520	2.6	−0.84	54
3C	334.0	16	18	06.81	17	43	37.7	16.41	0.555	2.2	−0.77	41
3C	336.0	16	22	32.47	23	52	06.5	17.47	0.927	2.7	−0.79	21.7
3C	338.0[2]	16	26	55.29	39	39	31.0	12.63	0.0303	3.6	−1.51	41
PKS	1634+26	16	34	21.4	26	54	18	17.75	0.561	1.3	−0.84	20
PKS	1637−77[2]	16	37	02.9	−77	09	57	16.0	0.0438	5.3	−0.7	156
3C	345.0	16	41	17.625	39	54	10.99	15.96	0.594	7.0	−0.34	<0.025
3C	348.0[2]武仙座 A	16	48	40.80	05	04	36.0	16.90	0.1533	43.0	−1.05	84
4C	02.44[2]	16	50	56.7	02	42	12.0	14.0	0.0250	(0.6)	—	—
PKS	1655−77[2]	16	55	11.1	−77	37	42	17.0	0.0663	2.0	−0.5	48
4C	29.50	17	02	10.9	29	50	00	19.14	1.927	1.5	−0.72	(4)
3C	351.0	17	04	04.48	60	48	50.3	15.28	0.371	3.3	−0.73	59
3C	353.0[2]	17	17	55.59	−00	55	53.0	15.36	0.0307	49.0	−0.69	150
3C	357.0[2]	17	26	27.41	31	48	23.9	15.5	0.1670	2.5	−0.78	74
PKS	1801+01	18	01	44.0	01	01	18	19.00	1.522	1.3	−0.60	—
3C	371.0[2]	18	07	18.49	69	48	57.55	14.2	0.0508	2.7	0.10	29
3C	380.0	18	28	13.485	48	42	40.15	16.81	0.691	14.4	−0.76	2
3C	381.0[2]	18	32	24.29	47	24	48.0	17.24	0.1614	3.9	−0.63	60
3C	382.0[2]	18	33	12.59	32	38	58.0	14.66	0.0586	5.8	−0.77	150
PKS	1834+19[2]	18	34	31.2	19	39	12	14.0	0.0166	1.7	−0.6	—
3C	388.0[2]	18	42	35.49	45	30	22.4	15.32	0.0917	5.7	−0.87	20
3C	390.3[2]	18	45	37.5	79	43	06	13.8	0.0569	12.3	−0.57	204
PKS	1928−34[2]	19	28	24.1	−34	01	42	17.0	0.0981	0.9	−0.7	<36
PKS	1934−63[2]	19	34	49	−63	49	12	16.0	0.182	13.0	0.2	<18
3C	402.0[2]	19	40	22.5	50	29	29	14.0	0.0247	3.1	−0.71	342
3C	403.0[2]	19	49	43.88	02	22	40.00	15.42	0.059	5.8	−0.77	96
3C	403.1[2]	19	49	55.2	−01	25	07.2	16.0	0.0559	1.5	−0.73	246
PKS	1954−55[2]	19	54	19.7	−55	17	40	16.3	0.0598	5.5	−0.5	60

(续表)

天体[2]		α(1950.0)			δ(1950.0)			V	z	S_{1400}	α	θ
		h	m	s	°	′	″	(星等)		(央)		(角秒)
3C	405.0[2] 天鹅座 A	19	57	44.[illegible]8	40	35	46.0	15.14	0.0570	1,255.0	−0.80	96
3C	407.0	20	05	46.0	−04	27	18	18.00	1.864	1.0	−0.96	—
PKS	2006−56[2]	20	06	23.9	−56	38	58.0	16.0	0.0585	(3.0)	—	600
PKS	2040−26[2]	20	40	44.18	−26	43	50.0	13.5	0.0406	1.8	−0.50	180
PKS	2048−57[2]	20	48	06.0	−57	15	15.0	13.0	0.0110	2.1	−0.80	<30
PKS	2058−28[2]	20	58	40.60	−28	13	56.0	14.8	0.0394	1.7	−0.80	168
PKS	2058−13[2]	20	58	56.7	−13	30	38.0	15.2	0.0296	1.3	−0.70	—
PKS	2115−30	21	15	11.42	−30	31	55.3	16.47	0.980	2.4	−0.70	<11
3C	430.0[2]	21	17	01.88	60	35	34	15.0	0.0549	7.56	−0.78	57
3C	432.0	21	20	25.51	16	51	45.6	17.96	1.805	1.5	−1.08	13
3C	433.0[2]	21	21	30.57	24	51	17.9	16.24	0.1025	11.9	−0.90	52
PKS	2128−12	21	28	52.69	−12	20	19.7	15.99	0.501	1.8	0.20	<6
PKS	2130−53[2]	21	30	47.8	−53	49	57.0	14.0	0.0763	1.3	−0.80	162
PKS	2134+004	21	34	05.212	00	28	25.7	18.00	1.930	10.0	—	0.0015
PKS	2135−14	21	35	00.8	−14	46	27	15.53	0.200	3.0	−0.80	150
3C	436.0[2]	21	41	58.28	27	56	16.0	18.18	0.2154	3.3	−0.87	65
PKS	2144−17	21	44	17.7	−17	54	05	19.50	0.684	1.4	−1.20	—
PKS	2145+06	21	45	36.07	06	43	41.25	16.47	0.367	3.0	0.60	<3
PKS	2146−13	21	46	45.87	−13	18	11	20.00	1.800[3]	1.5	−0.90	(6)
PKS	2152−69[2]	21	53	01.6	−69	55	46	13.8	0.0266	25.9	−0.7	228
PKS	2153−204	21	53	48.0	−20	26	30	17.50	1.310	—	—	<7
3C	442.0[2]	22	12	20.40	13	35	40.0	13.66	0.0262	3.4	−1.05	270
PKS	2216−03	22	16	16.3	−03	50	41	16.38	0.901	0.9	0.20	<6
3C	445.0[2]	22	21	15.58	−02	21	54.0	17.0	0.0563	5.1	−0.86	276
3C	446.0	22	23	11.04	−05	12	17.2	18.39	1.404	5.85	−0.61	0.4
PHL	5200	22	25	50.58	−05	34	00	18.00	1.981[3]			
3C	449.0[2]	22	29	07.37	39	06	14.0	13.20	0.0181	3.7	−0.60	300
CTA	102	22	30	07.78	11	28	22.8	17.33	1.037	6.78	−0.60	<0.025
3C	452.0[2]	22	43	32.97	39	25	28.0	16.0	0.0820	10.7	−0.94	360
PKS	2247+11[2]	22	47	20.80	11	20	19.0	14.4	0.0268	2.5	−0.80	138
3C	454.0	22	49	07.65	18	32	43.7	18.40	1.757	2.1	−0.80	<3
3C	454.3	22	51	29.524	15	52	54.36	16.10	0.859	10.8	−0.16	<0.02
PKS	2251+11	22	51	40.6	11	20	39	15.82	0.323	1.6	−0.80	8
3C	455.0[2]	22	52	34.48	12	57	53.3	14.00	0.0331	3.0	−0.82	<7
PKS	2254+024	22	54	43.9	02	27	32	18.00	2.090	—	—	<6
PKS	2300−18[2]	23	00	22.80	−18	57	49.0	18.3	0.129	1.7	−0.60	—
PKS	2302−713	23	02	23.0	−71	19	12	17.5	0.384			
4C	07.61[2]	23	08	00.0	07	15	00.0	13.9	0.0448	1.6	—	—
3C	456.0[2]	23	09	56.60	09	03	10.2	18.54	0.2337	2.4	−0.77	<2
3C	459.0[2]	23	14	02.27	03	48	55.2	18.0	0.2205	4.3	−1.02	12
PKS	2318+07[2]	23	18	09.0	07	57	12	12.8	0.0119	0.7	−0.60	—
MSH	23−112[2]	23	22	42	−12	23	54	15.46	0.0825	1.9	−1.50	<15
CTD	141	23	25	43.0	29	20	00	17.3	1.015	1.1	−0.60	50
PKS	2326−477	23	26	32.7	−47	46	51	16	1.299	—	—	—
PKS	2329−384	23	29	17.9	−38	28	22	17.0	1.195			
OZ	−252	23	31	18.0	−24	00	14	17.00	—			
3C	465.0[2]	23	35	56.57	26	44	20.0	13.29	0.0301	7.7	−0.96	540
PKS	2344+09	23	44	03.82	09	14	05.7	15.97	0.677	2.1	−0.50	<6
PKS	2345−16	23	45	27.63	−16	47	51.9	18.00	0.600	1.2	−0.20	—
PKS	2349−01[2]	23	49	22.50	−01	26	04.0	17.5	0.174	1.6	−0.70	—
PKS	2352−455	23	52	53.7	−45	30	08	17.5	1.868			
PKS	2353−68	23	53	31	−68	37	03	17	1.716	1.2	−0.6	—
PKS	2354−35[2]	23	54	26.2	−35	01	19	14.4	0.0487	1.0	−1.2	48
PKS	2354+14	23	54	44.7	14	29	26	18.18	1.810	1.4	−1.10	<6
PKS	2356−61[2]	23	56	24.1	−61	11	40	16.0	0.0959	19.2	−0.8	240
PKS	2357+00[2]	23	57	22.0	00	26	18	16.0	0.0844	0.5	—	—

(Adams, 1925), 波江座 40B 星则相当于 21±4 公里·秒$^{-1}$(Popper, 1954)。最近对这两个天体的引力红移的测量给出天狼 B 星的值为 89±16 公里·秒$^{-1}$(Greenstein, Oke 和 Shipman, 1971), 波江座 40B 星的值为 23±5 公里·秒$^{-1}$(Greenstein 和 Trimble, 1972)。特林布尔等(Trimble 和 Thorne, 1969)已编制了一份单谱线分光双星表, 分光双星可能有一颗中子星或坍缩星作为伴星。

折射效应 虽然当一个波穿过大多数介质传播时其频率保持不变, 可是其波长 λ 则不是如此。当在空气中测量波长 $\lambda_{空气}$ 时, 必须与在真空中的实验室测量的波长 $\lambda_{真空}$ 作比较,

$$\lambda_{空气}=\frac{\lambda_{真空}}{n_{空气}}, \tag{2-236}$$

式中处在光学波段(2000 至 7000 埃)的空气的折射率由下式给出(Edlén, 1953):

$$n_{空气}=1+64328\times10^{-8}+\frac{2949810}{146\times10^{8}-\tilde{\nu}^{2}}+\frac{25540}{41\times10^{8}-\tilde{\nu}^{2}}; \tag{2-237}$$

波数 $\tilde{\nu}$ 由下式给出:

$$\tilde{\nu}=\frac{\nu}{c}=\frac{1}{\lambda_{真空}}。 \tag{2-238}$$

通常由下式可计算出所测出的光学红移 $z_{光学}$

$$z_{光学}=\frac{\lambda_{空气}-\lambda_{真空}}{\lambda_{真空}}。 \tag{2-239}$$

真实红移 z 由下列关系式给出:

$$1+z=(1+z_{光学})n_{空气}, \tag{2-240}$$

式中 $n_{空气}$ 是相应于 $\lambda_{空气}$ 的空气的折射率, 这里 $\lambda_{空气}$ 是观测到的波长, 折射率 $n_{空气}\approx1.000297$。

2.18. 多普勒致宽(高斯轮廓)

当谱线致宽是由于在热动平衡下原子或分子的运动或者是由于气体的无规湍动所引起时, 速度的麦克斯韦分布(Maxwell, 1860, (3-114)式)可与联系频率位移与视向速度的多普勒公式(Doppler, 1842, (2-226)式)一起应用。结果谱线强度分布由下式给出(Rayleigh, 1889):

$$\varphi_{mn}(\nu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left(-\frac{(\nu-\nu_{mn})^{2}}{2\sigma^{2}}\right), \tag{2-241}$$

式中 ν 是所考虑的频率, ν_{mn} 是 m-n 跃迁的频率, 以及

$$2\sigma^{2}=\frac{\nu_{mn}^{2}}{c^{2}}\left(\frac{2kT_{K}}{M}+V^{2}\right), \tag{2-242}$$

式中 M 是原子或分子的质量, T_K 是运动原子或分子的运动温度, v 是最可几湍流速度。湍流速度假定具有麦克斯韦分布, 所以均方根湍流速度 $v_{均方根}=(3/2)^{1/2}v$, 平均湍流速度 $\langle v\rangle=2v/\pi^{1/2}$。轮廓线具有的半极大全宽度由下式给出:

$$\Delta\nu_{D}=\frac{2\nu_{mn}}{c}\left[\ln 2\left(\frac{2kT_{K}}{M}+v^{2}\right)\right]^{1/2}={}^{*}2.354820\sigma, \tag{2-243}$$

峰值为 $2(\ln2/\pi)^{1/2}(\Delta\nu_D)^{-1}$。如第 2.15 节所示, 若辐射体是分子微波激射, 则观测到的谱线可能比 $\Delta\nu_D$ 窄。

有效多普勒温度 T_D 定义为:

$$T_{D}=\frac{1}{8\ln 2}\frac{Mc^{2}}{k\nu_{mn}^{2}}(\Delta\nu_{D})^{2}={}^{*}1.173920\times10^{36}M(\Delta\nu_{D}/\nu_{mn})^{2}\ 开。 \tag{2-244}$$

当一个原子或分子的实际组成的辐射是自由电子的散射时，观测到的谱线的近似半宽度将由(2-243)式给出，式中质量 M 是电子质量而不是正在辐射的原子或分子的质量。辐射中受到散射的百分数的一种量度是下式给出的光学深度：

$$\tau=\int_0^L \sigma_T N_e dl, \tag{2-245}$$

式中积分是对辐射源的大小 L 沿视线进行积分，N_e 是自由电子的密度，汤姆孙散射截面(Thomson, 1903)由下式给出：

$$\sigma_T=\frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2={}^*6.652448\times10^{-25}\text{ 厘米}^2。 \tag{2-246}$$

当光学深度大于0.5时，几乎所有在较宽的散射谱线中的线辐射与在狭的辐射线中的线辐

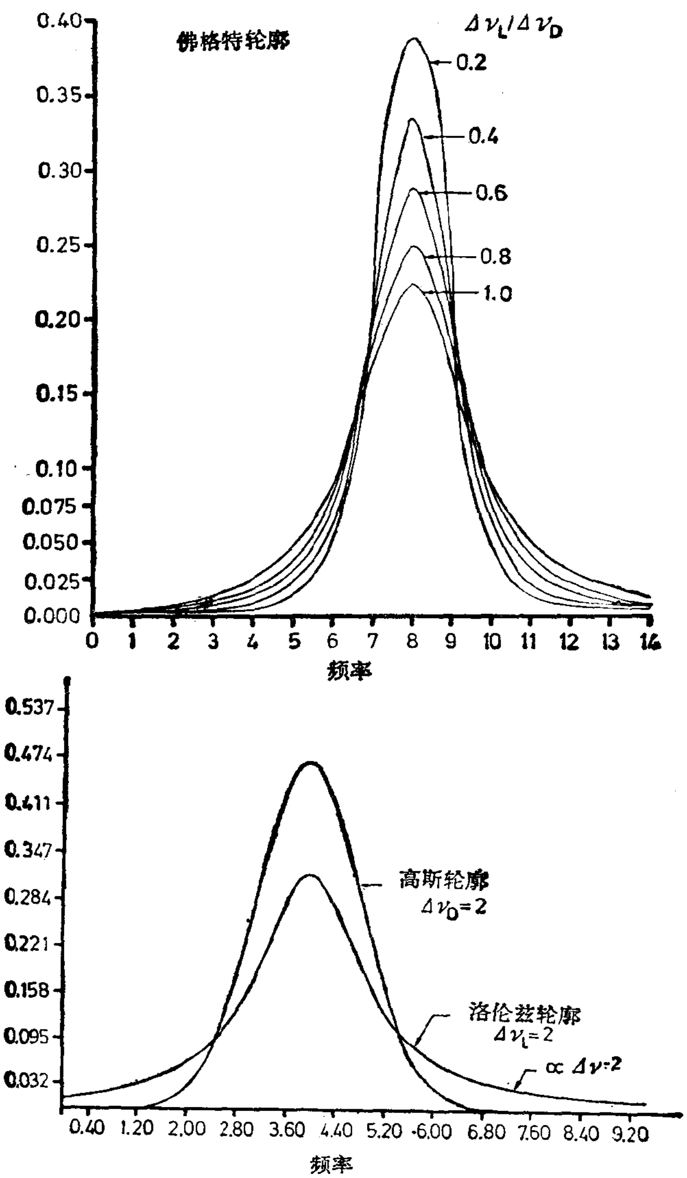


图 16 半极大全宽度为 $\Delta\nu_D$ 的多普勒谱线轮廓，半极大全宽度为 $\Delta\nu_L$ 的洛伦兹谱线轮廓以及各种 $\Delta\nu_L/\Delta\nu_D$ 值的合成的佛格特轮廓

射不同，而当光学深度小于 0.5 时，较宽谱线中辐射能的百分比约为 $\tau/(1-\tau)$。若我们假定电子具有麦克斯韦速度分布，在康普顿散射中，一个光子被散射角度 θ、并且在散射过程中频率从 ν_1 变到 ν_2 的几率 $\sigma(\theta,\ \nu_1,\ \nu_2)$ (Dirac, 1925) 为：

$$\sigma(\theta,\ \nu_1,\ \nu_2)=\frac{3}{4}\sigma_T\frac{(1+\cos^2\theta)}{(1-\cos\theta)^{1/2}}\frac{1}{2\pi\Delta\nu_D}\exp\left[\frac{-(\nu_2-\nu_1)^2}{\Delta\nu_D^2(1-\cos\theta)}\right], \qquad (2\text{-}247)$$

式中 $\Delta\nu_D$ 由(2-243)式给出，其中 M 应是电子质量。亨奈伊(Henyey, 1940)以及博姆(Böhm, 1960)给出了运动原子所引起的康普顿散射 $\sigma(\theta,\ \nu_1,\ \nu_2)$ 的更完整的公式。多普勒致宽谱线轮廓以及洛伦兹与佛格特轮廓如图 16 所示。

2.19. 自转源或膨胀源引起的致宽

当一个球形源以赤道速度 v_R 自转，则多普勒方程(2-226)式给出自转谱线致宽为：

$$\Delta\nu_R=\frac{\nu_{mn}v_R\sin i}{c}, \qquad (2\text{-}248)$$

式中 ν_{mn} 是 m–n 跃迁的频率，i 是天体赤道面对垂直视线平面[1]的倾角。量 $V_R\sin i$ 称为投影赤道线速度或观测到的自转线速度。根据谱线宽度确定恒星自转是阿布尼(Abney, 1877)首先提出，并且是由施莱辛格(Schlesinger, 1909)首先观测到的。沙普利等(Shapley 和 Nicholson, 1919; Shajn 和 Struve, 1929; 以及 Struve, 1930)进行了自转谱线致宽的理论研究，黄绶书等(Huang 和 Struve, 1955, 1960)已作过综述。早型星，即光谱型 B、A 和 F 的星的自转速度范围为 200 至 350 公里·秒$^{-1}$，而在光谱型 F5 以后，速度迅速降低(参看 Slettebak, 1949, 1954, 1955; Slettebak 和 Howard, 1955; Abt 和 Hunter, 1962; Kraft, 1965, 1970; Slettebak, 1970 以及图 17)。

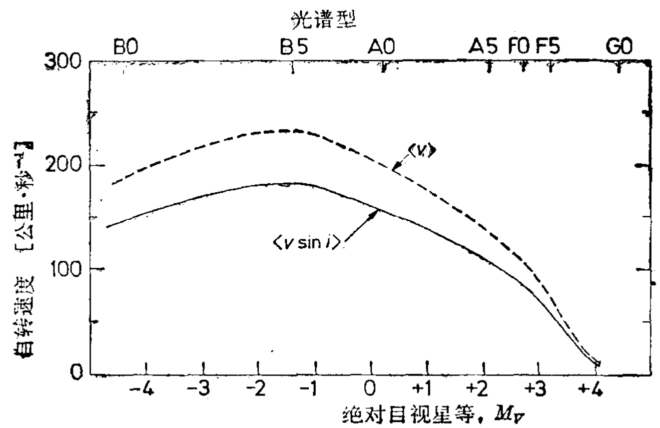


图 17 恒星的平均投影自转速度 $\langle V\sin i\rangle$ 及平均自转速度 $\langle V\rangle$ 随光谱型及绝对目视星等的变化(取自 Abt 和 Hunter, 1962 的文章)。曲线 $\langle V\rangle$ 是对曲线 $\langle V\sin i\rangle$ 作自转轴随机取向的假定而推导得出的。对每一种光谱型来说，取来求平均的恒星数在 15 至 65 颗之间

以速度 v_E 膨胀的一个气体辐射气壳层将引起双谱线轮廓，它们的峰值频率为：

$$\nu=\nu_{mn}\left[1\pm\frac{v_E}{c}\right], \qquad (2\text{-}249)$$

或者引起不对称的谱线轮廓，其中心频率为：

$$\nu=\nu_{mn}\left[1+\frac{v_E}{c}\right], \qquad (2\text{-}250)$$

这取决于来自气体壳层后面部分的辐射是否能穿过较靠近观测者的那部分气壳。当观测行星状星云时，利用这种效应已测得膨胀速度是在 20 至 50 公里·秒$^{-1}$ 之间(Wilson, 1950, 1958)。

---

1) 原文为天空平面 (celestial plane)，意指与观测者视线方向垂直的平面。——译者注

2.20. 碰撞致宽(斯塔克致宽或压力致宽)

2.20.1. 离子致宽——准静态近似

通过假定慢运动的离子具有"准静态"电场分布就能计算出离子致宽，然后再计算所考虑谱线的斯塔克裂距。如果每一个离子的电场分布与等离子体中其他离子和电子无关，则离子电场的几率分布是容易计算的。每一个离子的库仑电场强度为 $E=Ze/r^2$，其中 r 是到电荷为 Ze 的离子的距离。至少有一个离子处在距离辐射原子为 r 到 $r+dr$ 的壳层中的几率 $P(r)$ 为：

$$P(r)dr=\frac{3r^2}{r_0^3}\exp\left[-\left(\frac{r}{r_0}\right)^3\right]dr, \tag{2-251}$$

式中 r_0 为平均离子间距：

$$r_0=[4\pi N_i/3]^{-1/3}, \tag{2-252}$$

N_i 是离子的密度。因此，一个发射原子受到最邻近的离子电场作用的几率 $P(E)$ 为(Holtsmark, 1919)：

$$P(E)=W_{\rm H}\left(\frac{E}{E_0}\right)d\left(\frac{E}{E_0}\right)=\frac{3}{2}\left(\frac{E}{E_0}\right)^{-5/2}\exp\left[-\left(\frac{E}{E_0}\right)^{-3/2}\right]d\left(\frac{E}{E_0}\right), \tag{2-253}$$

式中 $E=Ze/r^2$，平均电场强度 $E_0=Ze/r_0^2=2.61eZN_i^{2/3}$。当 $E\gg E_0$ 时，$W_{\rm H}(E/E_0)$ 称为霍耳茨马克离子场强分布(Holtsmark, 1919)。当电场 E 写成许多不同离子场的矢量和而不是一个离子的电场时，线性斯塔克效应的霍尔茨马克分布由下式给出(Holtsmark, 1919; Chandrasekhar, 1943)：

$$\begin{aligned}W_{\rm H}(\beta)&=\frac{2}{\pi\beta}\int_0^\infty v\sin v\exp\left[-\left(\frac{v}{\beta}\right)^{3/2}\right]dv\\&=\frac{4}{3\pi}\sum_{n=0}^\infty(-1)^n\Gamma\left(\frac{4n+6}{3}\right)\frac{\beta^{2n+2}}{(2n+1)!}\\&\approx\frac{4\beta^2}{3\pi}(1-0.463\beta^2+0.1227\beta^4\pm\cdots)\quad(\text{当 }\beta\ll1)\\&=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}(-1)^{n+1}\frac{\Gamma\left(\frac{3n+4}{2}\right)\sin\left(\frac{3\pi n}{4}\right)}{n!\,\beta^{(3n+2)/2}}\\&\approx\frac{1.496}{\beta^{5/2}}\left(1+\frac{5.107}{\beta^{3/2}}+\frac{14.43}{\beta^3}+\cdots\right)\quad(\text{当 }\beta\gg1),\end{aligned} \tag{2-254}$$

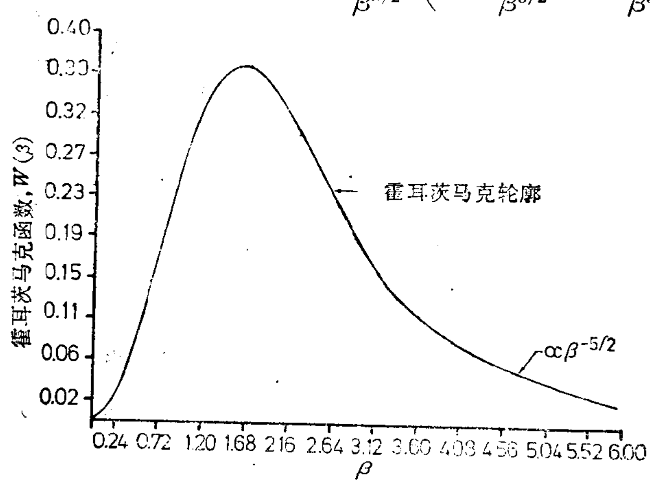


图 18　由(2-254)式给出的霍耳茨马克分布

式中 $\beta=E/E_0$，图 18 为 $W_{\rm H}(\beta)$ 的曲线图。当 β 非常大时，就象(2-253)式那样，$W_{\rm H}(\beta)\to1.5\beta^{-5/2}$。

当离子相关显得重要时(Ecker 和 Müller, 1958; Mozer 和 Baranger, 1960; Hooper, 1968)，或者当辐射粒子是一个离子时(Lewis 和 Margenau, 1958)，离子场的几率分布将偏离(2-254)式的霍尔茨马克分布。当 r_0 并不比德拜半径 $r_{\rm D}=$ *6.900878$(T/N_i)^{1/2}$ 厘米(T 是等离子体的运动温度，N_i 是离子密

度)小很多时，离子相关变得重要了。总的结果是当 r_0 趋近 r_D 时，$W_H(\beta)$ 变得更偏斜于小的 β。当辐射粒子是一个离子时，$W_H(\beta)$ 的两翼按照因子 $\exp\left[-\frac{1}{3}(r_0/r_D)^2\beta^{1/2}\right]$ 衰减。

对于类氢原子来说，由电场强度 E 引起的频率位移 $\Delta\nu$ 是 E 的线性函数(这个关系首先是由斯塔克(Stark, 1913)观测到的)。对于其他原子来说，在弱场时 $\Delta\nu$ 正比于 E^2(二次斯塔克效应)，在强场时 $\Delta\nu$ 正比于 E。利用(2-253)式，每一个斯塔克分量的谱线强度分布由下式给出：

$$\varphi(\Delta\nu)=\frac{1}{\Delta\nu_0}W_H\left(\frac{\Delta\nu}{\Delta\nu_0}\right)\quad(\text{对于线性斯塔克效应})\tag{2-255}$$

和

$$\varphi(\Delta\nu)=\frac{1}{2}(\Delta\nu_0\Delta\nu)^{-1/2}W_H[(\Delta\nu/\Delta\nu_0)^{1/2}]\quad(\text{对于二次斯塔克效应}),\tag{2-256}$$

式中 $\Delta\nu_0$ 是平均电场 E_0 时的斯塔克位移。

对于类氢原子来说，从高能级 m 到低能级 n 的跃迁频率 ν_{mn} 分裂成下式给出的频率 $\nu_{m,n}$(Schwarzschild, 1916; Epstein, 1916; Bethe 和 Salpeter, 1957)：

$$\begin{aligned}\nu_{m,n}&=\nu_{mn}+\frac{3h}{8\pi^2m_eeZ}E[m(m_2-m_1)-n(n_2-n_1)]\\&=\nu_{mn}+{}^*1.917974\times10^6\frac{E}{Z}[m(m_2-m_1)-n(n_2-n_1)]\ \text{赫},\end{aligned}\tag{2-257}$$

式中 E 的单位是伏·厘米$^{-1}$，在无磁场时的跃迁频率为：

$$\nu_{mn}=\frac{2\pi^2m_ee^4Z^2}{h^3}(n^{-2}-m^{-2})={}^*3.289841\times10^{15}Z^2(n^{-2}-m^{-2})\ \text{赫},\tag{2-258}$$

m_2 和 m_1 可取为 0 到 $m-1$ 之间的整数值，n_2 和 n_1 可取 0 到 $n-1$ 之间的整数值。频率位移 $\Delta\nu_{mn}$ 和相应的波长位移 $\Delta\lambda_{mn}$ 由下式给出(Struve, 1929)：

$$\Delta\nu_{mn}={}^*1.917974\times10^6\frac{E}{Z}X_{mn}\ \text{赫}\tag{2-259}$$

和

$$\Delta\lambda_{mn}=EC_{mn}\ \text{厘米},$$

式中

$$X_{mn}=[m(m_2-m_1)-n(n_2-n_1)],$$

$$\begin{aligned}C_{mn}&=\frac{5.3\times10^{-15}}{Z^5}(n^{-2}-m^{-2})^{-2}X_{mn}\ \text{厘米}^2\cdot\text{伏}^{-1}\\&=6.4\times10^{-5}\frac{\lambda_{mn}^2}{Z}X_{mn}\ \text{厘米}^2\cdot\text{伏}^{-1},\end{aligned}$$

E 的单位是伏·厘米$^{-1}$。

昂德希尔等(Underhill 和 Waddell, 1959)给出了光学氢线的 X_{mn} 与 C_{mn} 的表。总的谱线致宽将是由(2-259)式给出的所有斯塔克分量、并对每一分量的强度作适当的加权后的迭加。光学氢线加权后的 X_{mn} 的平均值 $\langle X\rangle$ 是：

谱　线	L_α	L_β	H_α	H_β	H_γ	H_δ	极限 $m\gg n$
$\langle X\rangle$	2.0	4.0	2.24	5.96	11.8	15.9	$\frac{1}{2}m(m-1)$

维达尔等(Vidal, Cooper 和 Smith, 1973)给出了氢的前面四条喇曼谱线与前面四条巴耳末谱线的斯塔克致宽的表。

利用平均电场 $E_0={}^*2.598518eZN_i^{2/3}$($N_i$ 是离子密度)与(2-254)式、(2-255)式和

(2-259)式,我们得到谱线翼分布函数:

$$\varphi(\Delta\nu)\approx N_i(\Delta\nu)^{-5/2}\langle X\rangle^{3/2}, \tag{2-260}$$

式中 $\langle X\rangle$ 是 X_{mn} 的平均值。

对于给定的谱线系(n 固定),由(2-258)式可得出频率为 ν_{m+1} 与 ν_m 的相邻谱线的频率差 $\Delta\nu_L$:

$$\Delta\nu_L=\frac{4\pi^2 m_e e^4 Z^2}{h^3 m^3}=\frac{{}^*6.579681\times10^{15}}{m^3}Z^2\ \text{赫。} \tag{2-261}$$

由(2-259)式得出量子数为 m 的一条谱线的最大的斯塔克位移 $\Delta\nu_{\max}$:

$$\Delta\nu_{\max}=\frac{3hm^2E}{8\pi^2 m_e eZ}={}^*1.917974\times10^6\ \frac{Em^2}{Z}\ \text{赫。} \tag{2-262}$$

假定 E 取它的平均值 $E_0=2.6eZN_i^{2/3}$,其中 N_i 是离子密度。令 $\Delta\nu_{\max}$ 等于 $\Delta\nu_{L/2}$,我们得到量子数 m 的极限值,此时可观测到一系列的谱线迭合在一起(Inglis 和 Teller, 1939)。

$$N_i^{2/3}=\frac{16\pi^4 m_e^2 e^4 Z^2}{7.8h^4 m^5}={}^*4.578289\times10^{15}Z^2 m^{-5}\ \text{厘米}^{-2} \tag{2-263}$$

或

$$\log N_i={}^*23.49106-7.5\log m_{\circ}$$

2.20.2. 电子致宽——碰撞近似

在碰撞近似中,假定一个辐射原子直到与一个扰动粒子发生碰撞,它的行为始终是象一个未受扰的谐振子。这样一种碰撞的结果将会改变谐振荡的相位和可能引起谐振荡的振幅改变。当时间 t 长到足以包括碰撞时,谐振子的偶极矩由下式给出:

$$d(t)=ex(t)=eA(t)\exp[i\omega_0 t+i\eta(t)], \tag{2-264}$$

式中 e 是电子的电荷,$x(t)$ 表示振子的线位移,$A(t)$ 表示振荡振幅随时间的变化,ω_0 表示振子的未受扰频率,$\eta(t)$ 表示碰撞引起的相移。一个振子每单位时间里向所有方向发出的平均总能量为(Larmor, 1897):

$$\langle I\rangle=\frac{2}{3c^3}\langle\ddot{d}(t)^2\rangle\propto\langle|x(t)|^2\rangle, \tag{2-265}$$

式中⟨ ⟩表示对时间求平均,"‥"表示对时间的二次微分,"| |"表示绝对值,"∝"意指正比关系。利用瑞利定理(Rayleigh, 1889)就可以用 $x(t)$ 的傅里叶变换 $F(\omega)$ 来表示这个平均强度:

$$\langle I(\omega)\rangle\propto\langle|x(t)|^2\rangle=\langle|F(\omega)|^2\rangle, \tag{2-266}$$

式中傅里叶变换 $F(\omega)$ 由下式给出:

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\exp(-i\omega t)\,dt, \tag{2-267}$$

⟨ ⟩表示对时间 t 或频率 ω 求平均。

利用威纳-金特欣(Wiener-Khintchine)定理(Wiener, 1930; Khintchine, 1934),用 $x(t)$ 的自相关函数 $\varphi(s)$ 来表示平均强度也是方便的:

$$I(\omega)\propto\langle|F(\omega)|^2\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}\langle\varphi(s)\rangle\exp(-i\omega s)\,ds, \tag{2-268}$$

式中时间平均自相关函数 $\langle\varphi(s)\rangle$ 由下式给出:

$$\langle\varphi(s)\rangle=\left\langle\int_{-\infty}^{+\infty}x^*(t)x(t+s)\,dt\right\rangle, \tag{2-269}$$

式中 $x^*(t)$ 表示 $x(t)$ 的共轭复数,⟨ ⟩表示对时间求平均。

让我们假设一个原子与一个微扰粒子间的碰撞发生在时间间隔 T 内，采用(2-264)式和(2-267)式得：

$$|F(\omega)|^2=\frac{\sin^2[(\omega_0-\omega)T/2]}{[(\omega_0-\omega)/2]^2}=\left|\int_0^T \exp[i(\omega_0-\omega)t\right|^2。\tag{2-270}$$

设两次碰撞之间的平均时间是 τ，并设碰撞是独立的，并且是随机的，在时间 T 与 $T+dT$ 之间发生一次碰撞的几率由泊松分布给出：

$$P(T)dT=\frac{1}{\tau}\exp\left(-\frac{T}{\tau}\right)dT。\tag{2-271}$$

于是由(2-266)式、(2-270)式及(2-271)式得出洛伦兹谱线强度分布(Lorentz, 1906, 1909)：

$$\varphi(\nu)=\frac{\Delta\nu_L/2\pi}{(\nu-\nu_0)^2+(\Delta\nu_L/2)^2}\propto\int_0^\infty|F(\omega)|^2P(T)dT,\tag{2-272}$$

式中 $\Delta\nu_L=(\pi\tau)^{-1}=\Gamma_{碰}/(2\pi)$，我们已对 $\varphi(\nu)$ 作归一化，所以 $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\nu)d\nu=1$。

平均碰撞时间 τ 与微扰粒子的平均密度 N 关系为：

$$\pi\Delta\nu_L=\pi b^2v_0N=(\tau)^{-1},\tag{2-273}$$

式中 πb^2 是有效碰撞截面，b 是有效碰撞参数，质量为 m_1 的原子与质量为 m_2 的另一原子的平均相对速度为：

$$v_0=\left[\frac{8kT}{\pi}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)\right]^{1/2},\tag{2-274}$$

式中T 是气体的运动温度。

韦斯科夫(Weisskopf, 1933)把(2-273)式的临界碰撞参数 b 与一个可测常数联系起来，他注意到由于在距离 r 处的一个微扰引起的谱线频移 $\Delta\nu$ 可写成：

$$2\pi\Delta\nu=C_pr^{-p},\tag{2-275}$$

式中 C_p 是一个可测常数，$p=2$、3、4 和 6 分别相当于线性斯塔克效应、共振致宽、二次斯塔克效应及范德瓦耳斯相互作用。若微扰粒子遵循直线轨迹行进，则由微扰引起的总相移 $\eta(b)$ 为：

$$\begin{aligned}\eta(b)&=C_p\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\tau}{[r(\tau)]^p}=C_p\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\tau}{(b^2+v_0^2\tau^2)^{P/2}}\\&=\frac{\pi^{1/2}\Gamma[(p-1)/2]C_p}{\Gamma(p/2)v_0b^{p-1}}=\frac{\psi_pC_p}{v_0b^{p-1}},\end{aligned}\tag{2-276}$$

式中碰撞参数 b 是辐射原子与微扰粒子的直线轨迹之间的垂直距离，当 $p=2$、3、4 及 6 时，相应地 $\psi_p=\pi$、2、$\pi/2$ 及 $3\pi/8$。在谱线宽度表示式(2-273)中所用的 b 的临界值是韦斯科夫(Weisskopf)半径：

$$b_W=\left(\frac{C_p\psi_p}{\eta_0v_0}\right)^{1/(p-1)},\tag{2-277}$$

式中 η_0 是对谱线致宽有贡献的相移的最小值。韦斯科夫把常数 η_0 任意地选定为 1。只要 $b_W/v_0\ll\Delta\nu_L$，这种碰撞近似就成立，并且频率差 $\Delta\nu$ 满足下列不等式(Spitzer, 1940)：

$$\Delta\nu\ll\frac{v_0^{p/(p-1)}}{C_p^{1/(p-1)}}。\tag{2-278}$$

霍尔斯坦(Holstein, 1950)已证明，当不等式反向时，上一节讨论的静态理论就适用。

林德霍尔姆-弗利(Lindholm, 1941; Foley, 1946)证明碰撞近似一般说来会导致谱线位移和谱线致宽。他们假定谐振子的振幅 $A(t)$ 是常数(一种绝热理论)，并且指出，处在碰撞参数在 b 与 $b+db$ 之间的振子在每单位时间的碰撞次数为：

$$N v_0 2\pi b\, db, \tag{2-279}$$

式中 N 是振子数密度。把(2-264)式及(2-279)式应用于(2-269)式,得出自相关函数 $\varphi(s)$:

$$\varphi(s)=\exp\{-Nv_0(\sigma_r-i\sigma_i)s\}\exp(-2\pi\nu_{mn}s), \tag{2-280}$$

式中 σ_r 及 σ_i 是下列积分的实部和虚部:

$$2\pi\int_0^\infty\{\exp[i\eta(b)]-1\}b\,db。 \tag{2-281}$$

因此利用(2-268)式,谱线强度的分布为:

$$\varphi_{mn}(\nu)=\frac{\Delta\nu_L/2\pi}{[\nu-\nu_{mn}-\beta/(2\pi)]^2+(\Delta\nu_L/2)^2}, \tag{2-282}$$

式中 $\beta=Nv_0\sigma_i$ 及 $\Delta\nu_L=\Gamma/(2\pi)=Nv_0\sigma_r/\pi$。假定 $\eta(b)$ 由(2-276)式给出,对于线性斯塔克效应($p=2$),我们得到:

$$\Gamma=2\pi\Delta\nu_L=\frac{2N\pi^3C_2^2}{v_0}\left\{0.923-\ln\left(\frac{\pi C_2}{v_0b_{\max}}\right)+\frac{\pi^2C_2^2}{24v_0^2b_{\max}^2}+\cdots\right\}, \tag{2-283}$$

式中碰撞参数的最大值 $b_{\max}$,总是取为德拜半径,而且没有谱线位移。对于其他 p 值,我们得到:

(2-284)

p	Γ (秒$^{-1}$)	β (弧度)
3	$2\pi^2C_3N$	
4	$11.37C_4^{2/3}v_0^{1/3}N$	$9.85C_4^{2/3}v_0^{1/3}N$
6	$8.08C_6^{2/5}v_0^{3/5}N$	$2.94C_6^{2/5}v_0^{3/5}N$

更精确的电子致宽理论要考虑电子的非弹性碰撞效应(Anderson, 1949; Kolb 和 Griem, 1958; Baranger, 1958; Margenau 和 Lewis, 1959; Baranger, 1962; Griem, 1964)。这种更精确的理论就是一种碰撞理论,该理论假定碰撞是弱的——即一列光要经许多次碰撞才会失去对相位的记忆。不过,微扰粒子与辐射原子之间的相互作用是由量子力学理论确定,并且还要考虑非弹性碰撞。这种非绝热理论的普遍结论是:(2-284)式给出的 $\Delta\nu_L$ 估计过低,可能差 2~3 倍,同时 $\Delta\nu_L/\beta$ 一般是小于给定的值。对于类氢原子已经进行详细计算,并在下一节中给出。

2.20.3. 类氢原子谱线辐射的碰撞致宽的谱线翼公式

在光学波段,线性斯塔克效应所引起的氢谱线的离子致宽较为重要。对于具有离子密度为 N_i 的气体,平均电场强度是 $E_0\approx Ze(4\pi N_i/3)^{2/3}$,其中 Ze 是离子电荷。用此平均场强,根据(2-255)式与(2-259)式,谱线翼的分布是霍耳茨马克分布:

$$\varphi(\Delta\lambda)=E_0^{3/2}\langle C\rangle\Delta\lambda^{-5/2}={}^*4.409510\times10^{-14}N_i\langle C\rangle\Delta\lambda^{-5/2}, \tag{2-285}$$

式中 $\Delta\lambda$ 是从 m–n 跃迁波长的位移,$\langle C\rangle$ 是平均斯塔克位移常数,在表 32 中 $\langle C\rangle$ 用厘米·克·秒制单位。L_α、L_β、H_α、H_β、H_γ 及 H_δ 的 $\langle C\rangle$ 值取自格里姆等(Griem, Kolb 和 Shen, 1959);HeII(3203 埃及 4686 埃)的 $\langle C\rangle$ 值取自格里姆(Griem, 1962);以及高阶光波段氢跃迁的 $\langle C\rangle$ 值取自格里姆(Griem, 1960; 及 Griem, 1967)。凯普尔等(Kepple 和 Griem, 1968; 以及 Kepple, 1972)给出了氢及氦谱线的斯塔克致宽的更新近的修正值。

格里姆等(Griem, Kolb 和 Shen, 1959; 以及 Griem, 1962)已计算了电子致宽对光学波段谱线强度渐近线翼公式的修正。总的致宽强度 $I(\Delta\lambda)$ 由下式给出(Griem, 1964):

表 32 氢及电离氦谱线线翼渐近公式中的参数 $\langle C_{mn}\rangle$(单位是埃 厘米·克·秒制场强单位)$^{3/2}$及 $R(N_e, T)$(单位是埃$^{-1/2}$)[1]。电子密度 N_e 的单位是厘米$^{-3}$，电子温度 T_e 的单位是开

$L_\alpha(\langle C_{mn}\rangle=3.40\times10^{-6})$				
N_e \ T_e	5,000	10,000	20,000	40,000
10^{10}	2.11	1.93	1.45	1.09
10^{12}	2.01	1.54	1.17	0.89
10^{14}	1.45	1.14	0.89	0.69
10^{16}	0.88	0.74	0.61	0.49

$H_\gamma(\langle C_{mn}\rangle=6.00\times10^{-3})$				
N_e \ T_e	5,000	10,000	20,000	40,000
10^{10}	1.79	1.37	1.04	0.79
10^{12}	1.32	1.03	0.80	0.62
10^{14}	0.84	0.70	0.57	0.45
10^{16}	0.38	0.36	0.33	0.28

$L_\beta(\langle C_{mn}\rangle=1.78\times10^{-5})$				
N_e \ T_e	5,000	10,000	20,000	40,000
10^{10}	4.30	3.29	2.47	1.86
10^{12}	3.31	2.56	1.96	1.50
10^{14}	2.29	1.83	1.45	1.14
10^{16}	1.26	1.11	0.94	0.77

$H_\delta(\langle C_{mn}\rangle=9.81\times10^{-3})$				
N_e \ T_e	5,000	10,000	20,000	40,000
10^{10}	2.17	1.66	1.27	0.96
10^{12}	1.57	1.24	0.97	0.75
10^{14}	0.97	0.81	0.67	0.54
10^{16}	0.37	0.39	0.37	0.32

$H_\alpha(\langle C_{mn}\rangle=1.30\times10^{-3})$				
N_e \ T_e	5,000	10,000	20,000	40,000
10^{10}	1.50	1.05	0.79	0.60
10^{12}	1.17	0.82	0.63	0.48
10^{14}	0.85	0.59	0.46	0.36
10^{16}	0.52	0.35	0.30	0.25

HeII 4,686 埃 $(\langle C_{mn}\rangle=2.62\times10^{-4})$				
N_e \ T_e	5,000	10,000	20,000	40,000
10^{10}				
10^{12}	1.65	1.28	0.98	0.75
10^{14}	1.13	0.91	0.72	0.56
10^{16}			0.46	0.38

$H_\beta(\langle C_{mn}\rangle=3.57\times10^{-3})$				
N_e \ T_e	5,000	10,000	20,000	40,000
10^{10}	1.39	1.05	0.80	0.60
10^{12}	1.04	0.81	0.62	0.48
10^{14}	0.69	0.56	0.45	0.35
10^{16}	0.34	0.31	0.27	0.23

HeII 3,203 埃 $(\langle C_{mn}\rangle=5.52\times10^{-4})$				
N_e \ T_e	5,000	10,000	20,000	40,000
10^{10}				
10^{12}	1.28	1.00	0.77	0.59
10^{14}	0.85	0.69	0.55	0.44
10^{16}			0.34	0.29

[1] 取自格里姆(Griem, 1964)的书。

$$I(\Delta\lambda)=\varphi(\Delta\lambda)\begin{cases}\{1+[(\Delta\lambda_W)^{-1/2}+R(N,\ T)](\Delta\lambda)^{1/2}\}\\ \left\{1+\left[(\Delta\lambda_W)^{-1/2}+R(N,\ T)\dfrac{\ln(\Delta\lambda_W/\Delta\lambda)}{\ln(\Delta\lambda_W/\Delta\lambda_p)}\right](\Delta\lambda)^{1/2}\right\}\\ \{1+1\}\end{cases} \quad (2\text{–}286)$$

上面三个表达式分别对 $\Delta\lambda<\Delta\lambda_p$, $\Delta\lambda_p<\Delta\lambda<\Delta\lambda_W$ 和 $\Delta\lambda_W<\Delta\lambda$ 而言，其中 $\Delta\lambda_W$ 和 $\Delta\lambda_p$ 分别由

$$\Delta\lambda_W=\lambda^2kT/(hm^2c)$$

(m 是高能级的主量子数)和

$$\Delta\lambda_p=\lambda^2[N_e e^2/(\pi mc^2)]^{1/2}$$

定义，式中 T 是等离子体的运动温度，N_e 是电子密度。表 32 给出氢及氦的某些跃迁的 $R(N, T)$。维达尔等 (Vidal, Cooper 和 Smith, 1973) 也给出了氢的前面四条喇曼谱线和前面四条巴耳末谱线的斯塔克致宽的表。

在射电波段，类氢原子的大多数斯塔克致宽是由于与电子的非弹性碰撞引起的。在谱线的两翼，谱线强度的分布为洛伦兹分布，并且是由(2-272)式给出的。对氢原子来说，从主量子数为 m 的高能态到低能态 n 的跃迁，谱线半极大全宽度 $\Delta\nu_L$ 为(Greim, 1960)：

$$\Delta\nu_L=\frac{1}{18\pi}\left(\frac{8\pi m_e}{kT_e}\right)^{1/2}N_e\left(\frac{\hbar}{m_e}\right)^2\int_{y_{\min}}^{\infty}\frac{e^{-y}}{y}(m^5+n^5)^2dy, \tag{2-287}$$

式中

$$y_{\min}=\frac{4\pi}{3}\frac{N_e}{m_e}\left(\frac{ehm^2}{2\pi kT_e}\right)^2,$$

e 为核电荷。

就处在射电频率的氢光谱 α 谱线的实例来说，$m=n+1$ 和 $\nu_{mn}\approx$[1] $2cR_Hn^{-3}={}^*6.576103\times10^{15}n^{-3}$ 赫，式中 R_H 是氢的里德伯常数。利用格里姆(Griem, 1967)给出的处于射电频率的 H_α 谱线的斯塔克致宽公式，谱线半极大全宽度为：

$$\begin{aligned}\Delta\nu_L&=\frac{5}{3(2\pi)^{5/2}}\left(\frac{h}{m_e}\right)^2\left(\frac{m_e}{kT_e}\right)^{1/2}N_en^4\left[\frac{1}{2}+\ln\left(2.09\frac{kT_e}{h\nu_{mn}n^2}\right)\right]\\&={}^*2.288954\times10^{-6}\frac{N_en^4}{T_e^{1/2}}\left[\frac{1}{2}+\ln{}^*6.622197\times10^{-6}T_en\right)\Big]\text{赫},\end{aligned} \tag{2-288}$$

式中 N_e 和 T_e 分别是电子密度和电子温度，n 是 α 跃迁的最低能级的主量子数。

利用(2-243)式与(2-288)式以及 $\nu_{mn}={}^*6.576103\times10^{15}n^{-3}$ 赫，我们得到：

$$\begin{aligned}\frac{\Delta\nu_L}{\Delta\nu_D}&\approx\frac{3\sqrt{\pi}}{1.2012}\left(\frac{\hbar c}{m}\right)\left(\frac{\hbar^2}{m_ee^2}\right)^2\left(\frac{m_e}{kT_e}\right)^{1/2}\left(\frac{m_H}{kT_D}\right)^{1/2}N_en^7\left[\frac{1}{2}+\ln({}^*6.622197\times10^{-6}T_en)\right]\\&\approx9.74\times10^{-16}\frac{N_en^7}{(T_eT_D)^{1/2}}[{}^*-11.42240+\ln T_e+\ln(n)],\end{aligned} \tag{2-289}$$

式中 T_D 是有效多普勒温度，$\Delta\nu_D$ 是多普勒致宽谱线的半极大全宽度，氢原子质量 $m_H={}^*1.6735595\times10^{-24}$ 克，N_e 及 T_e 分别是电子密度及电子温度，n 是 α 跃迁的最低能级的主量子数。考虑了精确碰撞截面和简并能级后所得到的结果与格里姆(Griem)所得结果完全一致(Brocklehurst 和 Leeman, 1971; Peach, 1972)。在射电波段的 HII 区中，检测斯塔克致宽的一切努力均告失败(Pedlar 和 Davies, 1971)，但是假定电子密度 N_e 很低的话，则就可以得到解释(Brocklehurst 和 Seaton, 1971)。

2.20.4. 与中性氢原子碰撞所致的范德瓦耳斯致宽

当谱线致宽是由于辐射原子与中性原子的相互作用所致时，相应的就要用绝热碰撞理论。谱线强度分布与半极大全宽度 $\Delta\nu_L$ 和谱线位移 β 的关系由(2-282)式给出，$\Delta\nu_L$ 取决于相互作用势((2-275)式)的幂 p。对中性的氢原子来说，$p=6$(范德瓦耳斯致宽)。在这种情况下(Margenau, 1939)，

$$\Gamma=2\pi\Delta\nu_L=8.08C_6^{2/5}v_0^{3/5}N_H=2.650\beta, \tag{2-290}$$

式中 N_H 是中性氢原子的密度，v_0 由(2-274)式给出，常数 C_6 由下式给出：

$$C_6\approx4.05\times10^{-33}[R_m^2-R_n^2],$$

式中

$$R_m^2\approx\frac{m^{*2}}{2Z^2}[5m^{*2}+1-3l(l+1)],$$

m^* 是能级的主量子数，l 是角动量量子数，以及

$$m^*=Z\left[\frac{\chi_H}{\chi_m-\chi_l}\right]^{1/2},$$

1) 原文漏“2”字，可参看(2-113)式。——译者注

式中 $\chi_H=13.6$ 电子伏，$\chi_m-\chi_i$ 是使第 m 能级上电离所需的能量。C_6 的数字系数是 $\alpha e^2a_0^2/\hbar$，其中 α 是原子的极化率，a_0 是玻尔半径。对氢来说，$\alpha=6.7\times10^{-25}$ 厘米^3，我们得到的系数是 4.05×10^{-33}。对氦来说，我们得出极化率 $\alpha=2.07\times10^{-25}$ 厘米^3。

2.20.5. 辐射原子与基态原子相互作用所致的共振致宽

霍耳茨马克(Holtsmark, 1925)首先算出共振致宽，他假定了一个辐射原子与一个基态原子的相互作用可以表示为两个偶极场的耦合。韦斯科夫(Weisskopf, 1933)用了由(2-275)式取 $p=3$ 所给出的相互作用势的碰撞近似。洛伦兹轮廓(2-272)式的半极大全宽度为：

$$\Delta\nu_L=\frac{Ne^2}{4m\nu_{mn}}f_a={}^*6.331589\times10^7\frac{Nf_a}{\nu_{mn}}\text{ 赫}, \tag{2-291}$$

式中 N 是原子的密度，ν_{mn} 是跃迁频率，$f_a=f_{nm}$ 是吸收振子的强度。最近由量子力学计算给出(Ali 和 Griem, 1965, 1966)：

$$\Delta\nu_L={}^*1.916667\pi^{1)}\left(\frac{g_a}{g_e}\right)^{1/2}\frac{e^2f_a}{m\nu_{mn}}N={}^*4.854218\times10^7\pi\frac{Nf_a}{\nu_{mn}}\left(\frac{g_a}{g_e}\right)^{1/2}\text{赫}, \tag{2-292}$$

式中 $g_a=g_{nm}$ 和 $g_e=g_{mn}$，它们分别是原子吸收态和发射态的统计权重。对喇曼 α 线，相应的常数是 $f_a=0.4162$ 及 $g_a/g_e=1/3$。

2.21. 自然致宽(洛伦兹色散轮廓)

一个电偶极子辐射的总功率为(Larmor, 1897)：

$$P=\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}[\ddot{x}(t)]^2, \tag{2-293}$$

式中 $x(t)$ 表示一个电荷 e 在时间 t 内的线性位移，".."表示对时间的二阶导数。这种辐射引起的有效阻尼力为：

$$F_{阻}=\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\dddot{x}(t), \tag{2-294}$$

式中"…"表示对时间的三阶导数。对于一个谐振子来说，$x(t)=x_0\cos(2\pi\nu_0t)$，其中 ν_0 是振子的共振频率。考虑到辐射阻尼，谐振子的运动方程为：

$$m\ddot{x}(t)+m(2\pi\nu_0)^2x(t)=\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\dddot{x}(t)。 \tag{2-295}$$

假定阻尼力很小，此方程就具有下列解：

$$x(t)=x_0\exp[i2\pi\nu_0t-\gamma_{经典}t/2], \tag{2-296}$$

式中经典阻尼常数为：

$$\gamma_{经典}=\frac{8\pi^2e^2}{3mc^3}\nu_0^2={}^*2.473883\times10^{-22}\nu_0^2\text{ 秒}^{-1}。 \tag{2-297}$$

利用瑞利定理(Rayleigh, 1889, (2-266)式)以及(2-293)式和(2-296)式，谐振子辐射的平均功率为：

$$I(\omega)\propto\langle|x(t)|^2\rangle=\langle|F(\omega)|^2\rangle, \tag{2-298}$$

式中
$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\exp(-i\omega t)dt=\frac{x_0}{i2\pi(\nu-\nu_0)+\gamma_{经典}/2}{}^{1)}。$$

所以光学谱线强度分布是洛伦兹分布(Lorentz, 1906, 1909)，并由下式给出：

---

1) 原文漏"π"，π 前的系数为 $2\left(1-\frac{1}{24}\right)=1.916667$。——译者注

$$\varphi(\nu)=\frac{\Delta\nu_L/2\pi}{(\nu-\nu_0)^2+(\Delta\nu_L/2)^2}, \qquad (2-299)$$

式中半极大全宽度 $\Delta\nu_L=\gamma_{经典}/2\pi={}^*3.937306\times10^{-23}\nu_0^2$ 赫，而且已对 $\varphi(\nu)$ 作了归一化，所以 $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\nu)d\nu=1$。以波长单位表示的半宽度是 $\Delta\lambda=c\gamma_{经典}/(2\pi\nu_0^2)={}^*1.180375\times10^{-4}$ 埃，它随波长而变的。洛伦兹轮廓由(2-299)式给出，如图 16 所示。

韦斯科夫-维格纳(Weisskopf 和 Wigner, 1930; 及 Weisskopf, 1933)已证明，如果跃迁频率 $\nu_{mn}=\nu_0$，则(2-299)式的经典洛伦兹解同样是量子力学的有效解，而半宽度 $\Delta\nu_L=r_R/2\pi$，其中量子力学阻尼常数 r_R 由下式给出：

$$r_R=r_m+r_n=t_m^{-1}+t_n^{-1}, \qquad (2-300)$$

式中 t_m 是原子处在 m 能级的平均寿命，在局部热动平衡条件下

$$r_m=\sum_{n<m}A_{mn}+\sum_{n<m}B_{mn}I_\nu(mn)+\sum_{k>m}B_{mk}I_\nu(mk), \qquad (2-301)$$

式中
$$\frac{g_m}{g_n}A_{mn}=B_{nm}\frac{2h\nu^3}{c^2} \quad 以及 \quad B_{nm}=\frac{g_m}{g_n}B_{mn},$$

它们把自发发射的爱因斯坦系数 A_{mn} 与受激发射的爱因斯坦系数联系起来了，$I_\nu(mn)$ 是所求得的在 m-n 跃迁时频率 ν_{mn} 的黑体辐射强度。这里第一项是由于自发发射到较低能级所产生的，求和是对能够发生跃迁的所有低能级进行的，第二项是由于感应发射或受激发射(称为负吸收)到较低能级所产生的，第三项是由于普通吸收过程以及可能包括电离。

我们可以利用黑体亮度的维恩和瑞利-琼斯近似式(1-120)和(1-121)式而得出每立方厘米每秒的感应发射数目：

$$\begin{aligned}B_{mn}I_\nu(mn)&\approx A_{mn}\exp(-h\nu/kT) \quad (当\ h\nu\gg kT)\\ &\approx A_{mn}kT/h\nu \quad (当\ h\nu\ll kT)。\end{aligned} \qquad (2-302)$$

忽略普通吸收，则

$$\begin{aligned}r_m&\approx\sum_{n<m}A_{mn} \quad (当\ h\nu/kT\gg1)\\ &\approx\frac{kT}{h\nu}\sum_{n<m}A_{mn} \quad (当\ h\nu/kT\ll1)。\end{aligned} \qquad (2-303)$$

这里 $h\nu/kT\ll1$ 意指 $\nu\ll10^{10}T$。

2.22. 合成的多普勒、洛伦兹和霍耳茨马克谱线致宽(佛格特轮廓)

当在计算洛伦兹色散轮廓中考虑了多普勒频移 $\Delta\nu_D$ 后，(2-241)式和(2-299)式可以合并起来给出谱线强度分布函数：

$$\varphi(\nu)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Delta\nu_L\exp(-\Delta\nu^2/\Delta\nu_D^2)d(\Delta\nu)}{2\pi\sqrt{\pi}\,\Delta\nu_D[(\nu-\nu_0-\Delta\nu)^2+(\Delta\nu_L/2)^2]}, \qquad (2-304)$$

式中 $\Delta\nu_D$ 和 $\Delta\nu_L$ 分别是多普勒和洛伦兹谱线轮廓的半极大全宽度。根据佛格特的推导(Voigt, 1913)，

$$\varphi(\nu)=\frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Delta\nu_D}H(a,\ b), \qquad (2-305)$$

式中
$$a=\Delta\nu_L/(2\Delta\nu_D);\quad b=(\nu-\nu_0)/\Delta\nu_D;$$
$$H(a,\ b)=\frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\exp(-y^2)dy}{(b-y)^2+a^2}。$$

赫廷等(Hjerting, 1938; Harris, 1948; Finn 和 Mugglestone, 1965)给出了佛格特函数 $H(a, b)$的表。佛格特轮廓见图 16。

当除了多普勒及洛伦兹型致宽以外，还有霍耳茨马克型致宽时，总的谱线强度分布为:

$$I(\Delta\nu)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\Delta\nu+b\Delta\nu_D)H(a,\ b)db, \tag{2-306}$$

式中 $\varphi(\Delta\nu)$ 由(2-255)式和(2-256)式给出。

霍耳茨马克函数 $H(a, b)$ 可近似为:

$$H(a,\ b)\approx\exp(-b^2)+\frac{a}{\sqrt{\pi}\,b^2}, \tag{2-307}$$

它表明在谱线两翼中，合成的致宽实际上与洛伦兹致宽是一致的，而在谱线中心部分则以多普勒致宽为主。

第三章 气 体 过 程

3.1. 气体的微观结构

3.1.1. 玻耳兹曼方程、福克–普朗克方程、波戈留波夫–玻恩–格林–柯克伍德–伊冯(B. B. G. K. Y.)方程系、麦克斯韦分布函数及符拉索夫方程

定义一个粒子的几率分布函数为$f(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{p},\ t)$，则

$$f(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{p},\ t)dx\,dy\,dz\,dp_x\,dp_y\,dp_z=f(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{p},\ t)dV_r\,dV_p \tag{3-1}$$

就是在时刻t找到一个处在$\boldsymbol{p}$点的体积元dV_p内具有动量为$\boldsymbol{p}$、位置在$\boldsymbol{r}$处的体积元dV_r内坐标为$\boldsymbol{r}$的粒子的几率。类似地，我们定义分布函数$f(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{v},\ t)$，因此当平均粒子密度为$N$时，

$$Nf(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{v},\ t)dx\,dy\,dz\,dv_x\,dv_y\,dv_z=Nf(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{v},\ t)dV_r\,dV_v \tag{3-2}$$

给出在坐标$\boldsymbol{r}$、速度$\boldsymbol{v}$附近的六维相空间$dV_r\,dV_v$内可能找到的粒子数。$f(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{p},\ t)$的玻耳兹曼方程可以写成(Boltzmann, 1872)：

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\boldsymbol{p}}{m}\cdot\nabla_r f-\nabla_r\varphi\cdot\nabla_p f=\left(\frac{df}{dt}\right)_{碰}, \tag{3-3}$$

式中$\varphi(\boldsymbol{r})$是作用在每一个粒子上的势能，$\boldsymbol{p}$是动量，m是粒子质量，∇_r是坐标梯度，∇_p是动量梯度，$(df/dt)_{碰}$是由于碰撞引起的f的变化率。注意$\dot{p}=-\nabla_r\varphi$，在笛卡儿坐标中可以把(3-3)式写成：

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\dot{x}\frac{\partial f}{\partial x}+\dot{y}\frac{\partial f}{\partial y}+\dot{z}\frac{\partial f}{\partial z}+\dot{p}_x\frac{\partial f}{\partial p_x}+\dot{p}_y\frac{\partial f}{\partial p_y}+\dot{p}_z\frac{\partial f}{\partial z}=\left(\frac{df}{dt}\right)_{碰},$$

式中“·”表示对时间的一阶导数。$f(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{v},\ t)$的玻耳兹曼方程是：

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla_r f+\frac{\boldsymbol{F}}{m}\cdot\nabla_v f=\left(\frac{df}{dt}\right)_{碰}, \tag{3-4}$$

式中$\boldsymbol{v}$是速度，$\boldsymbol{F}$是作用在每一个粒子上的力，m是粒子质量，∇_r及∇_v分别表示坐标梯度及速度梯度。作为天体物理学中力的一个例子，电荷为q、质量为m的一个粒子，在电场强度为E、磁场强度为H及加速度为g的引力场中受到的力：

$$\boldsymbol{F}=q\left(\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}\right)-mg\boldsymbol{n}_r。$$

这里$\boldsymbol{n}_r$是从质量m到另一质量M的径向单位矢量，由于重力引起的加速度是GM/r^2，其中引力常数$G=$*6.6720$\times10^{-8}$达因·厘米^2·克$^{-2}$，r是在质量M与质量为m的粒子之间的距离。

对于i型和j型双粒子系统，碰撞项取福克–普朗克(Fokker-Planck)形式(Fokker, 1914; Rosenbluth, MacDonald 和 Judd, 1957)：

$$\frac{1}{\Gamma_i}\left(\frac{df_i}{dt}\right)_{碰}=-\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{v}_i}\cdot\left(f_i\frac{\partial H_i}{\partial\boldsymbol{v}_i}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\boldsymbol{v}_i\cdot\partial\boldsymbol{v}_i}\left(f_i\frac{\partial^2 G_i}{\partial\boldsymbol{v}_i\cdot\partial\boldsymbol{v}_i}\right), \tag{3-5}$$

式中

$$\Gamma_i=-\frac{4\pi e_i^4\ln\left(\sin\dfrac{\theta_{\min}}{2}\right)}{m_i^2},$$

e_i 和 m_i 分别是 i 型粒子的电荷和质量，$\theta_{\min}$ 是散射角的最小值，

$$H_i=\sum_j N_j\left(\frac{e_j}{e_i}\right)^2\left(\frac{m_i+m_j}{m_j}\right)\int d\boldsymbol{v}_j\frac{f_j}{g}$$

以及

$$G_i=\sum_j N_j\left(\frac{e_j}{e_i}\right)^2\int d\boldsymbol{v}_j g f_j,$$

式中 N_i 是 i 型粒子的密度，同时

$$g=|\boldsymbol{v}_i-\boldsymbol{v}_j|。$$

对于温度为 T、由质量为 m 的电子和质量为 m_i 的质子组成的等离子体，

$$g\approx\left(\frac{3kT}{m}\right)^{1/2};$$

$$\Gamma_i\approx\frac{4\pi e^4}{m_i^2}\ln\Lambda,$$

式中

$$\Lambda=24\pi NR_D^3=\frac{2}{\theta_{\min}},$$

N 是平均粒子密度，德拜半径 R_D 由下式给出(Debye 和 Hückel, 1923)：

$$R_D=\left(\frac{kT}{4\pi Ne^2}\right)^{1/2}\approx\left(\frac{1}{Ng}\right)^{1/3}。$$

我们已假定 $NR_D^3\gg 1$。

对于一个无限单粒子系统，s 个粒子的分布函数 f_s 与 f_{s+1} 的关系为由下式给出的 B. B. G. K. Y. 方程系(Bogolyubov, 1946; Born 和 Green, 1949; Green, 1952; Kirkwood, 1947; Yvon, 1935)：

$$\frac{\partial f_s}{\partial t}+\{f_s;H_s\}=N\int\left\{\sum_{i=1}^{s}\varphi_{i,\ s+1};f_{s+1}\right\}dX_{s+1},\tag{3-6}$$

式中依赖于 $\boldsymbol{r}_i$ 和 $\boldsymbol{p}_i$ 的两个量 A 和 B 的泊松括号定义为：

$$\{A;B\}=\sum_{i=1}^{s}\left[\frac{\partial A}{\partial \boldsymbol{r}_i}\cdot\frac{\partial B}{\partial \boldsymbol{p}_i}-\frac{\partial A}{\partial \boldsymbol{p}_i}\cdot\frac{\partial B}{\partial \boldsymbol{\Gamma}_i}\right];$$

s 是粒子总数；H_s 是 s 个粒子的哈密顿函数：

$$H_s=\sum_{i=1}^{s}\frac{p_i^2}{2m}+\sum_{i<j=1}^{s}\varphi_{ij}+常数;$$

$\varphi_{ij}=e^2/(|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j|)$，对于电荷为 e 的电子来说，常数项代表电子在离子场中运动的势能。对于处于热平衡状态的孤立系统，方程系的第一个方程就成为麦克斯韦分布函数(Maxwell, 1860)：

$$fdp=4\pi\left(\frac{1}{2\pi mkT}\right)^{-3/2}\exp\left[-\frac{p^2}{2mkT}\right]p^2dp。\tag{3-7}$$

在 $g=1/(NR_D^3)=0$ 的极限情况下，玻耳兹曼方程成为无碰撞的，即 $(\partial f/dt)_{碰}=0$，B. B. G. K. Y. 方程系列成为符拉索夫方程(Vlasov, 1938, 1945)：

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\boldsymbol{v}_1\cdot\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}_1}-\left[\frac{N}{m}\int d\boldsymbol{x}_2\,d\boldsymbol{v}_2\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial \boldsymbol{x}_1}f(\boldsymbol{x}_2,\ \boldsymbol{v}_2)\right]\cdot\frac{\partial f(\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{v}_1)}{\partial \boldsymbol{v}_1}=0\tag{3-8}$$

或

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\boldsymbol{v}_1\cdot\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}_i}-\frac{e}{m}\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}_1}=0,$$

式中 E 是电场强度。朗道(Landau, 1946)给出了符拉索夫方程的线性化微扰解，这种解导出了已在第 1.32 节(1-254)至(1-256)式所讨论过的电子等离子体振荡；汤克斯等(Tanks 和 Langmuir, 1929; 及 Bohm 和 Gross, 1949)研究过这个问题。查普曼(Chapman, 1916, 1917)、恩斯柯克(Enskog, 1917)以及查普曼和柯林(Chapman 和 Cowling, 1953)写的书里

讨论了根据玻耳兹曼方程计算输运系数及速度分布函数的普遍理论。后面各分节中给出这些计算的主要结果。

3.1.2. 碰撞-碰撞之间的平均自由程和平均自由时间

对于数密度为 N、有效碰撞半径为 a_0 的中性原子组成的气体，两次碰撞之间的平均自由程 l 为(Clausius, 1858)：

$$l=(N\pi a_0^2)^{-1}={}^*1.136706\times10^{16}N^{-1}\text{ 厘米 （氢原子）}, \tag{3-9}$$

式中我们已取 $a_0={}^*0.52917706\times10^{-8}$ 厘米，即第一玻尔轨道的半径。量 $\sigma_c=\pi a_0^2$ 称为碰撞截面。

当两个带电粒子相碰时，碰撞半径的一种量度是较慢粒子与较快粒子的原来路径间的垂直距离 b。设 Z_1e 和 Z_2e 是两个电荷，此时这种碰撞参数就为(Rutherford, 1911)：

$$b=\frac{Z_1Z_2e^2}{M_1v_1^2\tan(\theta/2)}, \tag{3-10}$$

式中 M_1 和 v_1 分别是较快电荷的质量和速度，θ 是偏转角。在温度为 T 的热平衡条件下，均方根速度 $v_{均方根}$ 由下式给出：

$$\begin{aligned}v_{均方根}&=(3kT/M)^{1/2}={}^*6.743048\times10^5T^{1/2}\text{ 厘米·秒}^{-1}\quad\text{（电子）}\\&={}^*1.573199\times10^4T^{1/2}\text{ 厘米·秒}^{-1}\quad\text{（氢原子）。}\end{aligned} \tag{3-11}$$

对于大部分是中性粒子组成的气体，(3-9)式、(3-10)式及(3-11)式给出平均自由程：

$$l\approx\frac{M^2v^4}{N_eZ^2e^4}={}^*3.223143\times10^6T^2(Z^2N_e)^{-1}\text{ 厘米}, \tag{3-12}$$

式中 N_e 是自由电子密度，并且有效碰撞假定是指偏转角为 90° 的碰撞。

当大部分是带电粒子组成的气体时，碰撞参数的最大值为：

$$b_m=R_D=\left(\frac{kT}{4\pi N_ee^2}\right)^{1/2}={}^*6.900878\left(\frac{T}{N_e}\right)^{1/2}\text{ 厘米}, \tag{3-13}$$

式中 R_D 是德拜半径，T 是温度，N_e 是电子密度。在这种情况下，必须把碰撞参数对它的值的变化范围求积分而得到(Pines 和 Bohm, 1952; Spitzer, 1962)：

$$l\approx\frac{M^2v_{均方根}^4}{Z^2N_ee^4\ln\Lambda}=\frac{{}^*3.223143\times10^6T^2}{Z^2N_e\ln\Lambda}\text{ 厘米}, \tag{3-14}$$

式中

$$\Lambda=\frac{R_D}{b}=\frac{3}{2Z_1Z_2e^3}\left(\frac{k^3T^3}{\pi N_e}\right)^{1/2}={}^*1.238922\times10^4\frac{T^{3/2}}{N_e^{1/2}}。 \tag{3-15}$$

由(3-14)式可知，只要电子同质子具有相同的运动温度，则电子与电子碰撞的平均自由程同质子与质子碰撞的平均自由程相同。利用泊松分布，理想气体的一个粒子在行进距离 x 以后将发生 n 次碰撞的几率 $P_n(x/l)$ 由下式给出：

$$P_n(x/l)=[(x/l)^n/n!]\exp(-x/l), \tag{3-16}$$

式中 l 是平均自由程。

对于处在温度为 T 的平衡状态的理想气体来说，就有动量 p 的麦克斯韦分布，碰撞之间的平均自由时间 τ 为：

$$\tau=4\pi ml\int_0^\infty\frac{p}{(2\pi mkT)^{3/2}}\exp\left[\frac{-p^2}{2mkT}\right]dp=l\left(\frac{2m}{\pi kT}\right)^{1/2}, \tag{3-17}$$

即

$$\tau\approx lv_{热}^{-1},$$

式中 l 是平均自由程，m 是粒子质量，k 是玻耳兹曼常数，热速度 $v_{热}\approx v_{均方根}=(3kT/m)^{1/2}$。

利用(3-9)式、(3-11)式、(3-12)式、(3-14)式及(3-17)式,我们得到:

$$\tau \approx 10^{12} T^{-1/2} N^{-1} \text{ 秒} \quad (\text{氢原子});$$

$$\tau \approx 4T^{3/2} N_e^{-1} \text{ 秒} \quad (\text{电子}, N_e \ll N); \tag{3-18}$$

$$\tau \approx 4T^{3/2} (N_e \ln \Lambda)^{-1} \text{ 秒} \quad (\text{电子}, N_e \gg N),$$

式中 N 是中性原子的密度, N_e 是电子密度, 利用泊松分布, 我们可以确定理想气体的粒子在时间 t 内将发生 n 次碰撞的几率 $P_n(t/\tau)$:

$$P_n(t/\tau) = [(t/\tau)^n/n!] \exp[-t/\tau]。 \tag{3-19}$$

对于非常接近平衡状态的情况, 我们利用平均自由时间 τ 就可得出近似的玻耳兹曼方程:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{p}}{m} \cdot \nabla_r f - \nabla_r \varphi \cdot \nabla_p f \approx \frac{1}{\tau} [f_0(r, p) - f] \tag{3-20}$$

或

$$f + \tau\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) = f_0 - \tau\left[\left(\frac{\boldsymbol{p}}{m}\right) \cdot \nabla_r f_0 + \boldsymbol{F} \cdot \nabla_p f_0\right],$$

式中平衡解 $f_0(r, p)$ 由(3-7)式给出。

当质量为 M_+, 电荷为 Z_+ 和速度为 v_+ 的试探粒子流注入处于热平衡的等离子体时, 粒子偏转约 $\pi/2$ 量级的角度的特征时间 τ_D 由下式给出:

$$\tau_D \approx \frac{M_+^2 v_+^3}{16\pi N_e^4 Z_+^2 \ln \Lambda} \quad \left(\text{当 } v_+ \gg \left(\frac{kT}{m}\right)^{1/2}\right), \tag{3-21}$$

式中 Λ 由(3-15)式给出, N 是等离子体数密度。

3.1.3. 粘滞性和雷诺数

如果处于平衡状态的气体中的一部分在 x 方向上有一个给定的漂移速度 v_x, 则将会有一个倾向于减少切变率 $\partial v_x/\partial z$ 的回复力 $\boldsymbol{F} = \mu \partial v_x/\partial z$。这里 μ 称为动力粘滞系数。考虑作用在体积元的整个表面上的力就可得出该体积元内动量的净增加率。这种净力为:

$$\boldsymbol{F} = \mu \nabla^2 \boldsymbol{v}, \tag{3-22}$$

式中 $\boldsymbol{v}$ 是速度, μ 是动力粘滞系数。当无其他力时, 由(3-7)式、(3-20)式及(3-22)式立即可知(参看 Maxwell, 1866):

$$\mu \approx MlN v_{\text{均方根}} = MlN \left(\frac{3kT}{M}\right)^{1/2}, \tag{3-23}$$

式中 M 是原子或分子质量, l 是由(3-9)、(3-12)或(3-14)式给出的平均自由程, N 是原子或分子的数密度, $v_{\text{均方根}}$是热速度, T 是温度。例如, 对氢原子来说

$$\mu \approx 5.7 \times 10^{-5} T^{1/2} \text{ 克·厘米}^{-1}\text{·秒}^{-1}, \tag{3-24}$$

而对完全电离气体来说

$$\mu \approx \frac{M_i^{1/2}(3kT)^{5/2}}{Z^4 e^4 \ln \Lambda} \approx 2 \times 10^{-15} \frac{T^{5/2} A_i^{1/2}}{Z^4 \ln \Lambda} \text{ 克·厘米}^{-1}\text{·秒}^{-1}, \tag{3-25}$$

式中 M_i 是离子质量, Ze 是离子电荷, A_i 是正离子的原子量, 因子 Λ 由(3-15)式给出。

当存在磁感应强度 B 时, 平行于 B 的方向的有效粘滞度由(3-25)式给出。在垂直于 B 的方向, 粘滞度为(Simon, 1955):

$$\mu_\perp = \frac{2}{5}\left(\frac{\pi}{M_i k T_i}\right)^{1/2} \frac{Z^4 e^4 N_i^2 M_i^2 c^2 \ln \Lambda}{Z^2 e^2 B^2}$$

$$= {}^*2.708715 \times 10^{-26} \frac{A_i^{3/2} Z^2 N_i^2 \ln \Lambda}{T_i^{1/2} B^2} \text{ 克·厘米}^{-1}\text{·秒}^{-1}, \tag{3-26}$$

式中 M_i 及 N_i 分别是离子质量及数密度，A_i 是离子的原子量，T_i 是离子的温度。

气体阻息湍流运动的本领由雷诺(Reynolds)系数来量度(Stokes, 1851; Reynolds, 1883)。设大小为 L 的一个湍流区具有速度为 v，若下述的雷诺数大于 1，则粘滞效应将不会使湍流运动受到阻息：

$$R_e = Lv\rho/\mu。 \tag{3-27}$$

这里 μ 是动力粘滞系数，ρ 是质量密度。运动粘滞系数 ν 是经常要用到的，其中

$$\nu = \mu/\rho, \text{以及 } R_e = Lv/\nu。 \tag{3-28}$$

把(3-24)式、(3-25)式及(3-26)式用于(3-27)式，我们得出对于非电离气体

$$R_e \approx 2\times10^4 \rho L v T^{-1/2}。 \tag{3-29}$$

对于无磁场的完全电离气体

$$R_e \approx 5\times10^{14}\ \frac{\rho Z^4 L v \ln\Lambda}{T^{5/2} A_i^{1/2}}, \tag{3-30}$$

对于运动是垂直于磁场的完全电离气体

$$R_e \approx 3\times10^{25}\ \frac{\rho L v T^{1/2} B^2}{A_i^{3/2} Z^2 N_i^2 \ln\Lambda}。 \tag{3-31}$$

3.1.4. 电导率及迁移率

当电离气体受到强度为 E 的电场作用时，自由电子和离子将会漂移而引起电流流动。当自由电子的数密度 N_e 小于中性原子或分子的总的数密度 N 时，净漂移速度 v 将由碰撞所决定。在这种情况，每一个自由电子或离子的运动方程由下式给出：

$$ZeE = m v_{均方根}\, v/l = mv/\tau, \tag{3-32}$$

式中 ZeE 是作用在电荷 Ee 上的洛伦兹力，m 是粒子质量，$v_{均方根}$ 是粒子均方根速度，l 是平均自由程，τ 是在两次碰撞之间的平均自由时间。设自由电子的数密度为 N，则净电流密度 J 由下式给出：

$$J = \sigma E = N_e e v, \tag{3-33}$$

式中电导率 σ 由下式给出：

$$\sigma = \frac{N_e e^2 l}{m v_{均方根}}。 \tag{3-34}$$

(3-34)式中的 $v_{均方根}$ 和 l 分别用(3-11)和(3-12)式代入，我们得到：

$$\sigma = \frac{(3kT)^{3/2}}{e^2 m^{1/2}} = {}^*1.210587\times10^9 T^{3/2}\ \text{静电单位}, \tag{3-35}$$

这是对部分电离气体来说的。单位换算关系为 1 姆·厘米$^{-1}=10^{-9}$ 电磁单位 $={}^*9\times10^{11}$ 静电单位。完全电离气体的相应表达式为(Cowling, 1945)：

$$\sigma \approx 6.5\times10^6 T^{3/2}\ \text{静电单位}, \tag{3-36}$$

式中已考虑电子–电子碰撞及电子屏蔽。如柯林(Cowling, 1945; 1946)所指出的，线尺度为 L 的磁场的平均寿命 τ 的量级为：

$$\tau \approx L^2\sigma/c^2, \tag{3-37}$$

式中 σ 的单位是静电单位。

施皮策等(Spitzer 和 Harm, 1953)给出了电离气体的电阻率 η 的详尽公式。他们得出：

$$\eta = \frac{c^2}{\sigma} = \frac{\pi^{3/2} m^{1/2} Z e^2 c^2 \ln\Lambda}{2(2kT)^{3/2}\gamma} = {}^*3.797320\times10^3\ \frac{Z\ln\Lambda}{\gamma T^{3/2}}\ \text{欧·厘米}, \tag{3-38}$$

式中 Λ 由(3-15)式给出，γ 是取决于 Z 的一个因子，当 $Z=1$ 时，$\gamma=0.582$，当 $Z=\infty$ 时，$\gamma=1$。单位换算关系是 1 欧·厘米 $={}^*(10^{-12/9})$ 静电单位 $=10^9$ 电磁单位。

由(3-33)式至(3-36)式，自由电子的净漂移速度为：

$$v\approx\frac{\sigma}{N_e e}E=\Omega E, \tag{3-39}$$

式中 N_e 是自由电子的密度，迁移率 Ω 由下式给出，对于部分电离气体

$$\Omega\approx10^{19}T^{3/2}N_e^{-1}\ \text{静电单位}, \tag{3-40}$$

对于完全电离气体

$$\Omega\approx10^{16}T^{3/2}N_e^{-1}\ \text{静电单位}。$$

3.1.5. 扩散及磁雷诺数

在离子密度为 N_i 的情况下，空间梯度 ∇N_i 所引起的电流密度 J 为：

$$J=elZv_{\text{均方根}}\nabla N_i, \tag{3-41}$$

式中假定离子在平均自由程 l 内是以均方根速度 $v_{\text{均方根}}$ 运动的。根据电荷守恒的连续性方程((1-38)式)，我们得到扩散方程：

$$\frac{\partial N_i}{\partial t}=\frac{\nabla\cdot J}{eZ}=D\nabla^2N_i, \tag{3-42}$$

式中扩散常数：

$$D\approx lv_{\text{均方根}}=l\left(\frac{3kT}{m}\right)^{1/2}=\frac{kT}{e}\,\Omega, \tag{3-43}$$

式中 T 是温度，Ω 是迁移率。近似平均自由程 l 由(3-9)式、(3-12)式及(3-14)式给出。特征"偏转时间"t_D 可以定义为：

$$t_D=D/v^2_{\text{均方根}}=l/v_{\text{均方根}}, \tag{3-44}$$

长度 L 的特征扩散时间为：

$$t=L^2/D。 \tag{3-45}$$

张德拉塞卡(Chandrasekhar, 1943)已给出扩散进入到一群场粒子中的试探粒子的速度弥散公式。设下标 $/\!/$ 及 $\perp$ 分别表示平行及垂直于试探粒子原来运动的方向，则当场粒子的分布为麦克斯韦分布时

$$\begin{aligned}\langle\Delta v_{/\!/}^2\rangle&\approx\frac{v^3}{l}\left\{G\left[\left(\frac{mv^2}{2kT}\right)^{1/2}\right]\right\};\\ \langle\Delta v_{\perp}^2\rangle&\approx\frac{v^3}{l}\left\{\varphi\left[\left(\frac{mv^2}{2kT}\right)^{1/2}\right]-G\left[\left(\frac{mv^2}{2kT}\right)^{1/2}\right]\right\},\end{aligned} \tag{3-46}$$

式中 $\varphi(x)$ 是误差函数，$G(x)=[\varphi(x)-x\varphi'(x)]/2x^2$，$\Delta v$ 表示速度的弥散，{ }中的因子量级为 1，v 是场粒子的速度，试探粒子的平均自由程 l 由(3-14)式给出。由(3-46)式可知，特征偏转时间为：

$$t_D=\frac{v^2}{\langle\Delta v^2\rangle}\approx\frac{1}{v}。 \tag{3-47}$$

把电场强度 E、磁感应强度 B 及电流密度 J 联系起来的麦克斯韦方程组(参看(1-39)至(1-43)式)：

$$\begin{aligned}&\nabla\times\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=0;\\ &\nabla\times\boldsymbol{B}=\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J},\end{aligned} \tag{3-48}$$

在磁流体力学近似的情况下，上式中已忽略了位移电流。利用 $\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E}$ 我们得到扩散方程：

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}=D_M\nabla^2\boldsymbol{B}, \tag{3-49}$$

式中已假定忽略了整体速度（参看(3-258)式），磁扩散常数 D_M 由下式给出：

$$D_M=\frac{c^2}{4\pi\sigma}=\frac{\eta}{4\pi}。 \tag{3-50}$$

利用(3-35)式或(3-36)式可以求出电导率 σ。设 L 为 B 的空间变化的特征大小，磁场扩散的衰变时间为(Cowling, 1945, 1946)：

$$\tau_M=\frac{L^2}{D_M}=\frac{4\pi\sigma L^2}{c^2}。 \tag{3-51}$$

若磁雷诺数

$$R_M=v\tau_M/L \tag{3-52}$$

大于 1，则磁力线将会与速度为 v、尺度为 L 的流体一起运动。当 $R_M>1$ 时，与流体或气体一起的磁力线的输运就会超过磁力线的扩散。

3.1.6. 热导率及普朗特数

当存在温度梯度 ∇T 时，每单位面积的热流 Q 由下式给出：

$$Q\approx-\varkappa\nabla T, \tag{3-53}$$

式中热传导系数 $\varkappa$ 为：

$$\varkappa=\frac{5}{3}\frac{kTl}{v_{均方根}}N\left(\frac{3}{2}\frac{k}{m}\right)=\frac{5}{3}\mu\left(\frac{3}{2}\frac{k}{m}\right)。 \tag{3-54}$$

这是对具有平均自由程为 l、均方根速度为 $v_{均方根}=(3kT/m)^{1/2}$、粒子数密度为 N、粒子质量为 m、粘滞度为 μ、温度为 T 的气体而言的。平均自由程 l 或粘滞度 μ 可以由(3-9)式、(3-12)式、(3-14)式、(3-24)式、(3-25)式或(3-26)式求出。量 $(3k/2m)$ 由 (c_V/M) 给出，其中 c_V 和 M 分别是气体的比热和分子量。由(3-25)、(3-26)及(3-54)式可知(参看 Spitzer, 1962)，对于完全电离气体：

$$\varkappa\approx2\times10^{-4}\frac{T^{5/2}}{Z^4\ln\Lambda}\ 尔格\cdot秒^{-1}\cdot开^{-1}\cdot厘米^{-1}, \tag{3-55}$$

对于垂直于磁场方向的热传导：

$$\varkappa\approx1.5\times10^{-17}\frac{A_i^{1/2}Z^2N_i^2\ln\Lambda}{T^{1/2}B^2}\ 尔格\cdot秒^{-1}\cdot开^{-1}\cdot厘米^{-1}。 \tag{3-56}$$

对于不可压缩流体(ρ=常数)，温度 T 随时间 t 的变化由热传导方程给出：

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla T=\frac{\varkappa}{\rho c_V}\nabla^2T=\chi\nabla^2T, \tag{3-57}$$

式中 $\varkappa$ 是热传导系数，ρ 是质量密度，c_V 是定容比热，常数 χ 称为温度传导率。

粘滞度与热导率的相对大小可以用下式给出的普朗特(Prandtl)数 P_r 加以量度(Prandtl, 1905)：

$$P_r=\frac{c_p\mu}{\varkappa}=\frac{c_p\nu\rho}{\varkappa}=\frac{\nu}{\chi}, \tag{3-58}$$

式中 c_p 是定压比热，μ 是动力粘滞系数，$\varkappa$ 是热传导系数，ν 是运动粘滞系数，ρ 是质量密度，χ 是温度传导率。

3.2. 气体热力学

3.2.1. 热力学第一定律及理想气体定律

热力学第一定律是包括热能在内的能量守恒定律的表达式。设 dQ 是一个系统从环境吸收的热能的大小，则该定律指出(Mayer, 1842; Joule, 1847; Helmholtz, 1847)：

$$dQ = dU + dW, \tag{3-59}$$

式中 dU 是当系统从一种平衡状态变到另一种平衡状态时它的内能的变化，dW 是系统对环境所作的功的大小。一个较简单的系统是流体静力学系统，此时功就是系统边界位移时系统反抗均匀的流体静压力 P 所作的功。在这种情况下，(3-59)式成为：

$$dQ = dU + PdV, \tag{3-60}$$

式中 dV 是体积 V 的改变。对于理想气体，我们还有附加的有用的关系式：

$$PV = nRT, \tag{3-61}$$

式中 n 是摩尔数，普适气体常数 $R = {}^*8.31441(26) \times 10^7$ 尔格·摩尔·开$^{-1}$，T 是温度。(3-61)式是根据当 V 为常数时 $P \propto T$ (Gay-Lussac, 1809)、$PV/T =$ 常数(Avogadro, 1811)以及当 T 为常数时 $P \propto V^{-1}$(Boyle, 1662; Townely, 1662; Power, 1663)等观测得出的。常数 nR 与其他物理常数的关系在(3-61)式的等价形式(3-76)式中给出。

3.2.2. 热容量、分子热及比热

按定义可知，一个系统的热容量 C 是在给定条件下该系统的温度升高 1 度所需要的热量。令下标 V 和 P 分别表示定容和定压条件，由(3-60)式可知，对于流体静力学系统

$$C_V = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \tag{3-62}$$

及

$$C_p = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_P = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_P + P\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P, \tag{3-63}$$

式中 $\partial/\partial T$ 表示对温度的微分。注意内能 U 只是压力 P、温度 T 及体积 V 的函数，我们由(3-62)及(3-63)式，得出关系式：

$$C_p - C_V = \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + P\right]\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P。 \tag{3-64}$$

对于理想气体，$(\partial U/\partial V)_T = 0$，由(3-61)及(3-64)式可知

$$C_p - C_V = nR, \tag{3-65}$$

式中 n 是摩尔数，R 是普适气体常数。对于非相对论性、非简并、单原子理想气体来说，$U = 3nRT/2$，并根据(3-62)及(3-63)式，$C_p = 5nR/2$ 及 $C_V = 3nR/2$。类似地，对于理想的双原子气体，$U = 5nRT/2$，$C_p = 7nR/2$ 及 $C_V = 5nR/2$。1 摩尔气体的热容量称之为分子热，常用符号 C 来表示，而 1 克气体的热容量称之为比热，通常用符号 c 来表示。

3.2.3. 绝热过程

绝热过程是指一个系统与环境间没有热交换的一种过程。也就是说，在绝热过程中由传导或辐射所引起的热量的增加或热量损耗是可以不计的。量度这种过程的量是绝热指数：

$$\gamma = C_p/C_V。 \tag{3-66}$$

对于理想的单原子、双原子及多原子气体，γ 的值分别取 5/3, 7/5 及 4/3。把绝热条件 $dQ =$

0 用于(3-60)式，则由(3-61)、(3-62)及(3-63)式可知，对于一切理想气体的绝热过程，都有

$$PV^{\gamma}=\text{常数},\ TV^{\gamma-1}=\text{常数及}\ TP^{(1-\gamma)/\gamma}=\text{常数}。$$

例如，这些方程表明气体将会冷却或被加热，这根据气体是绝热膨胀还是绝热收缩而定。

根据热力学第一定律，要求 $dQ=0$ 就意味着压力 P、温度 T 与体积 V 之间存在有一种关系。于是，可定义三个绝热指数：

$$\Gamma_1=-\left(\frac{d\ln P}{d\ln V}\right)_{\text{绝热}}=\left(\frac{d\ln P}{d\ln\rho}\right)_{\text{绝热}},$$

$$\frac{\Gamma_2}{\Gamma_2-1}=\left(\frac{d\ln P}{d\ln T}\right)_{\text{绝热}} \tag{3-67}$$

以及

$$\Gamma_3-1=-\left(\frac{d\ln T}{d\ln V}\right)_{\text{绝热}}=\left(\frac{d\ln T}{d\ln\rho}\right)_{\text{绝热}},$$

式中体积度 $V=\rho^{-1}$，ρ 是质量密度，下标"绝热"意指微分是沿绝热线 $dS=dQ/T=0$ 进行的。三个 Γ 中只有两个是独立的，我们得出恒等式：

$$\frac{\Gamma_1}{\Gamma_3-1}=\frac{\Gamma_2}{\Gamma_2-1}。 \tag{3-68}$$

在非相对论性、单原子、没有内部自由度的理想气体的经典极限下，$\Gamma_1=\Gamma_2=\Gamma_3=\gamma=C_p/C_V=5/3$。通常 Γ_1 对确定恒星的动力学不稳定性条件是重要的，而 Γ_2 及 Γ_3 则分别对确定恒星的对流及脉动不稳定性条件是重要的。

3.2.4. 多方过程

多方过程定义为在整个过程中热容量 C 保持不变的一种过程。多方指数 γ' 定义为：

$$\gamma'=\frac{C_p-C}{C_V-C}, \tag{3-69}$$

式中热容量 $C=dQ/dT$，而 C_p 及 C_V 由(3-62)式及(3-63)式所定义。对于理想气体，由(3-60)至(3-63)及(3-68)式可知

$$C=\left(C_V-\frac{nR}{\gamma'-1}\right)=\text{常数},$$

以及

$$PV^{\gamma'}=\text{常数},\ TV^{\gamma'-1}=\text{常数及}\ TP^{(1-\gamma')/\gamma'}=\text{常数}。$$

如果指数 $n=1/(\gamma'-1)$，则半径为 R、质量为 M 的多方气体球的压力 P、内能 $E_{\text{内}}$、引力能 $E_{\text{引}}$、总能量 $E_{\text{总}}$ 及中心压力 P_c 给出如下 (Lane, 1870; Emden, 1907; Chandrasekhar, 1939)：

$$\left.\begin{aligned}
&P\propto\rho^{1+1/n};\\
&E_{\text{内}}=\frac{GM^2}{R}\frac{n}{5-n};\\
&E_{\text{引}}=-\frac{GM^2}{R}\frac{3}{5-n};\\
&E_{\text{总}}=E_{\text{内}}+E_{\text{引}}=-\frac{GM^2}{R}\frac{3-n}{5-n};\\
\text{以及}\quad &P_c=KGM^{2/3}\rho_c^{4/3},
\end{aligned}\right\} \tag{3-70}$$

式中 ρ_c 是中心质量密度，当 $n=3/2(\gamma=5/3)$，$n=5/2(\gamma=7/5)$ 及 $n=3(\gamma=4/3)$ 时，分别相应的常数 $K=0.488$、0.396 及 0.364。对非相对论性单原子气体来说，$n=3/2$；对于相对论性气体来说，$n=4/3$。当 $n>3$ 时，一颗恒星没有平衡态；而当 $n=3$ 时，在能量与密度无关时，对于任何密度都存在一个平衡态。

3.2.5. 热力学第二定律及气体的熵

一个系统的熵 S 是这样定义的，以使系统熵的变化等于两个终态间 dQ/T 的积分，其中 dQ 是由环境对系统所加的热量，T 是温度。热力学第二定律指出，对于一个孤立系统[1]，

$$dS=\frac{dQ}{T}\geqslant 0, \tag{3-71}$$

式中等号适用于可逆过程，而大于号适用于不可逆过程。正如克劳修斯(Clausius, 1850; 1857; 1865)所指出的，这个定律意味着热不能自发地从较冷物体传到较热物体。对于可逆过程来说，若该过程终了时，系统的状态与初始状态相同，则有：

$$\int\frac{dQ}{T}=0, \tag{3-72}$$

这是卡诺(Carnot, 1824)首先指出的，并为开尔文(Kelvin, 1848)首先用来定义温度。

由(3-60)至(3-63)、(3-65)及(3-71)式，对于一切理想气体过程，熵的变化 dS 为：

$$dS=C_p\frac{dT}{T}-nR\frac{dP}{P}=C_V\frac{dT}{T}+nR\frac{dV}{V}=C_V\frac{dT}{T}-(C_p-C_V)\frac{d\rho}{\rho}, \tag{3-73}$$

式中 C_p 及 C_V 分别是定压及定容热容量，ρ 是质量密度，R 是普适气体常数，n 是摩尔数。

当多方指数为 $n=1/(\gamma'-1)$ 时，

$$dS=C_V(\gamma'-\gamma)\frac{d\rho}{\rho}=C_V\frac{(\gamma'-\gamma)}{\gamma'-1}\frac{dT}{T}, \tag{3-74}$$

式中 $\gamma=C_p/C_V$ 是绝热指数。

在统计力学中，给出了对给定的热力学状态规定相应的动力学状态数 W 的依据。整数 W 通常称为给定热力学状态的热力学几率。因为一个系统的最稳定态应是与系统的给定总能量相一致的最高几率态，熵 S 与几率 W 之间存在的函数关系(Boltzmann, 1868, 1877, 1896; Planck, 1901)为：

$$S=k\ln W, \tag{3-75}$$

式中尔格与开之间的换算因子是玻耳兹曼常数 $k={}^*1.380662(44)\times10^{-16}$ 尔格·开$^{-1}$。因为玻耳兹曼常数等于比值 R/N_A，理想气体的状态方程(3-61)可以写成下列等价形式：

$$P=NkT=\frac{nRT}{V}=\frac{nkN_A}{V}T=\frac{\rho RT}{\mu}=\frac{\rho kT}{\mu m_H}, \tag{3-76}$$

式中 N 是总的粒子数密度，n 是摩尔数，普适气体常数 $R={}^*8.31441(26)\times10^7$ 尔格·开$^{-1}$·摩尔$^{-1}$，阿伏伽德罗数 $N_A={}^*6.022045(31)\times10^{23}$ 摩尔$^{-1}$，ρ 是气体质量密度，μ 是平均分子量，$m_H={}^*1.6735595(86)\times10^{-24}$ 克是氢原子的质量。阿伏伽德罗数是1摩尔中的分子数目。一个有关的常数是洛喜密特数 $N_L={}^*2.686754\times10^{19}$(Loschmidt, 1865)，这是理想气体在标准状态下($V=22413.6$ 厘米^3·大气压·摩尔$^{-1}$，$T=273.15$ 开，$P=1$ 大气压 $=760$ 毫米水银柱 $=1.01325\times10^6$ 达因·厘米$^{-2}$)每立方厘米中的分子数。对于单原子非相对论性气体，在没有电离及激发的情况下，当温度并不接近于绝对零度时，熵(每摩尔的熵)由萨库尔-特特罗德方程给出(Sackur, 1911, 1913; Tetrode, 1912)：

$$S=N_Bk\ln\left[\frac{e^{5/2}g_0}{N}\left(\frac{2\pi MkT}{h^2}\right)^{3/2}\right], \tag{3-77}$$

式中 N_B 是气体原子的总数，$e=2.718282$ 是自然对数的底，g_0 是基态原子的统计权重，N 是

1) 原文无此条件，是错误的。——校者注

气体的数密度，M 是气体原子的质量。(3-77)式可以写成等价形式：

$$S=\frac{5}{2}kN_{总}+kN_{总}\ln\left[g_0\left(\frac{4\pi MU}{3h^2N_{总}}\right)^{3/2}\frac{V}{N_{总}}\right],$$

式中 V 是体积，单原子气体的内能 U 是 $3kN_{总}T/2$。因为总几率是两个单独几率的乘积，由(3-75)式可知，复合系统的熵是相加的。复杂系统的熵常常方便地用亥姆霍兹自由能来计算，这些计算在下节讨论。

(3-77)式的另一种不同形式为(参看(3-76)式)：

$$s=-\frac{R}{\mu}\ln\left(\frac{\rho}{\mu M}\right)+\frac{3}{2}\left(\frac{R}{\mu}\right)\ln(kT)+\left(C+\frac{5}{2}\right)\left(\frac{R}{\mu}\right),$$

式中 s 是比熵(每克的熵)，R 是气体常数，μ 是平均分子量(对于氢，$\mu=1$；对于 ^{4}He，$\mu=4$)，ρ 是气体质量密度，常数 $C=\ln[g_0(2\pi M/h^2)^{3/2}]$，对于氢原子 $C=20.204$，而 ^{4}He 是 22.824。对于电离气体来说，$\mu=\mu_0/(1+Z/A)$，其中 μ_0 是中性气体的分子量。在完全电离时，氢及 ^{4}He 分别为 $\mu=0.5$ 及 $\mu=4/3$。

光子气的比熵(每克的熵)为：

$$s=\frac{4aT^3}{3\rho},\tag{3-78}$$

式中辐射密度常数 $a=$*7.565660×10^{-15} 尔格·厘米$^{-3}$·度$^{-4}$，T 及 ρ 分别是该光子气的温度及质量密度。

3.2.6. 合并的第一及第二定律

对于可逆过程，合并的第一及第二定律为：

$$dU=TdS-dW,\tag{3-79}$$

式中 dU 是系统内能的变化，dS 是系统的熵的变化，dW 是系统对环境所作功的数量，T 是温度。对于流体静力学系统，这个合并的定律成为：

$$dU=TdS-PdV,\tag{3-80}$$

式中 P 是压力，dV 是体积的变化。

热力学变量组合成一些有用的函数，这包括：

焓

$$H=U+PV;\tag{3-81}$$

亥姆霍兹函数(亥姆霍兹自由能)

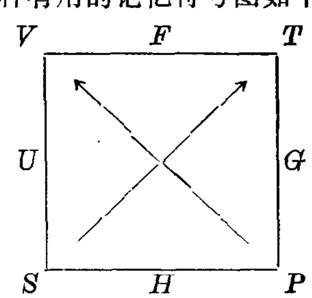
$$F=U-TS;\tag{3-82}$$

吉布斯函数 G(吉布斯自由能)

$$G=U-TS+PV=F+PV=H-TS,\tag{3-83}$$

式中 U 是内能，S 是熵。

把热力学变量联系起来的一种有用的记忆符号图如下所示：



四个热力势U、F、G及H的每一个是由它的原有的独立变量为左右两侧的。每一个势的微分表达式用它的独立变量写出来时，系数就用箭头指明。箭头离开的那个原有变量为正系数，而箭头所指的变量为负系数。所以，例如我们有：

$$dF=-PdV-SdT,$$
$$dG=-SdT+VdP,$$
$$dH=TdS+VdP,$$
$$dU=TdS+PdV。$$

麦克斯韦关系式为：

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_P=\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S;\\&\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T=-\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P;\\&\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V=\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T;\\&\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S=-\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_V,\end{aligned}\right\}\tag{3-84}$$

也可以通过旋转该图的四角而得出。

亥姆霍兹自由能F常常称为定容自由能，而吉布斯自由能G常常称为定压自由能。对于温度和体积为恒定的热平衡来说，F应是极小值，而对温度和压强不变的热平衡来说，G应是极小值。当系统经过一个等温变化，则系统在过程中所作的功永远不会超过系统的亥姆霍兹自由能变化ΔF的负值；而且若变化为可逆的话，所作的功就等于$-\Delta F$。这个事实的结果是，当一个热力学系统的亥姆霍兹自由能为极小值时，具有环境温度的这一系统是处在稳定平衡状态。一个热力学系统完全可以等价地用势U、H、F或G来描述，这只取决于所选择的独立变量是$U(V, S)$、$H(P, S)$、$F(V, T)$或$G(P, T)$。共轭变量用下列关系式描述：

$$\begin{aligned}&T=\left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V,\quad P=-\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S,\\&T=\left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)_P,\quad V=\left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_S,\\&S=-\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V,\quad P=-\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T,\quad U=-T^2\left(\frac{\partial}{\partial T}\frac{F}{T}\right)_{V,N},\\&S=-\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_P,\quad V=\left(\frac{\partial G}{\partial P}\right)_T,\end{aligned}\tag{3-85}$$

式中下标V、T、P或S分别表示定容、等温、定压或等熵。

按照统计力学，由$N_{总}$个粒子组成的非简并系统具有的自由能F为：

$$F=-kT\ln Q,\tag{3-86}$$

式中理想玻耳兹曼气体的配分函数Q由下式给出(Gibbs, 1902)：

$$Q=\sum_n\exp\left(\frac{-E_n}{kT}\right)=\left[Z\left(\frac{e}{N_{总}}\right)\right]^{N_{总}},\tag{3-87}$$

式中E_n是系统的第n能态的能量，Z是单粒子配分函数，$e=2.7182812$是自然对数的底。如果某一能级E_n有g_n个容许能态，则此能级就被说成是简并的，g_n就称为是它的统计权重。在这种情况，

$$Q=\sum_n g_n\exp\left(\frac{-E_n}{kT}\right)。\tag{3-88}$$

一个粒子具有能量 E_n 的几率 P 由下式给出：

$$P=\frac{1}{Q}\exp\left(\frac{-E_n}{kT}\right)。\tag{3-89}$$

一个分子的配分函数 Z 由下式给出：

$$Z=Z_{平移}\cdot Z_{转动}\cdot Z_{振动}\cdot Z_{电子},\tag{3-90}$$

式中下标平移、转动、振动及电子分别表示平移、转动、振动及电子配分函数。这些配分函数分别为：

$$Z_{平移}=\left(\frac{2\pi MkT}{h^2}\right)^{3/2}V,\tag{3-91}$$

式中 M 是粒子质量，V 是气体占有的体积；

$$Z_{转动}=\frac{8\pi^2IkT}{h^2\sigma}=\frac{kT}{h\nu_{转动}\sigma},\tag{3-92}$$

这是对双原子或线型多原子分子而言的。这里 I 是转动惯量，$I=h/(8\pi^2\nu_{转动})$，其中 $\nu_{转动}$ 是转动频率，对称因子 σ 等于 1 加上全同原子的换位数（对于全同原子的双原子分子，$\sigma=2$；不同原子的合成分子，$\sigma=1$）。对于非线型多原子分子，

$$Z_{转动}=\frac{8\pi^2}{\sigma}\left(\frac{2\pi IkT}{h^2}\right)^{3/2};\tag{3-93}$$

$$Z_{振动}=\left[1-\exp\left(\frac{-h\nu_{振动}}{kT}\right)\right]^{-1},\tag{3-94}$$

其中 $\nu_{振动}$ 是振动频率。

$$Z_{电子}=\sum_n g_n\exp\left(\frac{-E_n}{kT}\right)=u\exp\left(\frac{-E_0}{kT}\right),\tag{3-95}$$

式中 g_n 是能量为 E_n 的能级 n 的统计权重，E_0 是零点能量（基态的能量），离子配分函数 u 由下式给出：

$$u=\sum_k g_k\exp\left(\frac{-E_k}{kT}\right)=g_0+g_1\exp\left(\frac{-E_1}{kT}\right)+\cdots,\tag{3-96}$$

式中 $E_n=E_k-E_0$ 是处于第 n 能态的离子的激发能，E_k 是在基态以上的能级 k 的能量，g_k 是能级 k 的统计权重。一个具有角动量 J 的能级有 $g_k=2J+1$，而类氢原子的 $g_k=2k^2$。自由电子的统计权重是 $g_e=2$。

由(3-86)～(3-96)式可知，非简并的、非相对论性的、单原子气体的自由能由下式给出：

$$F=-N_{总}kT\ln\left[\frac{eVg_0}{N_{总}}\left(\frac{2\pi MkT}{h^2}\right)^{3/2}\right],\tag{3-97}$$

式中基态能级的统计权重 g_0 是假定等于 $Z_{电子}$。单原子气体的熵(3-77)式由(3-85)及(3-97)式得出。更复杂系统的自由能及熵可用(3-85)至(3-95)式以类似方式推导得出。内能 U 由下列各式给出：单原子气体

$$U=\frac{3}{2}N_{总}kT,\tag{3-98}$$

双原子的或线型多原子分子的转动能

$$U_{转动}=N_{转动}kT,$$

非线型多原子分子

$$U_{转动}=\frac{3}{2}N_{总}kT。$$

$N_{总}$ 个全同振子(双原子分子)的振动能

$$U_{振动}=N_{总}\frac{h\nu_{振}}{\left[\exp\left(\frac{h\nu_{振}}{kT}\right)-1\right]}。$$

对于由假定是费密子或玻色子一类的粒子组成的系统,我们得出:

$$F=-kT\ln Z+\mu N_{总}=-PV+\mu N_{总}, \tag{3-99}$$

式中巨配分函数 Z 由下式给出:

$$\ln Z=\sum_k g(\varepsilon)\ln\{1\pm\exp[(\mu-\varepsilon_k)/kT]\}^{\pm1}, \tag{3-100}$$

其中 μ 是所考虑的这类粒子的化学势, ε_k 是处于量子态 k 的一个代表"粒子"的能量, $g(\varepsilon)$ 是能态 k 的统计权重。费密子取"+"号,而玻色子取"−"号。$N_{总}$ 是整个系统所考虑的这类粒子的总数, P 是压力, V 是体积。设 g_i 表示第 i 分立能态的统计权重, $4\pi p^2Vdp/h^3$ 是连续平移能态的统计权重,则

$$g(\varepsilon)=g_i\frac{4\pi p^2Vdp}{h^3},$$

式中 p 是动量, V 是体积。

3.2.7. 能斯脱热定理

能斯脱定理(Nernst, 1906, 1926)指出在温度为绝对零度时每一个热力学系统的熵总是能取为零。按照玻耳兹曼-普朗克关系(3-75)式,当 $S=0$ 时 $W=1$,所以在绝对零度时一个系统的热力学状态相当于只有一种动力学状态。这种基态是与系统相容的最低能量的动力学状态。按照能斯脱定理,在温度 T 接近零度的极限情况,

$$S=\Delta S=C_p=C_V=0 \quad (当\ T=0)。 \tag{3-101}$$

能斯脱定理能够与唯象原理——任何系统的温度不可能降低到绝对零度联系起来(Nernst, 1926)。

3.2.8. 热力学量的涨落

气体中粒子的热运动引起了气体温度 T、压力 P、体积 V、能量 U、熵 S 及粒子总数 $N_{总}$ 的涨落。通常对于任何一个物理量 X,这些涨落可用围绕平均值 $\langle X\rangle$ 的均方涨落 $\langle(\Delta X)^2\rangle$ 来描述,其中括号 $\langle\ \rangle$ 表示对时间求平均。

温度 T 及体积 V 的均方涨落 $\langle(\Delta T)^2\rangle$ 及 $\langle(\Delta V)^2\rangle$ 分别由以下两式给出 (Landau 和 Lifshitz, 1969):

$$\begin{aligned}\langle(\Delta T)^2\rangle&=\frac{kT^2}{C_v},\\ \langle(\Delta V)^2\rangle&=-kT\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T,\end{aligned} \tag{3-102}$$

式中 C_V 是定容比热,微分是在温度不变下进行的。粒子总数 N 的均方涨落 $\langle(\Delta N)^2\rangle$ 为:

$$\langle(\Delta N)^2\rangle=kT\left(\frac{\partial N}{\partial\mu}\right)_{T,V}, \tag{3-103}$$

式中化学势 μ 由下式给出:

$$\mu=\left(\frac{\partial U}{\partial N}\right)_{S,V}=-T\left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{U,V}=\left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{V,T}=\left(\frac{\partial G}{\partial N}\right)_{P,T}。 \tag{3-104}$$

对处于热动平衡(黑体辐射)之中的光子,我们得出 $\mu=0$; 对于非相对论性的、**单原子气体,** 我们得出:

$$\mu=kT\ln\left[\frac{N_{总}}{gV}\left(\frac{2\pi\hbar^2}{mkT}\right)^{3/2}\right]=kT\ln\left[\frac{P}{g(kT)^{5/2}}\left(\frac{2\pi\hbar^2}{m}\right)^{3/2}\right],$$

式中 $N_{总}$ 是粒子的总数; m 是一个气体粒子的质量; g 是基态的统计权重(简并度),例如对于电子气, $g=2$。对于理想气体,(3-103)式给出 $\langle(\varDelta N)^2\rangle=N$。

熵 S 及压力 P 的均方涨落 $\langle(\varDelta S)^2\rangle$ 及 $\langle(\varDelta P)^2\rangle$ 由下式给出:

$$\langle(\varDelta S)^2\rangle=C_p$$

及

$$\langle(\varDelta P)^2\rangle=-kT\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S。\tag{3-105}$$

由(3-103)式可知,对于玻耳兹曼气体,处于第 k 量子态的粒子数的均方涨落等于在该量子态的粒子数。对于费密气体,处于第 k 量子态的粒子平均数 $\langle N_k\rangle$ 与它的均方涨落 $\langle(\varDelta N_k)^2\rangle$ 的关系为:

$$\langle(\varDelta N_k)^2\rangle=\langle N_k\rangle(1-\langle N_k\rangle);\tag{3-106}$$

而对于爱因斯坦-玻色气体(一种光子气)则为:

$$\langle(\varDelta N_k)^2\rangle=\langle N_k\rangle(1+\langle N_k\rangle)。$$

对于光子气,在能量为 E、频率范围为 ν 至 $\nu+d\nu$ 的均方涨落 $\langle(\varDelta E)^2\rangle$,则由下式给出(Einstein, 1925):

$$\langle(\varDelta E)^2\rangle=h\nu E+\frac{c^3E^2}{V8\pi\nu^2d\nu},\tag{3-107}$$

式中 V 是体积。

3.3. 统计性质及状态方程

3.3.1. 非简并的理想气体

3.3.1.1. 能量和速度的麦克斯韦分布函数

具有动能在 ε 与 $\varepsilon+d\varepsilon$ 之间的理想气体粒子的数密度 $n(\varepsilon)$ 由下式给出:

$$n(\varepsilon)=\frac{g(\varepsilon)}{V}\exp\left(\frac{\mu}{kT}\right)\exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT}\right)d\varepsilon,\tag{3-108}$$

式中 $g(\varepsilon)$ 是可能的粒子能态 ε 的数目,并由下式给出:

$$g(\varepsilon)d\varepsilon=\frac{4\pi gV}{h^3}(2M^3)^{1/2}\varepsilon^{1/2}d\varepsilon=\frac{4\pi Vg}{h^3}p^2dp,\tag{3-109}$$

式中 g 是分立能态的统计权重, M 是粒子静止质量, T 是温度, V 是体积, p 是气体动量。化学势或费密能 μ 由(3-104)式给出。粒子的总的数密度 N 由下式给出:

$$N=\int_0^\infty n(\varepsilon)d\varepsilon=\frac{g}{2\pi^2\hbar^3}\int_0^\infty\exp\left(\frac{\mu}{kT}\right)\exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT}\right)p^2dp,\tag{3-110}$$

式中动量 p 由下式与动能 ε 联系起来:

$$\varepsilon=(p^2c^2+M^2c^4)^{1/2}-Mc^2,\tag{3-111}$$

式中 M 是粒子的静止质量, c 是光速。对于非相对论性的、非简并的、单原子气体,

$$\exp\left[\frac{\mu}{kT}\right]=\frac{Nh^3}{g(2\pi MkT)^{3/2}}=\frac{P}{g(kT)^{5/2}}\left(\frac{2\pi\hbar^2}{M}\right)^{3/2},\tag{3-112}$$

及(3-108)式成为:

$$n(\varepsilon)=\frac{2N}{\pi^{1/2}(kT)^{3/2}}\,\varepsilon^{1/2}\exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT}\right)d\varepsilon。\tag{3-113}$$

麦克斯韦(Maxwell, 1860)首先得出(3-113)式，他还给出了具有速度 v 与 $v+dv$ 之间的气体粒子的几率分布 $f(v)dv$ 的正确公式。如果能量 ε 是动能 $Mv^2/2$，由(3-113)式可知，对于非相对论性的、非简并的气体，速度在 v 与 $v+dv$ 之间的粒子数为：

$$N_{总}f(v)dv=N_{总}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\left(\frac{M}{kT}\right)^{3/2}v^2\exp\left[-\frac{Mv^2}{2kT}\right]d\tau,\tag{3-114}$$

式中 M 是原子或分子的质量，$N_{总}$ 是原子及分子的总数。(3-113)式和(3-114)式都可由玻耳兹曼方程(3-4)的麦克斯韦-玻耳兹曼解直接得出。

由(3-114)式我们得出下列关系式：

$$N_{总}\int_0^{\infty}f(v)dv=N_{总}。\tag{3-115}$$

最可几速度 v_p、平均速度 $\langle v\rangle$ 及均方根速度 $v_{均方根}$ 容易由下列三式算出：

$$\left.\begin{aligned}v_p&=(2kT/M)^{1/2},\\ \langle v\rangle&=(8kT/\pi M)^{1/2},\\ v_{均方根}&=(3kT/M)^{1/2}=\langle v^2\rangle^{1/2}。\end{aligned}\right\}\tag{3-116}$$

利用 $\varepsilon=p^2/(2m)=mv^2/2$，由(3-114)式可以得出非相论性的、非简并气体的动量分布函数。对于相对论性的、非简并气体，动量 $p=\varepsilon/c\gg mc$，具有动量在 p 与 $p+dp$ 之间的粒子数由下式给出：

$$N_{总}f(p)dp=\frac{N_{总}c^3}{8\pi(kT)^3}\exp\left(-\frac{pc}{kT}\right)\cdot 4\pi p^2dp。\tag{3-117}$$

3.3.1.2. 理想气体的能量密度及状态方程

由(3-108)式直接得出非简并理想气体的能量密度 U/V 为：

$$\frac{U}{V}=\int_0^{\infty}\varepsilon n(\varepsilon)d\varepsilon=\frac{g}{2\pi^2\hbar^3}\int_0^{\infty}\exp\left[\left(\frac{\mu}{kT}-\frac{\varepsilon}{kT}\right)\right]\varepsilon p^2\,dp,\tag{3-118}$$

式中 ε 是动能，数密度 $n(\varepsilon)$ 由(3-108)式或(3-113)式给出，费密常数 μ 由(3-112)式给出，T 是温度，动量 p 由(3-112)式与 ε 相联系。对于非相对论性的、非简并气体，(3-118)式成为(Max-well, 1860)：

$$U=\frac{3}{2}N_{总}kT,\tag{3-119}$$

表 33 各种宇宙气体的质量密度 ρ、温度 T 及线度大小 R 的值

区	ρ (克·厘米$^{-3}$)	T (开)	R (厘米)
电离层	$10^{-20}\sim10^{-10}$	$200\sim1500$	6.4×10^8
磁层	10^{-21}	10^4	$10^9\sim10^{11}$
太阳(恒星)	1.4(平均)	$10^4\sim10^7$	10^{11}
日冕	$10^{-19}\sim10^{-16}$	10^6	10^{12}
太阳系	10^{-23}	10^5	10^{15}
银河星云	$10^{-19}\sim10^{-16}$	$10^2\sim10^4$	$10^{18}\sim10^{21}$
银河系	10^{-24}	$10^2\sim10^4$	10^{23}
本星系团	10^{-27}	10^5?	3×10^{24}
宇宙	10^{-29}	$10^5\sim10^6$?	3×10^{28}

式中 $N_{总}$ 为粒子的总数。对于相对论性的、非简并气体，

$$U=3N_{总}kT。\tag{3-120}$$

非相对论性的、非简并的、单原子气体的熵 S 由(3-77)式给出。

相对论性的、非简并气体的熵由下式给出：

$$S=kN_{总}\ln\left[\frac{T^4 g_0 8\pi k^4 e^4}{Pc^3h^3}\right],\tag{3-121}$$

式中 g_0 是原子基态的统计权重，$e=2.7182812$ 是自然对数的底，相对论性或非相对论性的、非简并气体的压力 P 为：

$$PV=N_{总}kT。$$

对于相对论性的、非简并气体，$U=3PV$。状态方程的另一种形式为(3-76)式，最有用的是：

$$P=\frac{R\rho T}{\mu}={}^*8.31441\times10^7\ \frac{\rho T}{\mu}\ 达因\cdot厘米^{-2},\tag{3-122}$$

式中电离气体的每个自由粒子的平均分子量由下式给出：

$$\mu=\frac{\rho N_A}{N}=\left[\sum_i\frac{X_i(Z_i+1)}{A_i}\right]^{-1}\approx\frac{2}{1+3X+0.5Y},\tag{3-123}$$

式中 X_i 是原子 i 的相对质量丰度(质量分数)，Z_i 及 A_i 分别是原子 i 的原子序数及原子量。X 是氢的质量分数，Y 是氦的分数。在完全电离时，氢气的 $\mu=0.5$，而氦的 $\mu=4/3$。对星族 I 恒星来说，$X\approx0.60$ 而 $Y\approx0.38$。ρ 是气体质量密度，T 是温度。表 33 给出宇宙中各种气体的质量密度、温度及线度大小的典型值。

3.3.1.3. 激发态粒子数密度的玻耳兹曼方程

在温度为 T 的局部热动平衡条件下，激发态 s 中的原子或分子数密度 N_s 为(Boltzmann, 1872)：

$$N_s=\frac{g_s}{g_0}N_0\exp\left(\frac{-\chi_s}{kT}\right),\tag{3-124}$$

式中 χ_s 是 s 能态的激发能(高于基态的能量)，N_0 是处于基态的分子数，g_s 是 s 能态的统计权重。总角量子数为 J 的能级有 $g_s=2J+1$。

如果原子或分子的总的数密度是 $N_{总}$，则

$$N_s=g_s\frac{N_{总}}{u}\exp\left(\frac{-\chi_s}{kT}\right),\tag{3-125}$$

式中配分函数 u 由(3-96)式给出。若为自由粒子，u 则为(3-91)式所给出的 $Z_{平移}$。

能级 m 和 n 上的粒子数与能量 E_m 和 E_n 的关系为：

$$\frac{N_n}{g_n}=\frac{N_m}{g_m}\exp\left(-\frac{E_n-E_m}{kT}\right)。\tag{3-126}$$

3.3.1.4. 沙哈-玻耳兹曼电离方程

在局部热动平衡条件下，处于第 r 电离级的原子的数密度 N_r 与第 $(r+1)$ 电离级的原子的数密度 N_{r+1} 的关系式为(Saha, 1920, 1921)：

$$\frac{N_{r+1}}{N_r}N_e=\frac{u_{r+1}}{u_r}\ \frac{2(2\pi mkT)^{3/2}}{h^3}\exp\left(-\frac{\chi_r}{kT}\right),\tag{3-127}$$

式中 N_e 是自由电子密度；u_r 是第 r 级的配分函数，由(3-96)式给出；χ_r 是从第 r 次电离的

原子的基态取走一个电子所需的能量(即这个原子的电离电势)；T 是热平衡的温度；m是电子质量；h 和 k 分别是普朗克常数和玻耳兹曼常数。

为了计算方便起见，把(3-127)式用下列对数形式表示是有用的。

$$\log\left(\frac{N_{r+1}N_e}{N_r}\right)=\log\left(\frac{u_{r+1}}{u_r}\right)+15.6826+\frac{3}{2}\log T-\frac{5039.95}{T}I \qquad (3\text{-}128)$$

或

$$\log\left(\frac{N_{r+1}}{N_r}P_e\right)=\log\left(\frac{2u_{r+1}}{u_r}\right)-0.4772+\frac{5}{2}\log T-\frac{5039.95}{T}I,$$

式中 T 的单位是开，从 r 级至$(r+1)$级的电离电势 I 的单位是电子伏，电子压力 $P_e=N_ekT$。表 34 给出电离电势的数值。

第 n 量子能级的粒子数密度 N_n 由下式给出(参看(3-125)式及(3-127)式)：

$$N_n=N_eN_i\frac{h^3}{(2\pi mkT)^{3/2}}\frac{g_n}{2}\exp\left(\frac{\chi_r\chi_n}{kT}\right), \qquad (3\text{-}129)$$

式中 N_e 及 N_i 分别是自由电子密度和离子密度，g_n 是第 n 能级的统计权重，χ_n 是高于基态能级的第 n 能级的激发能：

$$\chi_n=I_HZ^2\left(1-\frac{1}{n^2}\right); \qquad (3\text{-}130)$$

统计权重为：

$$g_n=2n^2, \qquad (3\text{-}131)$$

这里 $I_H=$*13.605804(36)电子伏=*21.79907(12)$\times10^{-12}$尔格$=\chi_r/Z^2=2\pi^2e^4m/h^2$是氢的电离电势。

对于氢及氦的一次电离，(3-127)式取数值形式：

若为氢 $$\frac{N_1N_e}{N_0}\approx2.4\times10^{15}T^{3/2}\exp\left(-1.58\times10^5T^{-1}\right)\text{厘米}^{-3}; \qquad (3\text{-}132)$$

若为氦 $$\frac{N_1N_e}{N_0}\approx9.6\times10^{15}T^{3/2}\exp\left(-2.85\times10^6T^{-1}\right)\text{厘米}^{-3},$$

有时把(3-127)式重写成与粒子浓度 $\alpha_r=N_r/N_{总}$ 有关的形式是方便的，其中 N_r 及 $N_{总}$ 分别表示处于第 r 能态的原子总数及电离以前原子的总数。

$$\frac{\alpha_{r+1}\alpha_e}{\alpha_r}=\frac{V}{N_{总}}\frac{N_{r+1}N_e}{N_r}, \qquad (3\text{-}133)$$

式中 V 是气体体积，$N_{r+1}N_e/N_r$ 由(3-127)式给出。对于一个单独的电离区 $\alpha=\alpha_1=\alpha_e$，电离度由下式给出：

$$\frac{\alpha^2}{1-\alpha}=2\frac{u_1}{u_0}\frac{V}{N_{总}}\left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{I}{kT}\right), \qquad (3\text{-}134)$$

式中 $(2\pi mkT/h^2)^{3/2}=$*$2.414662\times10^{15}T$；若为氢 $u_1/u_0=\frac{1}{2}$，若为氦 $u_1/u_0=2$；I 是电离电势，氢的 $N_{总}$ 是原子和自由质子的总和，而 $\alpha=N_e/N_{总}$。粒子的总数是 $N_{总}(1+\alpha)$，所以气体压力 P 由下式给出：

$$P=N_{总}(1+\alpha)\frac{kT}{V}, \qquad (3\text{-}135)$$

而能量 U 为：

$$U=\frac{3}{2}N_{总}(1+\alpha)kT+N_{总}\alpha(1+\chi_m), \qquad (3\text{-}136)$$

式中 I 是电离电势，χ_m 是离子的电子激发能。

表 34 元素的

(单位是电子伏，1 电子伏 = 1.6021 × 10⁻¹²

Z	元素	电										离
		I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI
1	H	13.598										
2	He	24.587	54.416									
3	Li	5.392	75.638	122.451								
4	Be	9.322	18.211	153.893	217.713							
5	B	8.298	25.154	37.930	259.368	340.217						
6	C	11.260	24.383	47.887	64.492	392.077	489.981					
7	N	14.534	29.601	47.448	77.472	97.888	552.057	667.029				
8	O	13.618	35.116	54.934	77.412	113.896	138.116	739.315	871.387			
9	F	17.422	34.970	62.707	87.138	114.240	157.161	185.182	953.886	1,103.089		
10	Ne	21.564	40.962	63.45	97.11	126.21	157.93	207.27	239.09	1,195.797	1,362.164	
11	Na	5.139	47.286	71.64	98.91	138.39	172.15	208.47	264.18	299.87	1,465.091	1,648.659
12	Mg	7.646	15.035	80.143	109.24	141.26	186.50	224.94	265.90	327.95	367.53	1,761.802
13	Al	5.986	18.828	28.447	119.99	153.71	190.47	241.43	284.59	330.21	398.57	442.07
14	Si	8.151	16.345	33.492	45.141	166.77	205.05	246.52	303.17	351.10	401.43	476.06
15	P	10.486	19.725	30.18	51.37	65.023	220.43	263.22	309.41	371.73	424.50	479.57
16	S	10.360	23.33	34.83	47.30	72.68	88.049	280.93	328.23	379.10	447.09	504.78
17	Cl	12.967	23.81	39.61	53.46	67.8	97.03	114.193	348.28	400.05	455.62	529.26
18	Ar	15.759	27.629	40.74	59.81	75.02	91.007	124.319	143.456	422.44	478.68	538.95
19	K	4.341	31.625	45.72	60.91	82.66	100.0	117.56	154.86	175.814	503.44	564.13
20	Ca	6.113	11.871	50.908	67.10	84.41	108.78	127.7	147.24	188.54	211.70	591.25
21	Sc	6.54	12.80	24.76	73.47	91.66	111.1	138.0	158.7	180.02	225.32	249.832
22	Ti	6.82	13.58	27.491	43.266	99.22	119.36	140.8	168.5	193.2	215.91	265.23
23	V	6.74	14.65	29.310	46.707	65.23	128.12	150.17	173.7	205.8	230.5	255.04
24	Cr	6.766	16.50	30.96	49.1	69.3	90.56	161.1	184.7	209.3	244.4	270.8
25	Mn	7.435	15.640	33.667	51.2	72.4	95	119.27	196.46	221.8	243.3	286.0
26	Fe	7.870	16.18	30.651	54.8	75.0	99	125	151.06	235.04	262.1	290.4
27	Co	7.86	17.06	33.50	51.3	79.5	102	129	157	186.13	276	305
28	Ni	7.635	18.168	35.17	54.9	75.5	108	133	162	193	224.5	321.2
29	Cu	7.726	20.292	36.83	55.2	79.9	103	139	166	199	232	266
30	Zn	9.394	17.964	39.722	59.4	82.6	108	134	174	203	238	274
31	Ga	5.999	20.51	30.71	64							
32	Ge	7.899	15.934	34.22	45.71	93.5						
33	As	9.81	18.633	28.351	50.13	62.63	127.6					
34	Se	9.752	21.19	30.820	42.944	68.3	81.70	155.4				
35	Br	11.814	21.8	36	47.3	59.7	88.6	103.0	192.8			
36	Kr	13.999	24.359	36.95	52.5	64.7	78.5	111.0	126	230.9		
37	Rb	4.177	27.28	40	52.6	71.0	84.4	99.2	136	150	277.1	
38	Sr	5.695	11.030	43.6	57	71.6	90.8	106	122.3	162	177	324.1
39	Y	6.38	12.24	20.52	61.8	77.0	93.0	116	129	146.2	191	206
40	Zr	6.84	13.13	22.99	34.34	81.5						
41	Nb	6.88	14.32	25.04	38.3	50.55	102.6	125				
42	Mo	7.099	16.15	27.16	46.4	61.2	68	126.8	153			

[1] 取自穆尔(C. E. Moore, 1970)的报告。

电离电势

尔格和 $k=8.617\times10^{-5}$ 电子伏·开$^{-1}$)[1]

级									
XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII	XIX	XX	XXI
1,962.613									
2,085.983	2,304.080								
523.50	2,437.676	2,673.108							
560.41	611.85	2,816.943	3,069.762						
564.65	651.63	707.14	3,223.836	3,494.099					
591.97	656.69	749.74	809.39	3,658.425	3,946.193				
618.24	686.09	755.73	854.75	918	4,120.778	4,426.114			
629.09	714.02	787.13	861.77	968	1,034	4,610.955	4,933.931		
656.39	726.03	816.61	895.12	974	1,087	1,157	5,129.045	5,469.738	
685.89	755.47	829.79	926.00						
291.497	787.33	861.33	940.36						
308.25	336.267	895.58	974.02						
298.0	355	384.30	1,010.64						
314.4	343.6	404	435.3	1,136.2					
330.8	361.0	392.2	457	489.5	1,266.1				
336	379	411	444	512	546.8	1,403.0			
352	384	430	464	499	571	607.2	1,547		
368.8	401	435	484	520	557	633	671	1,698	
310.8	419.7	454	490	542	579	619	698	738	1,856
374.0									

(续表)

Z	元素	电离级									
		I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
43	Tc	7.28	15.26	29.54							
44	Ru	7.37	16.76	28.47							
45	Rh	7.46	18.08	31.06							
46	Pd	8.34	19.43	32.93							
47	Ag	7.576	21.49	34.83							
48	Cd	8.993	16.908	37.48							
49	In	5.786	18.869	28.03	54						
50	Sn	7.344	14.632	30.502	40.734	72.28					
51	Sb	8.641	16.53	25.3	44.2	56	108				
52	Te	9.009	18.6	27.96	37.41	58.75	70.7	137			
53	I	10.451	19.131	33							
54	Xe	12.130	21.21	32.1							
55	Cs	3.894	25.1								
56	Ba	5.212	10.004								
57	La	5.577	11.06	19.175							
58	Ce	5.47	10.85	20.20	36.72						
59	Pr	5.42	10.55	21.62	38.95	57.45					
60	Nd	5.49	10.72								
61	Pm	5.55	10.90								
62	Sm	5.63	11.07								
63	Eu	5.67	11.25								
64	Gd	6.14	12.1								
65	Tb	5.85	11.52								
66	Dy	5.93	11.67								
67	Ho	6.02	11.80								
68	Er	6.10	11.93								
69	Tm	6.18	12.05	23.71							
70	Yb	6.254	12.17	25.2							
71	Lu	5.426	13.9								
72	Hf	7.0	14.9	23.3	33.3						
73	Ta	7.89									
74	W	7.98									
75	Re	7.88									
76	Os	8.7									
77	Ir	9.1									
78	Pt	9.0	18.563								
79	Au	9.225	20.5								
80	Hg	10.437	18.756	34.2							
81	Tl	6.108	20.428	29.83							
82	Pb	7.416	15.032	31.937	42.32	68.8					
83	Bi	7.289	16.69	25.56	45.3	56.0	88.3				

3.3.1.5. 电离球的斯特龙根半径

在一个紫外辐射源的紧邻区域中，中性星际氢电离而形成一个电离氢区(HII 区)，该区具有下式所给出的斯特龙根半径 s_0(Strömgren, 1939; Vandervoort, 1963)：

$$s_0=\left(\frac{3S}{4\pi\alpha N^2}\right)^{1/3}, \tag{3-137}$$

式中 α 是复合到所有能态(除基态以外)的氢的复合系数(Kaplan 和 Pikelner, 1970)：

$$\alpha\approx2.6\times10^{-13}\left(\frac{10^4}{T}\right)^{0.85} \text{厘米}^3\cdot\text{秒}^{-1},$$

HII 区的数密度 $N=\rho/m_{\mathrm{H}}$，其中 ρ 是气体质量密度，m_{H} 是氢原子的质量，S 是从激发星来的电离光子的发射率：

$$S\approx\frac{8\pi^2R^2kT}{hc^2}\,\nu_c^2\exp\left(-\frac{h\nu_c}{kT}\right),$$

式中 R 是激发星的半径，T 是恒星的温度，$\nu=3.29\times10^{15}$ 赫是喇曼连续谱的极限频率。(3-137)式表明 s_0 是 N 和激发星光谱型的函数，这种依赖关系是赫什伯格等(Hershberg 和 Pronik, 1959)给出的。这些结果表明 $s_0=UN_e^{-2/3}$，其中 N_e 是电子密度，当光谱型从 O5 变到 B1 时，U 则从 90 变到 12 秒差距·厘米$^{-2}$。斯特龙根(Strömgren, 1939)首先推导出 s_0 的详尽公式：

$$\log s_0=-6.17+\frac{1}{3}\log\left[(T_e/T)^{1/2}\left(\frac{2g_1}{g_0}\right)\right]-\frac{1}{3}\log a_u-\frac{1}{3}\theta I$$
$$+\frac{1}{2}\log T+\frac{2}{3}\log R-\frac{2}{3}\log N, \tag{3-138}$$

式中 s_0 的单位是秒差距(1 秒差距 = *3.085678×10^{18} 厘米)，T_e 是在 s_0 处的电子温度，T 是恒星温度，a_u 是每个中性气体原子的电离辐射的吸收系数，因子 $\theta=5040/T$，I 是电离电势，恒星半径是 R 个太阳半径($R_\odot$ = *6.9599×10^{10} 厘米)，而 N 是中性气体和电离气体的数密度。利用相应于氢的数值，即 I = *13.60580 电子伏，$a_u=6.3\times10^{-18}$ 厘米$^{-2}$，则(3-138)式就成为：

$$\log s_0=-0.44+\frac{1}{3}\log[(T_e/T)^{1/2}]-4.51\theta+\frac{1}{2}\log T+\frac{2}{3}\log R-\frac{2}{3}\log N。 \tag{3-139}$$

施皮策等(Spitzer 和 Savedoff, 1950; Osterbrock, 1965; Hjellming, 1966, 1968; 以及 Rubin, 1968)对不同的激发星及氢密度，考虑了光致电离、碰撞、辐射转移等等的能量增益及损失而计算得出了 HII 区的温度。范德沃尔特等(Vandervoort, 1963; Mathews, 1965; Lasker, 1966, 1967; 以及 Mathews 和 O'Dell, 1969)对 HII 区膨胀进入周围中性氢的问题作了研究。结果表明电离前沿在约($10^4/N$)年内达到半径 s_0，其后当 N 是 HII 区的密度时，它的半径 r 就取由(3-137)式所给出的 s_0。于是这意味着 $N=N_0s_0^{3/2}r^{-3/2}$，其中 s_0 及 N_0 分别是在时间 $t=0$ 的斯特龙根半径及密度。在其后的时间 t，半径 r 就由下式给出：

$$r=s_0\left(1+\frac{7C_1t}{4s_0}\right)^{4/7}; \tag{3-140}$$

密度 N 由下式给出：

$$N=N_0\left(1+\frac{7C_1t}{4s_0}\right)^{-6/7},$$

式中 $C_1=2s/\sqrt{3}$，s 是 HII 区中的声速。转移到周围中性区的动能 E_k 由下式给出：

$$E_k=\frac{4\pi}{3}N_0m_{\rm H}s^2s_0^3\left[\left(\frac{r}{s_0}\right)^{3/2}-1\right]=\frac{2}{3}\left[1-\left(\frac{r}{s_0}\right)^{-3/2}\right]E_T, \tag{3-141}$$

式中 E_T 是 HII 区中的热能。这种动能中有一些是用于电离中性的氢。最终损失的能量 E_L 由下式给出：

$$E_L=-\frac{4\pi}{7}N_0m_{\rm H}s^2s_0^3\ln\left[\left(\frac{7}{4}ss_0^{3/4}t+s_0^{7/4}\right)s_0^{-7/4}\right]。 \tag{3-142}$$

HI 壳层的厚度 Δr 由下式给出：当 $t\to\infty$ 时，

$$\Delta r=\frac{1}{6}\left[\left(\frac{7}{4}ss_0^{3/4}t+s_0^{7/4}\right)^{6/7}-s_0^{3/2}\right]\left(\frac{7}{4}ss_0^{3/4}t+s_0^{7/4}\right)^{-2/7}\approx\frac{r}{6}。 \tag{3-143}$$

图 19 为一颗温度 $T=42000$ 开的 O 型星，经过 3×10^4 年及 6×10^4 年以后，HII 区的速度、数密度、温度及压力作为与激发星之间距离的函数的关系曲线。

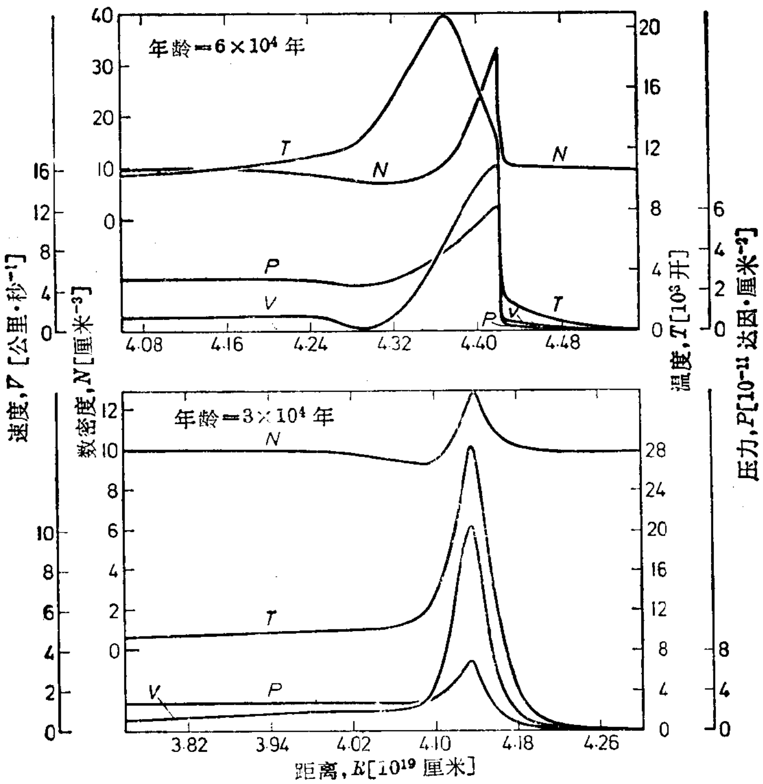


图 19 温度为 $T=41958$ 开的 O 型星，经过 3.07×10^4 年及 6.16×10^4 年以后，在电离前沿附近的速度 v、数密度 N、温度 T 及压力 P 随离该星的距离 R 的变化。假定 $30\,M_\odot$ 的恒星在 100 开的静止中性氢的无限介质中形成，而在主星序上的恒星的光子光度为 $L=8.75\times10^{48}$ 紫外光子/秒(取自 Mathews, 1965 的文章)

3.3.2. 简并气体——数密度、能量密度、熵密度及状态方程

3.3.2.1. 费密-狄拉克统计法及函数

自旋为 $\hbar/2$ 的奇倍数的基本粒子(电子、质子和奇质量数的核)服从费密-狄拉克统计法(Fermi, 1926; Dirac, 1926)。这些粒子服从泡利不相容原理，该原理指出，一个系统不会有两个组元具有完全相同的一组量子数(参看 Pauli, 1927)。利用这种性质，费密导出了在

体积 V 内动能在 ε 与 $\varepsilon+d\varepsilon$ 之间的粒子数密度 $n(\varepsilon)$ 的公式：

$$Vn(\varepsilon)=\frac{g(\varepsilon)d\varepsilon}{\exp\left[-\frac{\mu}{kT}+\frac{\varepsilon}{kT}\right]+1},\tag{3-144}$$

式中 $g(\varepsilon)$ 是可能的粒子能态 ε 的数目，T 是温度，费密常数或化学势 μ 由(3-104)式给出。对于质量为 m 的非相对论性粒子，(3-144)式成为：

$$n(\varepsilon)=\frac{2\pi(2m)^{3/2}}{h^3}\frac{g\varepsilon^{1/2}d\varepsilon}{\exp\left[-\frac{\mu}{kT}+\frac{\varepsilon}{kT}\right]+1}。\tag{3-145}$$

每单位体积内的总粒子数 N 由下式给出：

$$N=\int_0^\infty n(\varepsilon)d\varepsilon=\frac{g}{2\pi^2\hbar^3}\int_0^\infty\frac{p^2dp}{\exp\left[-\frac{\mu}{kT}+\frac{\varepsilon}{kT}\right]+1},\tag{3-146}$$

式中 g 是分立能级的统计权重，ε 与动量 p 的关系为(3-111)式。对于非相对论性的、简并气体($\varepsilon=p^2/(2m)$，$p\ll mc$，$kT\ll mc^2$)，

$$N=\frac{2\pi(2mkT)^{3/2}g}{h^3}\int_0^\infty\frac{x^{1/2}dx}{\exp\left[x-\frac{\mu}{kT}\right]+1}。\tag{3-147}$$

总能量密度 U/V 为：

$$\frac{U}{V}=\int_0^\infty\varepsilon n(\varepsilon)d\varepsilon=\frac{g}{2\pi^2\hbar^3}\int_0^\infty\frac{\varepsilon p^2dp}{\exp\left[-\frac{\mu}{kT}+\frac{\varepsilon}{kT}\right]+1}。\tag{3-148}$$

对于非相对论性的、简并气体，

$$\frac{U}{V}=\frac{4\pi}{h^3}(2m)^{3/2}(kT)^{5/2}F_{3/2}\left(\frac{\mu}{kT}\right)=\frac{3}{2}P_e,\tag{3-149}$$

式中 P_e 是电子压力，费密-狄拉克函数

$$F_{3/2}\left(\frac{\mu}{kT}\right)=\int_0^\infty\frac{x^{3/2}dx}{\exp\left[x-\frac{\mu}{kT}\right]+1}。$$

麦克杜格尔等(McDougal 和 Stoner, 1938)给出了 $F_{3/2}(\mu/kT)$ 的表。即使在温度为零时，能量仍是有限值，并且为：

$$\begin{aligned}U_0&=\left(\frac{6\pi^2}{g}\right)^{2/3}\frac{\hbar^2}{2m}N_e^{2/3}=\mu,\\&\approx5.0\times10^{-27}N_e^{2/3}\text{ 尔格。}\end{aligned}\tag{3-150}$$

气体在绝对零度时的化学势与电子的能量相同。这里 N_e 是电子密度，而且可以写成普遍形式：

$$\begin{aligned}U_0=E_F&=\left\{\left[1.018\left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)^{2/3}\times10^{-4}+1\right]^{1/2}-1\right\}mc^2\\&=0.509\left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)^{2/3}\times10^{-4}mc^2\quad\text{(对非相对论性电子)}\\&=1.009\left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)^{1/3}\times10^{-2}mc^2\quad\text{(对相对论性电子)。}\end{aligned}$$

这里 ρ 是气体质量密度，μ_e 是平均电子分子量，符号 E_F 常用来表示称之为完全简并气体的费密能量。E_F 是电子动能最大值，而 $3E_F/5$ 是平均动能。电子密度 N_e 可以写成：

$$N_e=\frac{8\pi}{3h^3}(mc)^3\left[\left(\frac{E_F}{mc^2}+1\right)^2-1\right]^{3/2} \tag{3-151}$$

或

$$N_e=\frac{\rho N_A}{\mu_e}=\rho N_A\sum_i\frac{X_iZ_i}{A_i},$$

式中 ρ 是所有离子及电离电子的质量密度，N_A 是阿伏伽德罗数，X_i、Z_i 及 A_i 分别是元素 i 的质量分数、原子序数及原子量。在简并温度时，费密-狄拉克统计法就可过渡到玻耳兹曼统计法，该简并温度为：

$$T_0=\frac{E_F}{k}=\frac{1}{8}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3}\frac{h^2}{mk}N_e^{2/3}={}^*4.231565\times10^{-11}N_e^{2/3}\text{ 开。} \tag{3-152}$$

对于非相对论性的、简并气体来说，每单位体积 V 内的熵 S 为：

$$\frac{S}{V}=\frac{5P_e}{2T}-\frac{\mu}{kT}kN_e=kN_e\left[\frac{5}{2}\frac{\frac{2}{3}F_{3/2}\left(\frac{\mu}{kT}\right)}{F_{1/2}\left(\frac{\mu}{kT}\right)}-\frac{\mu}{kT}\right]。 \tag{3-153}$$

对相对论性的简并气体，当 $\varepsilon=pc$，$p\gg mc$ 及 $kT\gg mc^2$ 时，我们得出：

$$\left.\begin{aligned}&N_e=\frac{8\pi}{c^3h^3}(kT)^3F_2\left(\frac{\mu}{kT}\right);\\&\frac{U}{V}=\frac{8\pi}{c^3h^3}(kT)^4F_3\left(\frac{\mu}{kT}\right)=3P_e;\\&\text{以及}\quad\frac{S}{V}=4\frac{P_e}{T}-kN_e\left(\frac{\mu}{kT}\right)=kN_e\left[4\times\frac{\frac{1}{3}F_3\left(\frac{\mu}{kT}\right)}{F_2\left(\frac{\mu}{kT}\right)}-\left(\frac{\mu}{kT}\right)\right],\end{aligned}\right\} \tag{3-154}$$

式中费密-狄拉克积分 $F_n(\mu/kT)$ 将在(3-174)式中给出。

3.3.2.2. 简并电子气的状态方程——白矮星

密度高于下式给出的临界密度 ρ_{cd} 的气体是完全简并的气体：

$$\rho_{cd}=2.4\times10^{-8}T^{3/2}\mu_e\text{ 克·厘米}^{-3}, \tag{3-155}$$

这里 T 是温度，每个电子的平均分子量 $\mu_e=1$(氢)，$\mu_e=2$(其他元素)。对于具有 $\rho_{cd}\leqslant\rho\leqslant\rho_{临界}$ 及 $\mu\gg kT$ 的非相对论性的、完全简并气体的压力 P(Fowler, 1926)为：

$$\begin{aligned}P&=\frac{h^2}{20m}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3}N_e^{5/3}=3.12\times10^{12}\left(\frac{2}{g}\right)^{2/3}\left(\frac{2\rho}{\mu_e}\right)^{5/3}\text{达因·厘米}^{-2}\\&=1.004\times10^{13}\left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)^{5/3}\text{达因·厘米}^{-2}=\frac{2}{3}\frac{U}{V},\end{aligned} \tag{3-156}$$

式中 N_e 是电子密度，g 是统计权重，ρ 是质量密度，U/V 是能量密度。当气体的密度 ρ 大于下式给出的临界值 $\rho_{临界}$ 时，该气体被称之为相对论性气体：

$$\rho_{临界}=7.3\times10^6\mu_e\text{ 克·厘米}^{-3}。 \tag{3-157}$$

对于相对论性的、完全简并气体，压力 P 由下式给出：

$$\begin{aligned}P&=\frac{c}{4}\left(\frac{3h^3}{8\pi}\right)^{1/3}N_e^{4/3}=4.56\times10^{14}\left(\frac{g}{2}\right)^{1/3}\left(\frac{2\rho}{\mu_e}\right)^{4/3}\text{达因·厘米}^{-2}\\&\approx{}^*1.243491\times10^{15}\left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)^{4/3}\text{达因·厘米}^{-2}=\frac{1}{3}\frac{U}{V},\end{aligned} \tag{3-158}$$

式中 $N_A\rho=\mu_e N_e$，而 N_A 是阿伏伽德罗数。安德森等（Anderson, 1929; 及 Stoner, 1930）首先研究了相对论性效应。

对于质量密度 ρ 接近简并极限 ρ_{cd} 的部分简并气体，压力 P 由下式给出：

$$P=\frac{g}{6\pi^2\hbar^3}\int_0^\infty \frac{p^3\frac{\partial\varepsilon}{\partial p}\,dp}{\exp\left[-\frac{\mu}{kT}+\frac{\varepsilon}{kT}\right]+1}, \tag{3-159}$$

式中 g 是统计权重，化学势 μ 由(3-104)式给出，动量 p 与动能 ε 的关系为(3-111)式。(3-159)式又可以写成(3-149)式的形式：

$$P=\frac{8\pi kT}{3h^3}(2mkT)^{3/2}F_{3/2}\left(\frac{\mu}{kT}\right)=\frac{2}{3}\frac{U}{V}。 \tag{3-160}$$

式中费密-狄拉克函数 $F_{3/2}(\mu/kT)$ 由(3-149)式给出。类似地，电子密度 N_e 由下式给出：

$$N_e=\frac{4\pi}{h^3}(2mkT)^{3/2}F_{1/2}\left(\frac{\mu}{kT}\right), \tag{3-161}$$

式中费密-狄拉克积分 $F_n(\mu/kT)$ 由(3-174)式给出。麦克杜格尔等（McDougal 和 Stoner, 1938）列表给出了这两种费密-狄拉克函数 $F_{3/2}(\mu)$ 和 $F_{1/2}(\mu)$。

一颗恒星的简并气体压力与引力相平衡的话，则这颗恒星就称为白矮星，因为其表面温度≈10^4 开意味着它是白色的。不过，因为这样的温度并不影响状态方程，所以还是认为白矮星是冷的。表 35 给出了确实观测到的大多数白矮星的特性。

在高密度情况下，简并的电子气是相对论性的，而当把它当作一种理想费密气体时，在质量超过下式给出的临界质量 $M_{临界}$ 时，就会开始出现动力学不稳定性（Landau, 1932; Chandrasekhar, 1935）：

$$M_{临界}=\frac{3.1}{m'}\left(\frac{\hbar c}{G}\right)^{3/2}=\left(\frac{2}{\mu}\right)^2 1.4587M_\odot\approx 1.4587M_\odot, \tag{3-162}$$

式中每个电子的质量 m' 取为质子质量的两倍，引力常数 $G=$*6.6720×10^{-8} 达因·厘米^2·克$^{-2}$，每个电子的平均分子量 $\mu=A/Z$ 取为 2，太阳质量 $M_\odot=$*1.9891×10^{33} 克。第 3.4.3 节给出这种计算的详细过程，该节中指出，对于非球形的或较差自转恒星来说并不存在质量上限。张德拉塞卡（Chandrasekhar, 1939）给出了球对称的、非自转白矮星的半径、质量及温度的详尽公式。

在上述简并电子气的标准处理中，假定了平均分子量是确定的，并且还假定了电子之间是无相互作用而形成理想费密气体。对于这里所考虑的密度范围 $\rho_{cd}\leqslant\rho\leqslant\rho_{临界}$ 或 500 克·厘米$^{-3}\leqslant\rho\leqslant 10^{11}$ 克·厘米$^{-3}$，事实上气体是电子及原子核组成的等离子体。萨皮得（Salpeter, 1961）讨论了原子量为 A 及电荷为 Z 的由电子及原子核组成的温度为零的等离子体的状态方程。在考虑了离子晶格与均匀分布的电子间的经典库仑作用能、托马斯-费密模型与电子均匀电荷分布的不一致、电子之间的交换能以及电子之间的自旋-自旋相互作用能等的修正，则每个电子的总能量 E 就为：

$$E=E_0+E_{库仑}+E_{托-费}+E_{交换}+E_{相关}, \tag{3-163}$$

其中无相互作用电子所组成的费密气体，每个电子的能量 E_0 为：

$$E_0=\frac{mc^2 g(x)}{8x^3},$$

式中 $$g(x)=8x^3[\sqrt{(1+x^2)}-1]-x(2x^2-3)\sqrt{(1+x^2)}-3\sinh^{-1}x,$$

x 与气体质量密度 ρ 的关系为：

表 35 153 颗白矮星的名称、埃金-格林斯坦(EG)号数、方位、视差 π、自行 μ 或 $\mu_\alpha\cos\delta/\mu_\delta$、目视星等 V 或照相星等 $m_{照相}$、色指数 $B-V$、$U-B$、温度 $T_{有效}$、表面重力 g、质量 M、半径 R 及光度 L。磁矮星用[2]、可变矮星用[3]、精确红移矮星用[4]来标记，这些参量在角注中给出。白矮星而又是双星的子星者用[5]标记

白矮星名	EG 号数	光谱型	α(1950.0) h	m	s	δ(1950.0) °	′	π(角秒)	μ 或 $\mu_\alpha\cos\delta/\mu_\delta$ (″/年)	V 或 $m_{照相}$ (星等)	B-V (星等)	U-B (星等)	$T_{有效}$(开)	log g	log(M/M☉)	log(R/R☉)	log(L/L☉)
GD2	203	DAwk	00	04	58	33	00.8		<0.1	14.5	−0.29	−1.21					
LB433	3	DB	00	17	24	13	36		0.036/0.008	15.22	−0.12	−0.97					
L1011-71=G1-7	4	DA	00	33	06	01	37		0.44/0.00	15.52	0.24	−0.68					
G132-12	167	DA	00	36	23	31	15.2		0.28	16.2	−1	—					
GD8	204	DAwk	00	37	15	31	16.1		<0.1	14.0	−0.22	−1.20					
VMa2	5	DG	00	46	31	05	09.2	0.239±0.004	1.26/−2.71	12.37	0.56	0.04					
G1-45	7	DAs	01	01	14	04	48.3		0.27/0.36	14.10	0.14	−0.50					
W1516	9	DC	01	15	20	15	55.0	0.060±0.003	0.639±0.001	12.72	0.11	−0.80					
GD13	205	DA	01	26	46	42	12.8		<0.1	14.0	—	—					
R548[3]	10	(DA)	01	33	42	−11	36		0.43/−0.07	14.10	0.20	−0.54					
L870-2	11	DAs	01	35	26	−05	14.7	0.066±0.013	0.57/−0.34	12.84	0.34	−0.50	6,500±500			−1.41±0.15	−2.63±0.40
G94-9	13	DA	01	43	56	21	39.8		−0.25/−0.12	15.05	0.25	−0.65					
GD279	269	DAsp	01	48	56	46	45.2		0.07	(13.0)	(−1)	—					
GD20	206	DA	01	55	04	06	57.5		<0.1	14.5	(−1)	—					
Ox+25°6725	15	(DA)	02	05	56	25	00.1	0.029±0.003	0.428±0.002	10.53	−0.04	−0.85					
G74-7	168	DAs	02	08	13	39	41.5	0.064±0.004	1.133±0.002	14.51	0.37	−0.43					
hPer1166	17	(DA)	02	14	00	56	53		0.16/−0.01	13.68	−0.12	0.92					
F22	19	DA	02	27	39	05	02.6	0.045	0.095/−0.019	12.65	−0.06	−0.83					
GD31	207	DA	02	31	37	−05	24.9		0.20−0.26	14.0	0.21	−0.68					
F24	20	DAwke	02	32	30	03	31		0.083/0.010	12.25	−0.23	−1.25	50,000	6.6			
LB3303	21	(DA)	03	10	04	−68	47.2	0.074±0.006	0.038/−0.104	11.40	—	—					
GD45	208	DAs	03	16	34	34	31.6		0.20−0.26	13.0	0.08	−0.68					
L587-77A[5]	22	DAs	03	26	48	−27	34		0.71/0.36	13.9	−0.1	—					
G37-44	23	DA	03	32	09	32	02.2	0.010±0.004	0.375±0.002	15.49	0.13	−0.51					
W219	24	4670	03	41	36	18	18		0.47/−1.16	15.20	0.30	−0.52					
LB1497	25	DAwk	03	49	06	24	47		0.038/−0.052	16.52	−0.20	−1.10					
HZ4	26	DA	03	52	06	09	37	0.025±0.003	0.152/−0.008	14.47	0.15	−0.67	15,300±400	8.1±0.30	−0.09±0.30	−1.92±0.06	−2.16±0.12
LB1240	28	DA	04	01	33	25	00.9	0.036±0.003	0.227±0.002	11.59	0.10	−0.58	13,800±500	7.5±0.30	−0.70±0.30	−1.92±0.05	−2.36±0.10
LB227	29	DA	04	06	18	16	59	0.025±0.003	0.116/−0.023	15.35	0.09	−0.65	16,500±500	8.3±0.30	−0.28±0.30	−2.12±0.06	−2.43±0.12
HZ10	30	DA	04	07	18	17	54		0.070/−0.076	14.14	0.17	−0.58					
HZ2	31	DA	04	10	06	11	45	0.025±0.003	0.051/−0.086	13.86	−0.05	−0.88	22,500±500	8.0±0.20	−0.20±0.15	−1.92±0.06	−1.48±0.12
40EriB[4], B[5]	33	DA	04	13	00	−07	44.1	0.202±0.004	2.229/3.420	9.52	0.03	−0.68	17,000±500	7.75±0.15	−0.35±0.15	−1.88±0.02	−1.90±0.10
HLTau76[3]	265	DA	04	15	54	27	11		—	15.2	0.20	−0.50					
VR7	36	(DA)	04	21	00	16	14		0.100/−0.020	14.29	−0.02	−0.84					
VR16	37	(DA)	04	25	42	16	52		0.009/−0.014	14.02	−0.09	−0.97					

角注 1 至 6 见表末。

（续表）

白矮星名	EG号数	光谱型	α(1950.0) h	α(1950.0) m	α(1950.0) s	δ(1950.0) °	δ(1950.0) ′	π(角秒)	μ 或 $\mu_\alpha \cos\delta/\mu_\delta$ (″/年)	V 或 $m_{照相}$ (星等)	B-V (星等)	U-B (星等)	$T_{有效}$(开)	log g	$\log(M/M_\odot)$	$\log(R/R_\odot)$	$\log(L/L_\odot)$
G82-22-23	170	DFs	04	27	31	−03	10.2		0.29	14.70	0.72	−0.15		7.9±0.20			−1.61±0.12
HZ7	39	DA	04	31	00	12	35	0.025±0.003	0.089/0.001	14.18	−0.03	−0.89	23,000±500		−0.42±0.20	−2.00±0.06	
L879-14	41	4670	04	35	24	−08	53		0.23/−1.47	14.10	0.14	−0.65	34,000±1,000	8.5±0.40			−1.01±0.12
HZ14	42	DAu	04	38	12	10	53	0.025±0.003	0.085/0.010	13.83	−0.15	−1.04			−0.02±0.40	−2.04±0.06	
GD64	209	DA	04	53	50	41	51.5		0.20−0.26	13.77	0.23	−0.61					
G191B2B	247	DAwk							0.12	11.8	−0.32	−1.20					
G86-B1B[5,6]	43	DAe	05	18	24	33	19		0.17/−0.07	16.20	0.31	−0.64					
	288	DAwk	05	48	04	00	05.2		—	15.10	−0.30	−1.21					
G99-37*	248	4670p	05	48	46	−00	11.2		0.27	14.58	0.46	−0.53	5,000(1)				
GD71	210	DAwk	05	49	34	15	52.7		0.20−0.26	13.0	−0.25	−1.16					
LP658-2[6]	45	DKe	05	52	40	−04	09.2	0.155±0.055	2.378±0.004	15.40	1.06	0.81					
G99-47[2]	289	DC	05	53	47	05	22.0		1.07	14.12	0.62	−0.12					
GD72	211	DA	06	06	51	28	15.1		—	15.0	0.00	−0.82					
L1244-26	46	DA	06	12	29	17	45		−0.06/−0.40	13.40	−0.15	−0.98					
GD77	212	DA	06	37	26	47	47.3		0.20−0.26	15.0	0.13	−0.64					
αCMaB[4]and[5]	49	DA	06	42	57	−16	38.8	0.377±0.004	−0.502/−1.215	8.68	(−0.12)	(−1.03)	32,000±1,000	8.65	+0.0086	0.0078±0.0002	
He3	50	DAn	06	44	15	37	34.9	0.068±0.002	0.957±0.002	11.21	−0.08	−0.92	25,000±700	8.1±0.15	−0.24±0.22	−2.00±0.07	−1.46±0.14
G87-29[5]	51	4670	07	06	52	37	45.4	0.043±0.004	0.350±0.003	13.71	0.30	−0.55					
G89-10	171	DAs	07	15	22	12	35.5		0.30	16.3	0	—					
GD85	216	DBs	07	16	32	40	27.1		0.10−0.20	14.5	−0.11	−0.99					
αCMiB[5]	53	—	07	36	42	05	21		0.708/−1.030	10.7	—	—					
L745-46A[5]	54	DF	07	38	02	−17	17.4	0.146±0.007	1.136/−0.520	12.98	0.29	−0.61	5,000			−1.56(1)	−3.39(1)
L97-12	56	DC	07	52	48	−67	38	0.173±0.030	1.45/−1.45	14.5	0.4	—					
L817-13	57	DA	07	52	48	−14	38		−0.13/−0.29	13.56	−0.02	−0.79					
G111-71[5]	58	DA	08	16	44	38	44.2		−0.20/−0.32	16.58	0.36	−0.58					
GD91	217	DAs	08	26	42	45	30.6		—	16.0	0.20	−0.52					
G51-16	249	DAs	08	27	32	32	52.3		0.64	15.7	0.35	−0.54					
L532-81	62	DA	08	39	42	−32	47		−1.06/1.31	12.0							
LDS235B[5]	63	DB	08	45	18	−18	48		−0.06/−0.93	15.55	−0.06	−0.93	15,000±1,000	8.0		−1.78±0.05	−1.80±0.20
GD93	218	DA	08	54	16	40	27.9		—	15.0	−0.13	−0.94					
G47-18	182	4670	08	56	11	33	08.7	0.032	−0.40/0.00	15.18	0.00	−0.89	10,000			−1.94(1)	−2.94(1)
GD99	219	DA	08	58	41	36	19.0		—	15.0	0.19	−0.59					
G195-19[3]	250	DC	09	12	27	53	38.6		1.56	13.79	0.30	−0.66					
G116-16[5]	64	DAs	09	13	26	44	12.5		0.03/−0.28	15.32	0.24	−0.53					
LDS275AB[5]	66	DC	09	35	00	−37	07		−0.34/0.16	15.0							
SA29-130	67	DA	09	43	30	44	08.8	0.028±0.003	0.297±0.002	10.55	0.07	−0.54	14,500±500	8.0±0.30	+0.06±0.40	−1.80±0.10	−1.99±0.30
G49-33	69	DA	09	55	00	24	47.4		−0.23/−0.30	15.09	0.25	−0.54					
L825-14	70	DAn	10	31	24	−11	29		−0.32/−0.06	12.97	−0.15	−1.02					
F34	71	DO	10	36	42	43	22		0.034/−0.024	11.12	−0.30	−1.35					
G44-32[3]	72	DC	10	39	14	14	31.6		0.31	16.55	0.29	−0.58					

（续表）

白矮星名	EG号数	光谱型	α(1950.0) h	m	s	δ(1950.0) °	′	π(角秒)	μ或 $\mu_\alpha \cos\delta/\mu_\delta$ (″/年)	V或 $m_{照相}$ (星等)	B−V (星等)	U−B (星等)	$T_{有效}$(开)	log g	log($M/M_\odot$)	log($R/R_\odot$)	log($L/L_\odot$)
Ton547	73	DA	10	46	48	28	20		—	15.40	0.16	−0.58					
GD125	221	DAn	10	52	01	27	22.9		0.10−0.20	14.0	−0.08	−0.98					
LB253	75	DAn	11	04	48	60	13		−0.19/−0.17	13.80	−0.02	−0.81					
L970-30[5]	76	DA	11	05	30	−04	53	0.046	−0.43/0.00	12.92	0.09	−0.69	16,000±500	7.9±0.20	−0.27±0.30	−1.91±0.10	−2.05±0.20
Ton573	77	DB	11	07	18	26	37		0.108/−0.167	15.89	−0.07	−0.99	14,000±1,000				
R627	79	DA, F	11	21	38	21	38.1	0.071±0.003	1.029±0.001	13.51	0.31	−0.52	7,000±500			−1.86±0.07	−3.38±0.40
F43	80	DA	11	26	30	38	28		−0.078/0.049	14.89	−0.13	−1.00					
GD140	184	DAwk	11	34	28	30	04.6		−0.15/0.00	12.50	−0.06	−1.13	23,000±800	8.2±0.50			
F46	81	DO-B	11	34	54	14	27		−0.054/0.044	13.24	−0.30	−0.98					
L145-141	82	4670	11	42	54	−64	34		2.66/−0.33	11.44	0.19	−0.59					
G148-7[5]	83	DAn	11	43	21	32	06.2		−0.11/−0.26	13.60	0.06	−0.67					
HZ21	86	DO	12	11	24	33	12		−0.096/0.042	14.22	−0.36	−1.25	70,000	8			
HZ28	90	DA	12	30	00	41	46		−0.124/0.015	15.72	−0.04	−0.82					
HZ29[3]	91	DBp	12	32	24	37	55		0.037/0.028	14.18	−0.23	−1.01					
GD148	186	DA	12	32	33	47	54.3		0.13/−0.19	14.52	0.06	−0.68					
G61-17[5]	92	DAs	12	44	45	14	58.8		−0.38/0.22	15.86	0.22	−0.53					
HZ34	93	DOp	12	53	00	37	49		−0.034/−0.051	15.66	−0.28	−1.26					
GD153	187	DAwk	12	54	35	22	18.2		0.00/−0.20	13.42	−0.25	−1.18					
G61-29[3,6]	—	DBe	13	03	16	18	17.0		0.38	15.69	−0.10	−0.97					
HZ43[5]	98	DAwk	13	14	00	29	22	0.021±0.011	−0.149/−0.088	12.86	−0.10	−1.14	50,000±5,000	8.8±1.0	−0.60±1.0	−1.83±0.25	−0.02±0.50
G177-31	188	DAs	13	17	04	45	20.8		−0.50/0.18	14.13	0.03	−0.56					
W485A[5]	99	DA	13	27	40	−08	18.8	0.062±0.003	1.181±0.002	11.27	0.08	−0.61	15,500±500	8.5±0.30	+0.37±0.30	−1.90±0.07	−2.09±0.14
W489	100	DK	13	34	13	03	57.0	0.117±0.004	−3.738/−1.109	14.68	0.96	0.37					
GW70°5824	102	DA	13	37	48	70	33	0.027±0.012	−0.40/−0.02	12.79	−0.09	−0.84	21,000±1,000	7.7±0.30	−0.11±0.50	−1.74±0.25	−1.23±0.40
GD163	189	DA	14	08	16	32	22.7		0.00/−0.25	14.06	−0.03	−0.81					
F93	107	DAwk	14	15	18	13	16		—	15.33	−0.23	−1.12					
Ton197	108	DAwk	14	21	30	31	50		—	15.30	−0.12	−1.00					
GD178	191	DAn	15	09	25	32	15.5		−0.13/0.08	14.11	0.09	−0.65					
GD185	192	DAn	15	31	30	−02	17.2		−0.050/−0.126	14.03	0.00	−0.81	19,000±500	9.1±0.50			
GD190	193	DBs	15	42	04	18	16.1		0.00/−0.075	14.72	−0.10	−1.00	18,000±2,000	8.5±1.0			
1°3129B[5]	113	DAwk	15	44	12	00	53		—	15.27	−0.32	−1.19					
R808	115	DA	15	59	33	36	57.2	0.034±0.005	0.556±0.002	14.36	0.17	−0.56					
C2	116	DA	16	06	42	42	13		—	13.85	0.06	−0.54					
R640	119	DFp	16	26	48	36	51	0.056±0.007	−0.46/0.74	13.86	0.18	−0.68	6,000(1)				
L1491-27	120	DAs	16	37	24	33	32		−0.04/−0.43	14.64	0.22	−0.58				−1.53(1)	−3.00(1)

（续表）

白矮星名	EG 号数	光谱型	α(1950.0) h	m	s	δ(1950.0) °	′	π(角秒)	μ 或 $\mu_\alpha \cos\delta/\mu_\delta$ (″/年)	V 或 $m_{照相}$ (星等)	B–V (星等)	U–B (星等)	$T_{有效}$(开)	log g	log(M/M⊙)	log(R/R⊙)	log(L/L⊙)
G169-34	197	DAss	16	55	01	21	31.7	0.042±0.003	0.561±0.001	14.04	0.26	−0.52					
G185-B5B	198	DA	17	07	00	33	17		0.013/−0.130	15.92	0.17	−0.55					
L845-70	122	DC	17	08	30	−14	45		0.27/−0.24	14.30	0.02	−0.68					
GD363	240	DA	17	37	01	41	54.0		0.10/−0.20	15.0	—	—					
LP9-231	199	DAss	17	57	00	82	44		−1.4/3.5	14.51	0.41	−0.48					
R137	125	DA	18	24	45	04	02.0	0.014±0.003	0.377±0.002	9.65	0.05	−0.55					
L993-18	126	DAs	18	26	30	−04	31		0.00/−0.29	14.54	0.24	−0.56					
GD215	225	DAss	18	40	57	04	17.3		0.10−0.20	15.0	0.25	−0.62					
G141-54	128	DAs	18	57	29	11	54.3		0.27	15.52	0.20	−0.57					
GW70°8247[2]	129	4135	19	00	36	70	36	0.081±0.010	0.101/0.508	13.19	0.05	−0.85	12,000			−2.08	−2.90
G142-B2B[5]	130	DAn	19	11	18	13	31		0.00/−0.10	14.00	0.12	−0.60					
LDS678B[5]	131	DAwk	19	17	54	−07	45.0	0.092±0.004	0.194±0.003	12.24	0.07	−0.84					
GD219	201	DAn	19	19	23	14	34.9		0.000/−0.088	13.01	0.06	−0.66					
LDS683B[5]	132	DA	19	32	54	−13	36		−0.02/−0.14	15.95	0.05	−0.76					
L1573-31	133	DB	19	40	24	37	24		0.02/−0.20	14.51	−0.09	−0.97	15,000±1,000				
G142-50	134	DA	19	43	16	16	20.4		0.00/−0.26	14.08	−0.06	−0.86					
G92-40	135	DAs	19	53	56	−01	10.2	0.082±0.004	0.822±0.002	13.71	0.30	−0.61					
W1346	139	DA	20	32	18	24	53.8	0.066±0.003	0.695±0.002	11.54	−0.07	−0.87	20,000±700	7.3±0.30	−0.83±0.15	−1.89±0.07	−1.64±0.14
GD231	288	DA	20	32	58	18	49.1		0.18	15.3	−0.04	−0.80					
L711-10	141	DA	20	39	42	−20	16		0.32/−0.09	12.0	—	—					
G210-36	261	DA	20	47	10	37	16.9		0.27	13.0	+0.07	−0.68					
GD232	279	DA	20	58	58	18	09.1		0.08	15.0	0.01	−0.75					
L24-52	142	(DA)	21	05	12	−82	01		0.08/−0.36	13.50	0.27	−0.59					
GD394	244	DAwk	21	11	03	49	53.7		0.10−0.20	—	—	—					
GW73°8031	144	DA	21	26	43	73	25.9	0.045±0.007	0.045/−0.310	12.88	0.01	−0.66	16,000±500	7.7±0.30	−0.40±0.35	−1.88±0.08	−2.00±0.16
LDS749B[5]	145	DB	21	29	36	00	00	0.021±0.003	0.420/0.000	14.73	−0.07	−0.92	14,000±1,000	7.5±0.60	−0.60±0.60	−1.83±0.10	−2.12±0.20
L1002-62	146	DB	21	31	00	−04	46		0.090/−0.006	14.0	−0.05	−0.73					
GW82°3818	147	DA	21	36	42	82	49		0.31/0.56	13.02	−0.02	−0.72					
L1363-3	148	DC	21	40	22	20	46.7	0.074±0.004	0.669±0.002	12.59	0.17	−0.72	6,000			−1.50(1)	−2.94(1)
L930-80	149	DB	21	44	54	−07	58	0.011±0.006	0.281±0.002	14.83	−0.11	−0.94	16,500±1,000	8.0±0.50	−1.12	−2.34	−2.80
G93-48	150	DA	21	49	53	02	09.5	0.039±0.002	0.268±0.002	12.77	0.00	−0.78					
GD398	281	DA	21	50	19	33	53.6		0.08	(15.0)	(−1)	—					
L1003-16	151	DAs	21	51	30	−01	31		0.000/−0.275	10.69	0.26	−0.51					
LDS785A[5]	153	DB	22	24	36	−34	27		0.21/−0.02	14.5	—	—					
GD236	228	DA	22	26	38	06	07.1		0.20−0.26	15.5	—	—					

（续表）

白矮星名	EG 号数	光谱型	α(1950.0) h	m	s	δ(1950.0) °	′	π(角秒)	μ 或 $\mu_\alpha\cos\delta/\mu_\delta$ (″/年)	V 或 $m_{照相}$ (星等)	B-V (星等)	U-B (星等)	$T_{有效}$(开)	log g	log($M/M_\odot$)	log($R/R_\odot$)	log($L/L_\odot$)
G28-13	154	DA, Fs	22	40	31	−01	43.4		−0.16/−0.30	16.21	0.31	−0.60					
GD243	230	DBn	22	53	12	−06	16.9		<0.10	15.5	—	—					
GD244	231	DA	22	54	16	12	36.8		0.20−0.26	16.0	—	—					
G241-46	284	DA	23	07	59	63	41.8		0.45	(14.4)	(−1)	—					
F108	157	DAs	23	13	36	−02	07		−0.054/−0.011	12.90	−0.28	−1.06					
C3	160	DAn	23	29	12	40	45		—	13.82	0.03	−0.72					
L1512-34B[5]	162	DA	23	41	24	32	15	0.069±0.015	−0.23/−0.06	12.90	0.15	−0.61	14,000±300	7.9±0.30	−0.49±0.35	−2.03±0.07	−2.52±0.14
L362-81	165	(DAs)	23	59	36	−43	25		0.60/−0.67	13.05	0.07	−0.87					

1 本表由格林斯坦(J. L. Greenstein)教授协助编制的。EG 号数、光谱型、位置、自行及色指数主要取自埃金和格林斯坦(Eggen 和 Greenstein, 1965*a*、*b*; 1967)及格林斯坦(Greenstein, 1969, 1970)的文章。G 及 GD 天体的位置分别取自吉克拉斯等(Giclas, Burnham 和 Thomas, 1960 至 1970 以及 Giclas, Burnham 和 Thomas, 1965, 1967, 1970)的文章。精确位置及视差取自格利斯等(Gliese, 1969; Riddle, 1970; 以及 Routly, 1972); 而某些视差值取自丘恩斯等(Churns 和 Thackery, 1971; 以及 Shipman, 1972)。大犬座 α 星的子星 B(α CMa B)的温度、表面重力、质量、半径及光度值取自格林斯坦等(Greenstein, Oke 和 Shipman, 1971)，而其他白矮星的这些值取自希普曼(Shipman, 1972)。

2 圆偏振资料表明:

天体	圆偏振(%)	磁场(高斯)
G99-37	0.63±0.03	$\approx 10^7$
G99-47	0.30～0.45	$\approx 10^6$
G195-19	0.42±0.04	$\approx 10^6$
GW70°8247	1～3	$\approx 10^7$

圆偏振资料取自肯普等(Kemp 等, 1970; Angel 和 Landstreet, 1971, 1972; Kemp 等, 1971; 以及 Landstreet 和 Angel, 1971)的文章。G195-19 的圆偏振以 1.34 天的周期变化。

3 光变白矮星包括:

天体	周期(秒)
R548	212.834±0.03
HL Tau76	746.220±0.180
G44-32	1638
HZ29	1051.118±0.015
G61-29	～20

奥斯特里克等(Ostriker 和 Hesser, 1968; Landolt, 1968; Lasker 和 Hesser, 1969, 1971; Warner 和 Nather, 1972; 以及 Warner, 1972)给出了有关变星的数据。

4 格林斯坦等(Greenstein, Oke 和 Shipman, 1971)已对大犬座 α 星的子星 B(α CMa B), 即天狼星的子星 B(Sirius B); 格林斯坦和特林布尔(Greenstein 和 Trimble, 1972)已对波江座 40 星的子星 B(40 Eri B)给出精确引力红移 v_g 及视向速度 v_r。他们得出天狼星 B 的 $v_r = +81\pm16$ 公里·秒$^{-1}$, $v_g = +89\pm16$ 公里·秒$^{-1}$ 及波江座 40 星 B 的 $v_r = -18.7\pm5.3$ 公里·秒, $v_g = +23\pm5$ 公里·秒$^{-1}$。本表中列出的大多数源的视向速度值是由格林斯坦等(Greenstein 和 Trimble, 1967; 以及 Trimble 和 Greenstein, 1972)给出的，并且只供统计使用。

5 埃金等(Eggen 和 Greenstein, 1965a)已列出另外的 19 对双星(EG1、12、14、18、21*b*、40、44、47、52、65、68、84、89、101、112、114、123、124 及 138)。

6 大多数发射线起源于背景星云状物质或密近伴星; G61-29 可能是密近双星。

$$\rho=9.738\times10^5\mu x^3\text{ 克·厘米}^{-3},$$

式中 $\mu=A/Z$。库仑修正 E_c 由下式给出:

$$E_{\text{库仑}}=-\frac{9}{5}\frac{Z^{2/3}}{r_e}\text{ 里德伯},$$

式中 1 里德伯 $=2\pi^2me^4/h^2=$ *2.179907(12) $\times10^{-11}$ 尔格 $=$ *13.605804(36) 电子伏, r_e 与质量密度 ρ 的关系为:

$$\rho=2.6787\mu r_e^{-3}\text{ 克·厘米}^{-3}。$$

托马斯-费密修正 $E_{\text{托-费}}$ 由下式给出:

$$E_{\text{托-费}}=-\frac{324}{175}\left(\frac{4}{9\pi}\right)^{2/3}\sqrt{(1+x^2)}Z^{4/3}\text{ 里德伯。}$$

交换能修正 $E_{\text{交换}}$ 为:

$$E_{\text{交换}}=-\frac{3}{2}\left(\frac{9}{4\pi^2}\right)^{1/3}\frac{1}{r_e}\text{ 里德伯}\quad(x\ll1);$$

$$E_{\text{交换}}=-\left(\frac{3}{4\pi}\right)\alpha mc^2x\varphi(x)\quad(\text{任何 }x\text{ 值}),$$

式中 $$\varphi(x)=\frac{1}{4x^4}\left[\frac{9}{4}+3\left(\beta^2-\frac{1}{\beta^2}\right)\ln\beta-6(\ln\beta)^2-\left(\beta^2+\frac{1}{\beta^2}\right)-\frac{1}{8}\left(\beta^4+\frac{1}{\beta^2}\right)\right]$$

及 $$\beta\equiv x+\sqrt{(1+x^2)}。$$

相关能量修正 $E_{\text{相关}}$ 由下式给出:

$$E_{\text{相关}}=(0.062\ln r_e-0.096)\text{ 里德伯。}$$

类似地,气体压力可以写成五项之和

$$P=P_0+P_{\text{库仑}}+P_{\text{托-费}}+P_{\text{交换}}+P_{\text{相关}},\tag{3-164}$$

式中无相互作用费密电子压力 P_0 由下式给出:

$$P_0=\frac{1}{24\pi^2}mc^2\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^3f(x),$$

式中 $$f(x)=x(2x^2-3)(x^2+1)^{1/2}+3\sinh^{-1}x。$$

库仑项及托马斯-费密项由下式给出:

$$P_{\text{库仑}}+P_{\text{托-费}}=-mc^2\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^3\left[\frac{\alpha Z^{2/3}}{10\pi^2}\left(\frac{4}{9\pi}\right)^{1/3}x^4+\frac{162}{175}\frac{(\alpha Z^{2/3})^2}{9\pi^2}\left(\frac{4}{9\pi}\right)^{2/3}\frac{x^5}{\sqrt{(1+x^2)}}\right];$$

交换项由下式给出:

$$P_{\text{交换}}=-\frac{\alpha}{4\pi^3}mc^2\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^3\chi(x),$$

式中

$$\chi(x)=\frac{1}{32}\left(\beta^4+\frac{1}{\beta^4}\right)+\frac{1}{4}\left(\beta^2+\frac{1}{\beta^2}\right)-\frac{9}{16}-\frac{3}{4}\left(\beta^2-\frac{1}{\beta^2}\right)\ln\beta$$
$$+\frac{3}{2}(\ln\beta)^2-\frac{x}{3}\left[1+\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}}\right]\left[\frac{1}{8}\left(\beta^3-\frac{1}{\beta^5}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{1}{4}\left(\beta-\frac{1}{\beta^3}\right)-\frac{3}{2}\left(\beta+\frac{1}{\beta^3}\right)\ln\beta+\frac{3}{\beta}\ln\beta\right],$$

以及相关项是：

$$P_{相关}=-\frac{0.0311}{9\pi^2}mc^2\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^3\alpha^2x^3。$$

对于极端相对论性的电子，$x\gg1$，这些方程成为：

$$\frac{P}{P_0}=1+\frac{\alpha}{2\pi}-\frac{6}{5}(\alpha Z^{2/3})\left(\frac{4}{9\pi}\right)^{1/3}-\frac{216}{175}\left(\frac{4}{9\pi}\right)^{2/3}(\alpha Z^{2/3})^2$$

$$=1.00116-4.56\times10^{-3}Z^{2/3}-1.78\times10^{-5}Z^{4/3}。$$

哈马达等(Hamada 和 Salpeter, 1961)利用上述给出的状态方程直接得到了最大半径：

$$R_{max}=0.021R_{\odot}, \tag{3-165}$$

具有质量约 $0.02M_{\odot}$。这里太阳半径 $R_{\odot}=*6.9599\times10^{10}$ 厘米，太阳质量 $M_{\odot}=*1.9891\times10^{33}$ 克。R_{max} 的这个值接近科撒里(Kothari, 1938)首先估计的值。张德拉塞卡极限质量的值由(3–162)式给出，其中 μ 依赖于化学成分。哈马达(Hamada)及萨皮得(Salpeter)得到了一个 $M_{临界}$ 的最低可能值：

$$M_{临界}=1.015\,M_{\odot}。\tag{3-166}$$

贝姆等(Baym, Pethick 和 Sutherland, 1971)在计算密度范围为 10^4 克·厘米$^{-3}\lesssim\rho\lesssim10^{11}$ 克·厘米$^{-3}$ 的白矮星中所出现的原子核平衡种类时，考虑了晶格项，结果他们得出：

$$M_{临界}=1.00\,M_{\odot},$$

式中

$$R_{max}=2140\ 公里。$$

3.3.2.3. 简并中子气(中子星)的状态方程

在中子星内物质密度随深度而增加，从最外层的约10^4 克·厘米$^{-3}$到内核的大于10^{15}克·厘米$^{-3}$。作为一级近似，物质处于基态并且可以用温度为零的状态方程来近似表示，这是因为10^{-4} 至 10^{-2} 兆电子伏(10^6 开 $\lesssim T\lesssim10^8$ 开)的热能要比典型的激发能量小得多。在最外层，10^4 克·厘米$^{-3}\lesssim\rho\lesssim4.3\times10^{11}$ 克·厘米$^{-3}$，成分是电子和原子核，状态方程可以按照前面第 3.3.2.2 节给出的步骤算出(参看 Salpeter, 1961 及 Baym, Pethick 和 Sutherland, 1971)。当密度为 4.3×10^{11} 克·厘米$^{-3}\lesssim\rho\lesssim3\times10^{14}$ 克·厘米$^{-3}$ 的范围时，富中子的原子核开始"滴出"中子，物质就由从中子气中露出的原子核和电子气组成。奥本海默等(Oppenheimer 和 Volkoff, 1939)首先考虑非相对论性中子组成的理想费密气体的状态方程。密度为 ρ_n 及中子质量为 M_n的非相对论性的、完全简并中子气，压力由(3–156)式给出：

$$P=\frac{(3\pi^2)^{2/3}}{5}\frac{\hbar^2}{M_n^{8/3}}\rho_n^{5/3}\approx10^{10}\rho_n^{5/3}\ 达因·厘米^{-2}, \tag{3-167}$$

这相当于每个粒子的动能为：

$$W(k,\ 0)=\frac{3\hbar^2(2^{1/3}k)^2}{10\,M_n}, \tag{3-168}$$

式中中子气的数密度 N_n 为：

$$N_n=\frac{k^3}{1.5\pi^2}。$$

当考虑纯中子物质的更为严格的计算时，每个粒子的能量由下式给出(Siemans 和 Panharipande, 1971)：

$$W(k,\ 0)\approx19.74k^2-k^3\frac{(40.4-1.088\,k^3)}{(1+2.545k)}\ 兆电子伏 \tag{3-169}$$

上式适用于 $k \leqslant 1.5$ 费密$^{-1}$[1)]，并且 $W(k, 0)$是用兆电子伏为单位而 k 以费密$^{-1}$ 为单位。在(3-169)式中的第一项相当于(3-168)式。

当涉及实际中子星物质时，能量及压力必须是与中子、电子和原子核的能量以及原子核的晶格结合能相应的各项的叠加。这样，每单位体积的总能量为 (Baym, Bethe 和 Pethick, 1971)：

$$E_{总}=N_N(W_N+W_L)+(1-V_N N_N)E_N(N_n)+E_\rho(N_e), \tag{3-170}$$

式中 N_N、N_n 及 N_e 分别是原子核、中子及电子的密度，$1-V_N N_N$ 是中子气占有的体积的比率。一个原子核的能量 W_N 是表面能 W_s 和库仑能 W_c 以及总体能量的总和：

$$W_N=[(1-x)M_n c^2+xM_p c^2+W(k, x)]A+W_s+W_c,$$

式中 x 是质子的百分比浓度，M_p 是质子质量，$W(k, x)$是密度为 $N_N=k^3/(1.5\pi^2)$的大块核物质的每个粒子的能量。贝姆等(Baym, Bethe 和 Pethick)给出 $W(k, x)$、W_s、W_c 及 W_N 的详尽公式。中子气的能量密度 $E_N(N_n)/N_n$ 一级近似为 $W(k, 0)+M_n c^2$，其中 $W(k, 0)$ 由(3-169)式给出，电子的能量密度 $E_e(N_e)$是上节中给出的自由电子气的值。每个原子核的晶格能由下式给出：

$$W_L=-\frac{1.82Z^2e^2}{a},$$

式中晶格常数 $a=(2/N_N)^{1/3}$，库仑能 W_c 的量级为：

$$W_c\approx\frac{3}{5}\,\frac{Z^2e^2}{r},$$

式中 $4\pi N_N r_N^3\approx 3$。贝姆等(Baym, Bethe 和 Pethick, 1971)给出密度范围 $4.6\times10^{11}\sim2.4\times10^{14}$ 克·厘米$^{-3}$ 的中子星物质的公式及其数值。巴凯特(Barkat, Buchler 和 Ingber, 1972)用一种推广的费密-托马斯核模型计算了作为中子星物质密度 (范围为 10^8 克·厘米$^{-3}\lesssim\rho\lesssim10^{14}$ 克·厘米$^{-3}$)函数的压力。巴克勒等(Buchler 和 Barkat, 1971; 以及 Buchler 和 Ingber, 1971)应用原子核的费密-托马斯模型做出了另外的工作。雷文霍尔等(Ravenhall, Bennet 和 Pethick, 1972)采用了一种比贝姆等(Baym, Bethe 和 Pethick, 1971)更可靠的核表面理论，其计算结果类似于巴凯特等(Barkat, Buchler 和 Ingber, 1972)的结果。

奥本海默等(Oppenheimer 和 Snyder, 1939) 首先指出质量大于某一临界值 $M_{临界(中子星)}$ 的中子星将无定限地坍缩而形成一个闭合的俘获表面，从该表面不会有任何电磁辐射能逸出。临界值为(Oppenheimer 和 Volkoff, 1939; Tsuruta 和 Cameron, 1966)：

$$M_{临界(中子星)}\approx0.69\,M_\odot\sim2.0\,M_\odot,$$

此时的最小半径为：

$$R_{\min}=9.42\ 公里。$$

贝姆等(Baym, Pethick 和 Sutherland, 1971)利用贝姆等(Baym, Bethe 和 Pethick, 1971)给出的状态方程得出了中子星的最大半径为：

$$R_{\max}=164\ 公里, \tag{3-171}$$

稳定的最大质量为：

$$M_{临界(中子星)}\approx1.41\,M_\odot,$$

稳定的最小质量为：

$$M_{\min}=0.0925\,M_\odot。$$

1) 1 费密(fermi 简写为 fm)$=10^{-15}$ 米。——译者注

质量 $M \gtrsim M_{临界(中子星)}$ 的中子星在引力坍缩下是不稳定的，而 $M \lesssim M_{min}$ 的中子星在径向振荡下是不稳定的，并且不具有平衡组态。

在密度高于 2.4×10^{14} 克·厘米$^{-3}$ 时，原子核开始相互接触，在物质成为质子和电子海中的简并中子海时，质子和电子都约为中子丰度的 4%。当密度超过 10^{15} 克·厘米$^{-3}$时，超子也变得重要了。王等 (Wang, Rose 和 Schlenker, 1970) 给出了密度为 $2\sim10\times10^{14}$ 克·厘米$^{-3}$ 范围内的具体的状态方程，并且如鲁德曼(Ruderman, 1969)的评论所指出的，物质可能由超流中子以及百分之几的超流质子和正常电子所组成。对于一个由费密子组成的简并系统来说，当具有相同的质心系动量的粒子成对相关时，超流性是能够存在的。这就建立了一个新的基能态，并且在零温度能谱中出现一个能隙 ε。由巴丁等 (Bardeen, Cooper 和 Schrieffer, 1957) 给出：

$$\varepsilon = kT_c = \frac{4N_p}{N_0} = 4\hbar\omega \exp\left[-\frac{1}{N_0V}\right], \tag{3-172}$$

式中 N_p 实际上是激发到费密面以上的电子偶的数目，$N_0 \approx m\sqrt{2mEf}/(2\pi^2\hbar^3)$ 是在费密面上每单位能量范围内一种自旋粒子的能态数，E_f 是费密能量，ω 是平均晶格频率，$-V$ 是电子偶之间的相互作用能。在转变温度 T_c，热激发使电子偶的数目减少到零，系统处于正常的简并态。正如金兹堡等(Ginzburg, 1969; 及 Ruderman, 1969)所强调的，具有 $\rho\approx10^{14}\sim10^{15}$ 克·厘米$^{-3}$的中子星物质可能是超流体。杨等(Yang 和 Clark, 1971; Chao, Clark 和 Yang, 1972 以及 Krotscheck, 1972)给出了中子星物质的超流性的物理细节。假定脉冲星周期的变化反映中子星自转率的变化，则这种变化可能以派斯(Pines, 1970)所评述过的方式与超流核心的物理情况有关。

哈里森等(Harrison, Thorne, Wakano 和 Wheeler, 1964; Buchler 和 Ingber, 1971; Panharipande, 1971; Frautschi, Bahcall, Steigman 和 Wheeler, 1971; 以及 Leung 和 Wang, 1971)研究了密度大于 10^{15} 克·厘米$^{-3}$ 的物质的状态方程。这些研究的结论之一是中子星的最大质量必定在 $0.1M_\odot$ 与 $1.5M_\odot$ 之间，同时质量依赖极高密度的核心物质的详细组成(参看 Clark, Heintzmann, Hillebrant 和 Grewing, 1971)。

3.3.2.4. 中微子气的数密度、能量密度、熵密度及状态方程

静质量为零的中微子气的数密度由下式给出(Kuchowicz, 1963 及私人通信)：

$$N = 8\pi g\left(\frac{kT}{hc}\right)^3 F_2\left(\frac{\mu}{kT}\right), \tag{3-173}$$

式中 $g\approx1$ 是中微子的统计权重，T 是气体温度，费密-狄拉克积分 $F_n(\mu/kT)$ 为：

$$F_n\left(\frac{\mu}{kT}\right) = \frac{1}{n!}\int_0^\infty \frac{x^n dx}{\exp\left(x-\frac{\mu}{kT}\right)+1}, \tag{3-174}$$

式中中微子化学势 μ 由(3-104)式给出。

中微子能量密度 U/V 由下式给出：

$$\frac{U}{V} = 3P = 24\pi gkT\left(\frac{kT}{hc}\right)^3 F_3\left(\frac{\mu}{kT}\right), \tag{3-175}$$

式中 P 是中微子压力，U 是能量，V 是体积。中微子气体的熵密度 S/V 由下式给出：

$$\frac{S}{V} = 8\pi gk\left(\frac{kT}{hc}\right)^3\left[4F_3\left(\frac{\mu}{kT}\right) - \left(\frac{\mu}{kT}\right)F_2\left(\frac{\mu}{kT}\right)\right], \tag{3-176}$$

式中 S 是熵。

由(3-175)式可知，具有静质量为零的中微子气的压力 P 由下式给出：

$$P=8\pi gkT\left(\frac{kT}{hc}\right)^3 F_3\left(\frac{\mu}{kT}\right),$$

式中 $g\approx1$ 是中微子的统计权重，T 是气体温度，μ 是由(3-104)式给出的化学势，费密-狄拉克积分 $F_n(\mu/kT)$ 由(3-174)给出。

中微子气体状态方程的渐近式是(Kuchowicz, 1963 及私人通信)：

对于极端简并($\mu\gg kT$)情况

$$\begin{aligned}P=&\frac{\pi gkT}{3}\left(\frac{kT}{hc}\right)^3\left\{\left[\frac{1}{2}y^4+\frac{1}{3}\pi^6y^2+\frac{1}{27}\pi^{12}+D^{1/2}\right]^{1/3}\right.\\&\left.+\left[\frac{1}{2}y^4+\frac{1}{3}\pi^6y^2+\frac{1}{27}\pi^{12}-D^{1/2}\right]^{1/3}-\frac{\pi^4}{5}\right\}\\\approx&\frac{\pi g}{3}\,\frac{(kTy^{1/3})^4}{(hc)^3},\end{aligned}\tag{3-177}$$

式中

$$D=\frac{y^2}{4}+\frac{\pi^6}{27},$$

$$y=\frac{3N}{4\pi g}\left(\frac{hc}{kT}\right)^3,$$

这里 N 是(3-173)式给出的中微子数密度。

对于弱简并($\mu\ll-0.4kT$)情况，当 $N<T^3$ 时

$$\begin{aligned}P=&\frac{16\pi gkT}{3}\left(\frac{kT}{hc}\right)^3\left[1+\frac{y}{24}-\left(1-\frac{y}{12}\right)^{1/2}\right]\\\approx&\frac{NkT}{3}\left[1+\frac{N}{128\,\pi g}\left(\frac{hc}{kT}\right)^3\right]。\end{aligned}\tag{3-178}$$

当化学势为零时，我们得到类似于斯忒藩-玻耳兹曼定律的中微子的表达式，光子与中微子的统计法差一个因子 $7g/16$。对于中微子-反中微子气，这个因子加倍。

3.3.3. 光子气

3.3.3.1. 爱因斯坦-玻色统计法

自旋为 $\hbar/2$ 的偶倍数的基本粒子(光子和偶质量数的核)服从爱因斯坦统计法(Einstein, 1924; Bose, 1924)。这些粒子是不能相互区分的，因此就处在一个确定量子态的粒子数来说，所有值都是等同可能的。具有动能为 ε 及 $\varepsilon+d\varepsilon$ 之间的粒子数密度 $n(\varepsilon)$ 由下式给出：

$$Vn(\varepsilon)=\frac{g(\varepsilon)d\varepsilon}{\exp\left[\frac{-\mu}{kT}+\frac{\varepsilon}{kT}\right]-1},\tag{3-179}$$

式中 $g(\varepsilon)$ 是可能的粒子能态 ε 的数目，其值由(3-109)式给出，V 是体积，化学势 μ 由(3-104)式给出。

对于光子的特殊情况，$\mu=0$，因此

$$Vn(\varepsilon)=\frac{g(\varepsilon)d\varepsilon}{\exp\left(\frac{\varepsilon}{kT}\right)-1}。$$

每单位体积的粒子总数 N 由下式给出：

$$N=\int_0^{\infty}n(\varepsilon)d\varepsilon=\frac{g}{2\pi^2\hbar^3}\int_0^{\infty}\frac{p^2dp}{\exp\left[\frac{-\mu}{kT}+\frac{\varepsilon}{kT}\right]-1}, \tag{3-180}$$

式中 g 是统计权重，ε 由(3-111)式与动量 p 联系起来。对于非相对论性气体 ($\varepsilon=p^2/2m$, $p\ll mc$, $kT\ll mc^2$),

$$N=\frac{4\pi}{h^3}(2mkT)^{3/2}\int_0^{\infty}\frac{x^{1/2}dx}{\exp\left[\frac{-\mu}{kT}+x\right]-1}。$$

总能量密度 U/V 由下式给出：

$$\frac{U}{V}=\frac{g}{2\pi^2\hbar^3}\int_0^{\infty}\frac{\varepsilon p^2dp}{\exp\left[\frac{-\mu}{kT}+\frac{\varepsilon}{kT}\right]-1}。$$

对于非相对论性气体，上式简化为：

$$\frac{U}{V}=\frac{4\pi}{h^3}(2m)^{3/2}(kT)^{5/2}\int_0^{\infty}\frac{x^{3/2}dx}{\exp\left[\frac{-\mu}{kT}+x\right]-1}。 \tag{3-181}$$

3.3.3.2. 光子气的状态方程、能量密度及熵

当密度低于临界密度 ρ_{cp}:

$$\rho_{cp}=3.0\times10^{-23}\mu T^3\ 克\cdot厘米^{-3}\ 或\ T=3.20\times10^7\left(\frac{\rho_{cp}}{\mu}\right)^{1/3}开 \tag{3-182}$$

时，光子气的压力就会超过非简并理想气体的压力，这里常数 μ 是平均分子量。因为光子能量是 $h\nu$，由(3-181)式可知，光子气的辐射压力为：

$$P=\frac{1}{3}\int_0^{\infty}h\nu N(\nu)d\nu=\frac{1}{3}\frac{U}{V}, \tag{3-183}$$

式中 U/V 是能量密度，频率在 ν 与 $\nu+d\nu$ 之间的光子的数密度 $N(\nu)$ 为：

$$N(\nu)=\frac{8\pi\nu^2}{c^3}\frac{1}{\left[\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)-1\right]}d\nu\ 。 \tag{3-184}$$

把(3-184)式代入(3-183)式，我们得到：

$$P=\frac{1}{3}\frac{U}{V}=\frac{1}{3}aT^4, \tag{3-185}$$

式中辐射常数 a 为：

$$a=\frac{8\pi^5}{15}\frac{k^4}{h^3c^3}={}^*7.565660\times10^{-15}尔格\cdot厘米^{-3}\cdot开^{-4}。$$

在表 36 中给出在温度 T 下各种密度 ρ 的气体的状态方程。辐射常数 a 与斯忒藩-玻耳兹曼常数 σ 的关系式(Stefan, 1879; Boltzmann, 1884)为：

$$\sigma=\frac{ac}{4}={}^*5.67032\times10^{-5}\ 尔格\cdot厘米^{-2}\cdot开^{-4}\cdot秒^{-1}。$$

光子气的进一步的关系式，将在第 1.23 节讨论有关来自黑体的热辐射时给出。例如，当每单位体积的总能量是 $U/V=aT^4$，而压力 $P=aT^4/3$ 时，每单位体积的熵是 $S/V=4aT^3/3$。

表 36 不同范围的质量密度 ρ 及温度 T 的状态方程(P 为气体压力，μ 为平均分子量及 μ_e 为电子的平均分子量)

状态	密度 ρ (克·厘米$^{-3}$)	压力 P (达因·厘米$^{-2}$)
光子气体——辐射压力	$\rho<3.0\times10^{-23}\mu T^3$	$P=2.521\times10^{-15}T^4$
理想非简并气体	$3.0\times10^{-23}\mu T^3<\rho<2.4\times10^{-8}\mu_e T^{3/2}$	$P=8.314\times10^7\rho T/\mu$
非相对论性的完全简并电子气	$2.4\times10^{-8}\mu_e T^{3/2}<\rho<7.3\times10^6\mu_e$	$P=1.004\times10^{13}\left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)^{5/3}$
相对论性的、完全简并电子气	$7.3\times10^6\mu_e<\rho\lesssim10^{11}$	$P=1.244\times10^{15}\left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)^{4/3}$
以及	$2.4\times10^{-8}T^{3/2}\mu_e\lesssim\rho\lesssim10^{11}$	
简并中子气	$10^{11}\lesssim\rho\lesssim10^{14}$	$P\approx10^{10}(\rho)^{5/3}$

3.4. 气体的宏观结构——维里定理[1)]

3.4.1. 克劳修斯维里定理

考虑质量为 m 的一个分子的运动。设 $\boldsymbol{r}$ 是从一个任意的原点量起的它的位置矢量，$\boldsymbol{F}$ 是作用在该分子上的力，则

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\boldsymbol{F},$$

将上式两边作 $\boldsymbol{r}$ 的标积，并且将所得到的方程改变一下后，我们就得出[2)]：

$$\frac{1}{2}m\frac{d^2\boldsymbol{r}^2}{dt^2}=m\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{r}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)=m\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)^2+\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{r}。\tag{3-186}$$

令 $\sum$ 表示对所有分子的系综平均，并且注意到处于平衡态的宏观体系是稳定的，(3-186)式就化成克劳修斯维里定理(Clausius, 1870)：

$$\sum m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\sum\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{r}=0,\tag{3-187}$$

式中 $\sum\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{r}$ 称为维里项。由于庞加莱通过假定作用在分子系统上的唯一的力是它们之间的相互吸引力而导出了(3-187)式，所以上式也称为庞加莱定理。在这种情况下，(3-187)式化成(Poincaré, 1811)：

$$2T+\Omega=0,\tag{3-188}$$

式中 T 是粒子的总动能，Ω 是系统的总引力势能。

正如爱丁顿(Eddington, 1916)所指出的，(3-187)式和(3-188)式把转动惯量 I 包括进去后，就可以推广到涉及非平衡状态的情况。在这种不稳定情况下，

$$\frac{1}{2}\frac{d^2I}{dt^2}=\sum m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\sum\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{r}=2T+Q,\tag{3-189}$$

式中 $I=\sum mr^2$。

当磁能 $\mathscr{M}$ 及物体运动的动能 T_m 都加以考虑的话，平衡维里定理成为(Chandrasekhar 和 Fermi, 1953)：

$$2[T_m+T_k]+\Omega+\mathscr{M}=0,\tag{3-190}$$

---

1) 维里(virial)一词源出于拉丁文 vis(复数为 vires)，意思是"力"。这个词最早是克劳修斯在讨论气体运动理论时提出的。——译者注

2) 原文(3-186)式等号左端为 $\frac{1}{2}m\frac{d^2r}{dt^2}$，有误。——译者注

式中T_k是分子运动的动能，Ω是系统的总引力势能。对于一个半径为R、质量为M、压力为P及温度为T的理想气体球来说，

$$2T_k=\frac{3MkT}{\mu m_H}=4\pi PR^3=3(\gamma-1)U, \tag{3-191}$$

式中μ是平均分子量，m_H是氢的质量，γ是绝热指数，U是分子运动引起的内能(热能)。对于以角速度ω自转的气团来说，其整体运动的动能T_m由下式给出：

$$T_m=\frac{1}{2}I\omega^2, \tag{3-192}$$

式中I是转动惯量。对于一个质量为M、半径为R的球，

$$T_m=\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{1}{5}MR^2\omega^2, \tag{3-193}$$

这样一个球的引力势能Ω为：

$$\Omega=-\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}, \tag{3-194}$$

式中引力常数$G=$*6.6720$\times10^{-8}$达因·厘米^2·克$^{-2}$，磁能$\mathscr{M}$由下式给出：

$$\mathscr{M}=\frac{1}{6}H^2R^3, \tag{3-195}$$

式中H是球内的平均磁场强度。

3.4.2. 里特关系式

对于处在流体静力学平衡中的气体所发生的绝热过程，由热力学第一定律可知，系统的内能U的变化dU由下式给出：

$$dU=-PdV, \tag{3-196}$$

式中P是气体压力，dV是体积V的变化。对于包含理想气体的绝热过程，温度T的变化dT由下式给出：

$$\frac{dT}{T}=-(\gamma-1)\frac{dV}{V}, \tag{3-197}$$

式中γ是绝热指数。利用(3-196)式、(3-197)式以及理想气体定律，我们得到：

$$dU=\frac{N_{总}kdT}{(\gamma-1)}$$

及

$$U=\frac{N_{总}kT}{(\gamma-1)}=\frac{2T_k}{3(\gamma-1)},$$

式中k是玻耳兹曼常数，$N_{总}$是分子的总数，T_k是分子运动的总内能。利用庞加莱形式的维里定理可以得出：

$$U=-\frac{\Omega}{3(\gamma-1)}, \tag{3-198}$$

这就是里特关系式(Ritter, 1880)。于是总内能E由下式给出：

$$E=U+\Omega=\frac{3\gamma-4}{3(\gamma-1)}\Omega。 \tag{3-199}$$

当$\gamma<4/3$时，能量E是负的，所以当$\gamma<4/3$时气团要克服绝热脉动而显得不稳定。当包括由(3-195)式给出的磁能$\mathscr{M}$时，动力稳定性的判据成为$(3\gamma-4)(|\Omega|-\mathscr{M})>0$。此外，张德拉塞卡(Chandrasekhar, 1964)已证明比热的比值的牛顿下限4/3由于广义相对论引起的一些效应而会增高。只要γ是有限值，一旦质量收缩而半径小于下列临界值，那就会发生动

力学不稳定性：

$$R_0=\frac{K}{\gamma-4/3}\,\frac{2GM}{c^2}\approx 4.7\times10^{17}\text{ 厘米},\tag{3-200}$$

式中当多方指数范围为0至4时，常数K的范围为0.45至1.12。上式中的近似值4.7×10^{17}厘米是对多方指数为3而言的。

3.4.3. 简并物质的张德拉塞卡极限质量

当只考虑分子运动的动能及引力势能时，半径为R的一个球形天体的维里定理为：

$$3PV=4\pi PR^3=\frac{3}{5}\,\frac{GM^2}{R},\tag{3-201}$$

式中P是气体压力，V是体积，M是质量以及引力常数$G=*6.6720\times10^{-8}$达因·厘米^2·克$^{-2}$。对相对论性的、完全简并的电子气来说，P由(3-158)式给出，

$$P=*1.243491\times10^{15}\left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)^{4/3}\text{达因·厘米}^{-2},\tag{3-202}$$

式中ρ是质量密度，μ_e是电子的分子量。由(3-201)式及(3-202)式可知，对于相对论性的、完全简并的电子气，

$$M=\left(\frac{2}{\mu_e}\right)^2 1.4587M_\odot=1.4587M_\odot\quad\text{（对于氢）},\tag{3-203}$$

式中太阳质量$M_\odot=*1.9891\times10^{33}$克。但是，相对论性气体的能量密度是$3P$[1)]，由(3-201)式可知，总能量是零。因此，一个由相对论性气体组成的天体并不会被引力所束缚，因而这种天体是不稳定的。(3-203)式给出的质量M是电子简并态所能承受的最大质量。朗道(Landau, 1932)首先预言这种质量极限的存在，张德拉塞卡(Chandrasekhar, 1935)首先作了数值计算。正如第3.3.2节所阐明的，哈马达等(Hamada 和 Salpeter, 1961)对状态方程作了修正，得出极大质量在1.01与$1.40M_\odot$之间，这取决于天体的化学组成。梅斯特尔(Mestel, 1965)首先指出，质量上限适用于球对称、非自转恒星，但并不适用于非球形结构或转动结构的恒星。罗克斯伯格(Roxburgh, 1965)得出均匀自转恒星的临界质量为$6.13\mu_e^{-2}M_\odot$，而奥斯特里克等(Ostriker, Bodenheimer 和 Lynden-Bell, 1966)证明了一个能够作较差自转的白矮星却并没有任何质量限制。奥斯特里克等(Ostriker 和 Bodenheimer, 1968)已提出了许多质量处在1.3至$4.1M_\odot$范围的这一类恒星模型。磁场也可能增加临界质量，质量在该临界质量之上的恒星就会发生坍缩。

3.4.4. 存在磁场或外压力时引力收缩的条件——动力稳定性的最大磁场及最大质量

考虑一个半径为R、质量为M、具有平均强度为H的内磁场的理想气体球。若气体处于平衡状态，由维里定理((3-190)式)可知，

$$3(\gamma-1)U+\Omega+\mathscr{M}=0,\tag{3-204}$$

式中总能量

$$E=U+\Omega+\mathscr{M},\tag{3-205}$$

U、Ω及μ分别是分子运动的热能、总引力势能及磁能。消去U，我们得到：

$$E=-\frac{3\gamma-4}{3(\gamma-1)}[|\Omega|-\mathscr{M}],\tag{3-206}$$

1) 原文误为$P/3$。——校者注

考虑到动力稳定性，E 必须大于零。因此，在没有磁场时，考虑了动力学稳定性，$\gamma>4/3$。在存在磁场时，由(3–194)式及(3–195)式所给出的 Ω 及 $\mathscr{M}$，可以证明当质量大于

$$M_c=\left[\frac{5}{18}\frac{H^2R^4}{G}\right]^{1/2}$$

时，磁场不会引起动力学不稳定性，以太阳质量 $M_{\odot}$ 及半径 $R_{\odot}$ 来表示动力学稳定性条件 $\mathscr{M}<|\Omega|$，则有

$$H<2\times10^8\frac{M}{M_{\odot}}\left(\frac{R_{\odot}}{R}\right)^2\text{高斯,}\tag{3–207}$$

这就给动力学稳定性规定了磁场的上限。

当半径为 R、质量为 M、温度为 T 的一个理想气体球的表面受到均匀外压力 P_e 时，平衡维里方程(3–190)式为：

$$2T_k-4\pi P_eR^3+\Omega=0\tag{3–208}$$

或

$$P_e=\frac{3MkT}{4\pi R^3\mu m_{\rm H}}-\frac{3GM^2}{20\pi R^4},\tag{3–209}$$

式中 μ 是分子量，$m_{\rm H}$ 是氢原子的质量。如麦克雷(Ma Crea, 1957)所证明的，P_e 将到达一个临界极小值 P_{ec}，高于此值时，云将开始收缩。将(3–209)式对半径 R 求微分，我们得到：

$$P_{ec}=\frac{3}{16\pi G^3M^2}\left(\frac{45}{12}\right)^3\left(\frac{kT}{\mu m_{\rm H}}\right)^4。\tag{3–210}$$

所有大于临界质量

$$M_c=\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{\pi}\,G^{3/2}\,P_{ec}^{1/2}}\left(\frac{45}{12}\right)^{3/2}\left(\frac{kT}{\mu m_{\rm H}}\right)^2\tag{3–211}$$

的天体，就会坍缩。相应的临界半径为：

$$R_c=\frac{12}{45}\frac{GM\mu m_{\rm H}}{kT}\approx6\times10^6\frac{\mu}{T}\frac{M}{M_{\odot}}R_{\odot}\text{ 厘米,}\tag{3–212}$$

小于此半径即会发生坍缩。相应的质量密度为：

$$\rho_c=\left(\frac{45}{12}\right)^3\frac{3}{4\pi G^3M^2}\left(\frac{kT}{m_{\rm H}\mu}\right)^3\approx10^{-20}\left(\frac{T}{\mu}\right)^3\left(\frac{M_{\odot}}{M}\right)^2\text{克·厘米}^{-3},\tag{3–213}$$

大于此质量密度即发生坍缩。

3.4.5. 引力收缩、流体动力学时间尺度及开尔文–亥姆霍兹收缩时间

假定自由下落并且向内下落的动能等于引力势能，就可得出坍缩时间 $\tau_{\rm H}$。这一流体动力学时间尺度由下式给出：

$$\tau_{\rm H}\approx\left(\frac{1}{\rho}\left|\frac{d\rho}{dt}\right|^{-1}\right)\approx\frac{1}{(4\pi G\rho)^{1/2}}\approx\frac{R^{3/2}}{2(GM)^{1/2}}\approx10^3\rho^{-1/2}\text{ 秒。}\tag{3–214}$$

上式适用于密度为 ρ、半径为 R 及质量为 M 的球。如果一个初始均匀密度为 ρ_0，半径为 R_0 的球，则在开始自由下落后时间 t 时，其半径 R 由下述关系式给出：

$$\left(\frac{8\pi G}{3}\rho_0\right)^{1/2}t=\left(1-\frac{R}{R_0}\right)^{1/2}\left(\frac{R}{R_0}\right)^{1/2}+\sin^{-1}\left(1-\frac{R}{R_0}\right)^{1/2}。\tag{3–215}$$

设 λ_J 是临界琼斯长度，则直径为 $D>\lambda_J$ 的气团引力凝聚增加到 e 倍的时间为：

$$\tau\approx\{4\pi G\rho[1-(\lambda_J/D)^2]\}^{-1/2}。\tag{3–216}$$

当考虑了由于辐射而引起的能量耗散后，相应的时间尺度为：

$$\tau_{开-亥} \approx \frac{GM^2}{RL}, \tag{3-217}$$

式中 L 是球的光度。由于亥姆霍兹(Helmholtz, 1854)及开尔文(Kelvin, 1861, 1863)首先假设一颗恒星的寿命可以按引力收缩能等于辐射能而确定，因而上列时间 $\tau_{开-亥}$称为开尔文-亥姆霍兹收缩时间。这种计算得出的结论是：核能源与引力能源不同，它必须维持一颗恒星的发光。

3.4.6. 转动流体块状物的稳定平衡椭球

根据维里方程可推导出以均匀角速度自转的均匀流体形成的平衡外形。正如张德拉塞卡(Chandrasekhar, 1969)的著作及该著作所引的其他文献中所作的详细讨论那样，把维里方程写成了张量形式，并且还包括进了相应于压力分布、离心力势及科里奥利加速度三个附加项。对于质量密度为 ρ、均匀自转速度为 ω 的均匀流体，维里定理成为：

$$\frac{d}{dt}\int_v \rho u_i x_j dx = 2T_{ij} + \Omega_{ij} + \omega^2 I_{ij} - \omega_i\omega_k I_{kj} + 2\varepsilon_{ilm}\omega_m \int_v \rho u_i x_j\, dx + \delta_{ij}\Pi, \tag{3-218}$$

式中积分是体积分

$$\frac{d}{dt}\int_v \rho u_i x_j dx = \frac{1}{2}\,\frac{d^2 I_{ij}}{dt^2}。 \tag{3-219}$$

在稳态时上式变成零，u_i 及 x_j[1]是相对于流体质心的速度及空间分量，转动惯量张量 I_{ij} 由下式给出：

$$I_{ij} = \int_v \rho x_i x_j\, dx, \tag{3-220}$$

动能张量 T_{ij} 由下式给出：

$$T_{ij} = \frac{1}{2}\int_v \rho u_i u_j\, dx, \tag{3-221}$$

引力势能张量 Ω_{ij} 由下式给出：

$$\Omega_{ij} = -\frac{1}{2}\int_v \rho U_{ij}\, dx = \int_v \rho x_i \frac{\partial U_{ij}}{\partial x_j}\, dx, \tag{3-222}$$

式中 U_{ij} 是引力势。若 $i=j$，克罗内克(Kröneoker)δ 函数 $\delta_{ij}=1$，否则为零；若 i、l、m 为循环次序，则 $\varepsilon_{ilm}=+1$；若 i、l、m 不是循环次序，则 $\varepsilon_{ilm}=-1$；若任何两个下标重复，则 $\varepsilon_{ilm}=0$。

来自压力分布 P 的项 Π 由下式给出：

$$\Pi = \int_v P\, dx。 \tag{3-223}$$

若把自转方向选取为 x_3 轴，则在静态条件下(3-218)式成为：

$$\Omega_{ij} + \omega^2(I_{ij} - \delta_{i3} I_{3j}) = -\delta_{ij}\Pi。 \tag{3-224}$$

对于具有半轴为 a_1、a_2 及 a_3 的均匀椭球来说，势能张量 Ω_{ij} 由下式给出：

$$\Omega_{ij} = -2\pi G\rho A_i I_{ij}, \tag{3-225}$$

式中转动惯量张量 I_{ij} 由下式给出：

$$I_{ij} = \frac{1}{5} M a_i^2 \delta_{ij}, \tag{3-226}$$

质量 M 由下式给出：

1) 原文误为 x_i。——译者注

$$M=\frac{4}{3}\pi a_1a_2a_3\rho, \tag{3-227}$$

而

$$A_i=a_1a_2a_3\int_0^\infty\frac{du}{\Delta(a_i^2+u)}, \tag{3-228}$$

其中

$$\Delta^2=(a_1^2+u)(a_2^2+u)(a_3^2+u)。 \tag{3-229}$$

在一个固态均匀椭球内的一点 x_i 处，位势 U 由下式给出：

$$U=\pi G\rho\left(I-\sum_{i=1}^{3}A_ix_i^2\right), \tag{3-230}$$

式中

$$I=a_1a_2a_3\int_0^\infty\frac{du}{\Delta}=\sum_{i=1}^{3}a_i^2A_i。 \tag{3-231}$$

在一个均匀椭球外的点 x_i 处，位势 U 由下式给出：

$$U=\pi G\rho a_1a_2a_3\int_\lambda^\infty\frac{du}{\Delta}\left(1-\sum_{i=1}^{3}\frac{x_i^2}{a_i^2+u}\right), \tag{3-232}$$

式中所考虑点的椭球坐标是 λ，并由下列方程的正根给出：

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{x_i^2}{a_i^2+\lambda}=1。 \tag{3-233}$$

由(3-224)式及(3-225)式可知，对于 $a_1=a_2$ 的一个麦克劳林球体，角速度 ω 由下式给出(Maclaurin, 1742)：

$$\omega=\left\{2\pi G\rho\left[\frac{(1-e^2)^{1/2}}{e^3}(3-2e^2)\sin^{-1}e-\frac{3}{e^2}(1-e^2)\right]\right\}^{1/2}, \tag{3-234}$$

式中偏心率 e 由下式给出：

$$e=\left(1-\frac{a_3^2}{a_1^2}\right)^{1/2}。 \tag{3-235}$$

麦克劳林球体的角动量 L 由下式给出：

$$L=(GM^3\langle a\rangle)^{1/2}\frac{\sqrt{3}}{5}\left(\frac{a_1}{\langle a\rangle}\right)^2\frac{\omega}{\sqrt{\pi G\rho}}, \tag{3-236}$$

式中

$$\langle a\rangle=(a_1^2a_3)^{1/3}$$

是一个质量与球体一样为M的球的半径，其中质量 M 由(3-227)式给出。角速度从 $e=0$ 的零值增加到 $e=0.92995$ 时的最大值 ω_{max}：

$$\omega_{max}^2=0.449331(\pi G\rho), \tag{3-237}$$

接着又减小，在 e 接近 1 时为零(参看图 20)。当 e 从 0 变到 1 时，角动量 L 单调地从零增至无穷大。不过，当

$$0.81267<e\leqslant0.95289, \tag{3-238}$$

由于粘滞过程，麦克劳林球体就会变得长期不稳定，而且当

$$0.95289\leqslant e\leqslant1, \tag{3-239}$$

它们是动力学不稳定的。

雅可比(Jacobi, 1834)第一个认识到平衡位形对椭球($a_1\neq a_2$)就象对球体($a_1=a_2$)位形一样，是可能的。由(3-224)式及(3-225)式可知，雅可比椭球的角速度 ω 为(Jacobi, 1834)：

$$\omega=\left[2\pi G\rho a_1a_2a_3\int_0^\infty\frac{udu}{(a_1^2+u)(a_2^2+u)\Delta}\right]^{1/2}, \tag{3-240}$$

这只要满足几何制约

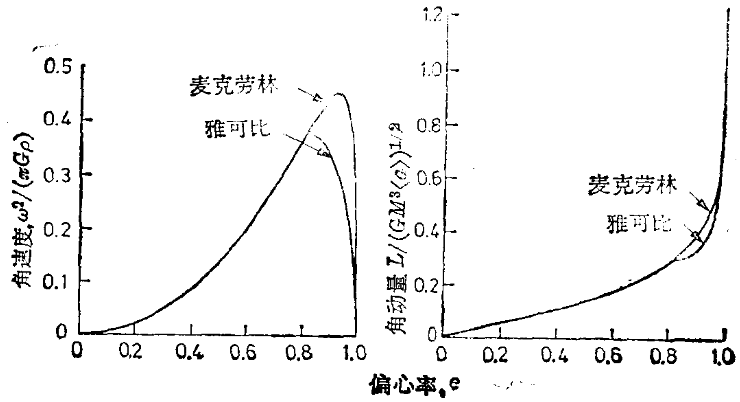


图 20 具有不同偏心率 e 的麦克劳林球体及雅可比球体的角速度 ω 的平方及角动量 L(取自 Chandrasekhar, 1969 的书)。图中 G 是牛顿引力常数,M 是质量,ρ 是质量密度,$\langle a\rangle$是平均半径

$$a_1^2 a_2^2 \int_0^\infty \frac{du}{(a_1^2+u)(a_2^2+u)\Delta} = a_3^2 \int_0^\infty \frac{du}{(a_3^2+u)\Delta}。 \tag{3-241}$$

由该制约可得出满足下列不等式的 a_3 的解

$$\frac{1}{a_3^2} > \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2}。 \tag{3-242}$$

雅可比椭球的角动量 L 由下式给出:

$$L = (GM^3\langle a\rangle)^{1/2} \frac{\sqrt{3}}{10} \frac{a_1^2+a_2^2}{\langle a\rangle^2} \frac{\omega}{\sqrt{\pi G\rho}}, \tag{3-243}$$

式中
$$\langle a\rangle = (a_1 a_2 a_3)^{1/3}。$$

偏心率 e 和角速度 ω 直到分支点:

$$\omega = [0.37423\pi G\rho]^{1/2} \text{ 及 } e = 0.81297 \tag{3-244}$$

时,麦克劳林球体仍是雅可比椭球方程的一个解。在分支点时,$a_1 = a_2$, $a_3 = 0.582724\, a_1$ 及 $L = 0.303751(GM^3\langle a\rangle)^{1/2}$。当 $\omega \leqslant [0.37423\pi G\rho]^{1/2}$ 及 $e \geqslant 0.81297$, 有三种可能的平衡位形,两种麦克劳林球体及一种雅可比椭球,而当 $0.3742 \leqslant \omega^2/(\pi G\rho) \leqslant 0.4493$, 只有麦克劳林形状是可能的。当 e 增加时,沿着雅可比序列的方向,a_2/a_1、a_3/a_1 及 ω 单调地减到零,而角动量单调地增加到无穷大(参看图 20)。庞加莱(Poincaré, 1855)证明,当

$$\frac{a_2}{a_1} = 0.432232, \quad \frac{a_3}{a_1} = 0.345069 \text{ 及 } \omega = [0.284030\pi G\rho]^{1/2}, \tag{3-245}$$

雅可比序列分成二支梨形位形的一个新序列。在这一点,雅可比椭球是不稳定的,就此而言,它与麦克劳林序列的不同在于:后者在支点的每一边仍然是保持稳定的(Cartan, 1924, Lyttleton, 1953)。

对于一颗无穷小的、密度为 ρ 的均匀卫星,在半径为 R 的圆形开普勒轨道上绕质量为 M 的一颗刚性球形行星旋转,当旋转角速度 ω 超过极限(Roche, 1847)

$$\frac{\omega^2}{\pi G\rho} = \frac{M}{\pi\rho R^3} \leqslant 0.090093 \tag{3-246}$$

时,就不会存在有平衡位形。(3-246)式给出的 R 的下限称为洛希极限。当只考虑卫星及其行星之间的潮汐力时,就可得到下列平衡条件(Jeans, 1917, 1919; Chandrasekhar, 1969):当 $M = 0.12554\,\pi\rho R^3$,

$$\frac{M}{\pi\rho R^3}\lesssim 0.12554$$

及
$$e=0.88303,$$

式中 e 是琼斯球体的偏心率。

我们银河系中大部分恒星(～50%)是双星，而且相当部分的双星约在与它们的半径之和同量级的距离上互相绕转。当质量较大的恒星耗尽它的氢核时,它将膨胀,但这种膨胀要受到洛希判据((3-246)式)的制约。这样的一种制约可能是与密近双星系统更易于爆发的趋势有关(参看 Hack, 1963; Paczński, 1971)。如果质量为 M_1 的一颗恒星绕另一颗质量为 M_2 的恒星作圆轨道运动,并且如果恒星之一的半径 R 变成大于下式所给出的临界半径 $R_{临界}$ (Paczński, 1971)的话,则物质将从这颗恒星向外流出:

$$R_{临界}=\left[0.38+0.2\log\left(\frac{M_1}{M_2}\right)\right]A \quad \left(当\ 0.3<\frac{M_1}{M_2}<20\right);$$
$$R_{临界}=0.46224\ A\left(\frac{M_1}{M_1+M_2}\right)^{1/3} \quad \left(当\ 0<\frac{M_1}{M_2}<0.8\right)。 \tag{3-247}$$

这里 A 是两颗恒星中心之间的间距,它与轨道周期 P 的关系由开普勒定律给出:

$$\left(\frac{2\pi}{P}\right)^2 A^3=G(M_1+M_2),$$

式中 P 是轨道周期及引力常数 $G={}^*6.6720\times10^{-8}$ 达因·厘米^2·克$^{-2}$。一颗恒星一旦膨胀到大于临界半径 $R_{临界}$,质量外流速率 dM/dt 由下式给出:

$$\frac{dM}{dt}\approx\left(\frac{R-R_{临界}}{R}\right)^{n+1.5},$$

式中 R 是恒星半径,n 是多方指数。

3.5. 气体的宏观结构——流体动力学

3.5.1. 质量守恒的连续性方程

在许多情况下,气体可以当作连续流体。这样,对体积为 V 的流体元来说,气体质量守恒的连续性方程可表示为:

$$\frac{1}{\rho V}\frac{D}{Dt}(\rho V)=\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt}+\frac{1}{V}\frac{DV}{Dt}=0。 \tag{3-248}$$

式中 ρ 是质量密度,D/Dt 表示对流体元求微分。对于标量 φ 及矢量 $\boldsymbol{F}$ 来说,

$$\frac{D\varphi}{Dt}=\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\varphi \tag{3-249}$$

及
$$\frac{D\boldsymbol{F}}{Dt}=\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{F},$$

式中 $\boldsymbol{v}$ 是运动流体的速度。把(3-249)式应用于(3-248)式,我们得到连续性方程:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\rho+\rho\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0。 \tag{3-250}$$

对于不可压缩流体,(3-250)式成为 $\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0$。

3.5.2. 欧拉方程(纳维尔-斯托克斯及伯努利方程)

流体元的运动方程是根据动量守恒定律得出的。取动量的时间导数,我们得到欧拉(Euler, 1755)力方程:

$$\rho\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}=\rho\left[\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}\right]=\boldsymbol{F}-\nabla P, \tag{3-251}$$

式中 ρ 是质量密度，$\boldsymbol{v}$ 是速度，$\boldsymbol{F}$ 是作用在单位体积上的外力(除了气体压力以外的其他力)，P 是压力。引力对外力的贡献为:

$$\boldsymbol{F}=-\rho\nabla\boldsymbol{\varphi}, \tag{3-252}$$

同时，根据泊松方程(Poisson, 1813)，引力势 φ 由下式给出:

$$\nabla^2\varphi=4\pi G\rho, \tag{3-253}$$

而引力常数 $G={}^*6.6720\times10^{-8}$ 达因·厘米²·克⁻²。质量密度 $\rho=$常数的不可压缩流体的粘滞力为:

$$\boldsymbol{F}=\mu\nabla^2\boldsymbol{v}, \tag{3-254}$$

式中动力粘滞系数 μ 由(3-23)式、(3-25)式或(3-26)式给出。当(3-251)式只有粘滞力项时，所得方程称为纳维尔-斯托克斯方程(Navier, 1822; Stokes, 1845)。

由强度分别为 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的电场和磁场所产生的力是:

$$\boldsymbol{F}=\frac{1}{c}\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}, \tag{3-255}$$

式中电流 $\boldsymbol{J}$ 由下式给出:

$$\boldsymbol{J}=\sigma\left[\boldsymbol{E}+\frac{\boldsymbol{v}}{c}\times\boldsymbol{B}\right], \tag{3-256}$$

电导率 σ 由(3-35)或(3-36)式给出。对于高导电介质，电磁力项为:

$$\boldsymbol{F}=\frac{-1}{4\pi}\boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{B}), \tag{3-257}$$

式中 $\boldsymbol{B}$ 及 $\boldsymbol{v}$ 由扩散方程联系起来:

$$\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=\nabla\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})+\frac{c^2}{4\pi\sigma}\nabla^2\boldsymbol{B}\approx\nabla\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})。 \tag{3-258}$$

对于稳恒流动的气体来说，$\partial\boldsymbol{v}/\partial t=0$，因此在没有外力时，欧拉方程(3-251)式成为:

$$\rho\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v}=-\nabla P, \tag{3-259}$$

这是可压缩流体的伯努利方程(Bernoulli, 1738)。这里 ρ 是质量密度，$\boldsymbol{v}$ 是速度，P 是压力。积分形式的可压缩稳流的伯努利方程为:

$$\frac{v^2}{2}+\int\frac{dP}{\rho}=\text{常数。} \tag{3-260}$$

不可压缩稳流的积分方程为:

$$\frac{1}{2}\rho v^2+P=\text{常数。} \tag{3-261}$$

3.5.3. 能量方程

根据能量守恒定律，在任何体积内，每单位时间气体总能量的变化必须等于通过包围该体积的边界面的总能流。当热传导效应及粘滞效应不重要时，并且不存在象引力这样的彻体力时，这种关系可以表达为:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\left[\frac{1}{2}\rho v^2+\rho u\right]dV=-\oint\rho\boldsymbol{v}\left(\frac{1}{2}v^2+h\right)\cdot\boldsymbol{n}\,dS, \tag{3-262}$$

式中 t 是时间常数，ρ 是质量密度，v 是速度，u 是每单位质量的内能，$h=u+P/\rho$ 是每单位质量的焓，$\oint$ 表示对闭合曲面积分，$\boldsymbol{n}$ 是垂直于表面的单位矢量，dS 是面积元，dV 是体积元。

能量方程(3-262)写成矢量形式即为：

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\rho v^2+\rho u\right]=-\nabla\cdot\left[\rho \boldsymbol{v}\left(\frac{1}{2}v^2+h\right)\right], \tag{3-263}$$

量$\rho v[(v^2/2)+h]$称为能通量密度。

当热传导效应及粘滞效应显著时，能量平衡方程可以写成：

$$\rho\frac{\partial}{\partial t}(c_V T)+\rho v_j\frac{\partial}{\partial x_j}(c_V T)=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\varkappa\frac{\partial T}{\partial x_j}\right)-\rho P\frac{\partial v_j}{\partial x_j}+\varphi, \tag{3-264}$$

式中 c_V 是定容比热，$\varkappa$ 是热传导系数，由于粘滞而引起的能量消耗率由下式给出：

$$\varphi=\frac{\mu}{2}\left[\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)^2-\frac{4}{3}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_j}\right)^2\right],$$

式中 μ 是动力粘滞系数，对于不可压缩流体，$\partial v_i/\partial x_i=0$。在后面要讨论到的保辛涅斯克(Boussinesq)近似下，(3-264)式成为(3-57)式：

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla T=\frac{\varkappa}{\rho c_V}\nabla^2 T。$$

(3-263)式是能量平衡方程，它表明每单位体积的能量变化率等于单位时间内从该体积内所流出的总能量。若传导、粘滞及动能项是可以忽略的话，并且若所有粒子都处于同一个运动温度 T，则在定压情况下(3-263)式成为(Field, 1965)：

$$\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{3}{2}NkT\right)-\frac{5}{2}\rho kT\frac{dN}{dt}=\rho(\Gamma-\Lambda), \tag{3-265}$$

式中 N 是自由粒子的数密度，(3-265)式的左边是热能增加率加上气体所作的功，$\rho(\Gamma-\Lambda)$ 是在每秒内输入给每克流体的能量，Γ 及 Λ 分别表示每单位体积的能量增益率及损耗率。当 $\Gamma=\Lambda$ 时，气体处于热平衡状态，此时的温度为平衡温度 T_E。当 T 与 T_E 不同时，则可由下列关系式确定有效冷却时间 t_T：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{3}{2}NkT\right)=-\frac{3Nk(T-T_E)}{2t_T}。 \tag{3-266}$$

令由氢、氦或碳的光致电离所得到的热等于电子所引起的离子激发及中性原子所引起的离子和氢分子激发的冷却效应，就可以确定电离氢(HII)区的平衡温度($T_E\approx 10^4$ 开)及中性氢(HI)区的平衡温度($T_E\approx 10^2$ 开)(参看 Spitzer, 1948, 1949, 1954; Spitzer 和 Savedoff, 1950; Seaton, 1951, 1954, 1955; Axford, 1961, 1964; Osterbrock, 1965)。施皮策(Spitzer, 1962)给出了在这些情况中确定 T_E 的详尽公式。例如，中性氢原子 H 与电子 e 之间能量交换的平衡方程为(Spitzer 和 Savedoff, 1950)：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{3}{2}N_{\mathrm{H}}kT_{\mathrm{H}}\right)=-\gamma N_e N_{\mathrm{H}}\ \text{尔格}\cdot\text{厘米}^{-3}\cdot\text{秒}^{-1}, \tag{3-267}$$

式中

$$\gamma=8Q\frac{m_e}{m_{\mathrm{H}}}\left(\frac{2kT_e}{\pi m_e}\right)^{1/2}k(T_{\mathrm{H}}-T_e)$$
$$\approx 1.16\times 10^{-27}T_e^{1/2}(T_{\mathrm{H}}-T_e)\ \text{厘米}^3\cdot\text{尔格}\cdot\text{秒}^{-1},$$

而弹性碰撞截面 $Q\approx 6.3\times 10^{-15}$ 厘米^2(Seaton, 1955)。由(3-266)式及(3-267)式得出冷却时间为：

$$t_{TH}\approx 1.8\times 10^{11}N_e^{-1}T_e^{-1/2}\ \text{秒}, \tag{3-268}$$

或者利用 $N_e\approx 2\times 10^{-4}N_{\mathrm{H}}$，

$$t_{TH}\approx 2.8\times 10^{7}N_{\mathrm{H}}^{-1}T_e^{-1/2}\ \text{年}。 \tag{3-269}$$

对于星际介质，还必须考虑宇宙线加热(Pikelner, 1968; Spitzer 和 Scott, 1969; Field,

Goldsmith 和 Habing, 1969; Hjellming, Gordon 和 Gordon, 1969)。令宇宙线加热等于非弹性热碰撞所引起的冷却而得出的平衡温度,如图 21 所示,是随核子数密度而变化的。这些结果是以假定每个中性氢原子的初始电离率是 4×10^{-16} 秒$^{-1}$ 而作了归一化的。

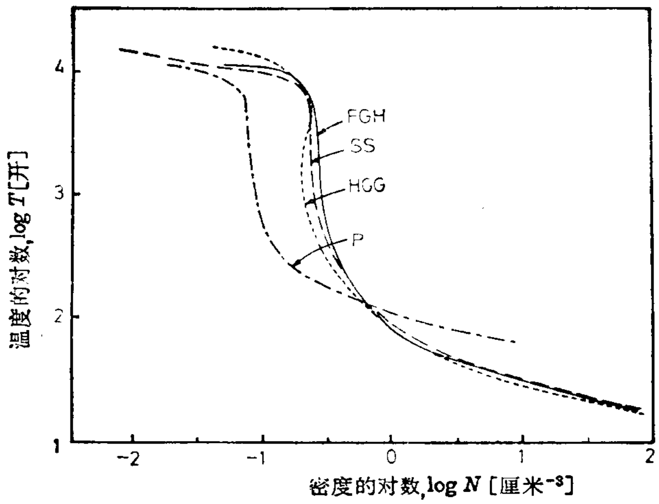


图 21 星际介质的平衡温度随原子核总的数密度 N 的变化[取自 Pikelńer, 1968(P); Field、Goldsmith 和 Habing, 1969(FGH); Spitzer 和 Scott, 1969 (SS); 以及 Hjellming, Gordon 和 Gordon, 1969(HGG)]。该图表明了在压力平衡下共存的两种热稳定气相: 一相的温度 $T=10^4$ 开, 另一相是 $T<300$ 开。这里已假定在宇宙线加热和非弹性热碰撞所引起的冷却之间是平衡的。同样也假定了 2 兆电子伏质子的宇宙线能量密度 $W=6\times10^{-14}$ 尔格·厘米$^{-3}$, 而电离率为 4×10^{-16} 秒$^{-1}$。观测到的电离率是 1.5×10^{-15} 秒$^{-1}$。当 $T\approx10^4$ 开时, 电子密度 $N_e\approx0.016$ 厘米$^{-3}$, 而星际介质的平均电子密度 $N_e\approx0.026$ 厘米$^{-3}$

若(3-266)式所确定的冷却时间是负值,则气体不是热稳定的。在这种情况,T 大于 T_E,动能就会增加一直要到冷却时间发生改变为止。菲尔德(Field, 1965)利用(3-265)式证明,若

$$T\frac{\partial}{\partial T}(\Gamma-\Lambda)-\rho\frac{\partial}{\partial\rho}(\Gamma-\Lambda)<0$$

或

$$\left[\frac{\partial}{\partial T}(\Gamma-\Lambda)\right]\left[1+\frac{\rho}{T_E}\frac{dT_E}{d\rho}\right]<0,$$

则气体将保持热稳定的。

3.5.4. 大气——流体静力学平衡、气压方程、标高、逃逸速度、恒星风及日冕

在没有质量流动的情况下,欧拉方程(3-251)可化成:

$$\boldsymbol{F}-\nabla P=0, \tag{3-270}$$

式中 $\boldsymbol{F}$ 是外力,P 是压力。当向外的气体压力正好与向内的引力平衡时,(3-270)式成为:

$$\frac{dP}{dr}=-\rho\frac{GM(r)}{r^2}, \tag{3-271}$$

这就是球状气团的流体静力学平衡方程。这里 r 是离球心的距离, P 是压力,ρ 是质量密度,引力常数 $G=$*6.6720×10^{-8} 达因·厘米^2·克$^{-2}$, 在半径为 r 的球内的质量 $M(r)$ 由下式给出:

$$M(r)=\int_0^r 4\pi r^2\rho\,dr。\tag{3-272}$$

对于理想气体，

$$P=\frac{k\rho T}{\mu m_H},\tag{3-273}$$

式中 T 是温度，μ 是平均分子量，玻耳兹曼常数 $k=$*1.380662(44)×10^{-16} 尔格·开$^{-1}$，氢原子的质量 $m_H=$*1.6735595(86)×10^{-24} 克。对于半径为 R、质量为 M 的球体周围的理想气体的大气，(3-271)式及(3-273)式给出气压方程：

$$P(r)=P(R)\exp\left[-\int_R^r\frac{dr}{H}\right]\tag{3-274}$$

$$=P(R)\exp\left[-\frac{(r-R)}{H}\right],\tag{3-275}$$

式中 $P(R)$ 是在质量为 M 的球体表面上的压力，标高 H 由下式给出：

$$H=\frac{kT}{\mu m_H g}\approx\frac{kTR^2}{\mu m_H GM},\tag{3-276}$$

而 g 是所在处的引力加速度：

$$g=\frac{GM(r)}{r^2}\approx\frac{GM}{R^2}。\tag{3-277}$$

一个质量为 m 的粒子要从一个较大的质量 M 中逃逸出去的话，该粒子必须具有比引力势能 mMG/R 大的动能 $mv^2/2$。这就意味着粒子的速度 v 必须大于逃逸速度 $v_{逃}$：

$$v_{逃}=\left(\frac{2MG}{R}\right)^{1/2}。\tag{3-278}$$

例如，对太阳来说，逃逸速度是 *617.5 公里·秒$^{-1}$。

日食时，对太阳光学连续辐射的观测表明日冕光延伸到未掩食太阳目视范围以外几个太阳半径处。这种光的一部分（K 日冕），可以认为是由于太阳光子受到日冕中自由电子的汤姆孙散射所产生。从日冕光强度的测量可得到日冕电子密度 $N_e(r)$ 的测定，$N_e(r)$ 是日冕离太阳的距离 r 的函数。鲍姆巴赫(Baumbach, 1937)及艾伦(Allen, 1947)的观测给出太阳附近($r\approx R_\odot$)的日冕模型，

$$N_e(r)\approx1.55\times10^8\left(\frac{r}{R_\odot}\right)^{-6}\left[1+1.93\left(\frac{r}{R_\odot}\right)^{-10}\right]厘米^{-3},\tag{3-279}$$

式中太阳半径 $R_\odot=$*6.9599×10^{10} 厘米。利用射电源闪烁所作的更新近的测量得出(Erickson, 1964)，当 $r\gg R_\odot$，

$$N_e(r)\approx7.2\times10^5\left(\frac{r}{R_\odot}\right)^{-2}厘米^{-3}。\tag{3-280}$$

图 22 给出了 N_e 随离太阳的距离 r 变化的实测曲线。

设日冕是等温的，并且是处于流体静力学平衡状态，则气压方程(3-274)给出：

$$N_e(r)=N_e(r_0)\exp\left[\frac{GM_\odot\mu m_H}{R_\odot kT}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right)\right],\tag{3-281}$$

而热传导及流体静力学平衡方程给出：

$$N_e(r)=N_e(r_0)\left(\frac{r}{r_0}\right)^{2/7}\exp\left\{-\frac{7r_0}{5H}\left[1-\left(\frac{r}{r_0}\right)^{-5/7}\right]\right\}。$$

这里 $N_e(r_0)$ 是在某一参考距离 r_0 处的电子密度。由(3-281)式以及由测量到的太阳附近

的 $N_e(r)$ 就可得出日冕温度 $T\approx1.5\times10^6$ 开(de Jager, 1959)。这个温度与根据对太阳所作的射电观测得出的温度(Bracewell 和 Preston, 1956), 以及与根据日食时所观测到的光学谱线的强度和宽度得出的温度(Edlén, 1942; Burgess, 1964)都是一致的。日冕的基本能源据信是光球的声波、引力波或流体力学波的消耗(参看第3.5.6节及第3.5.11节)。

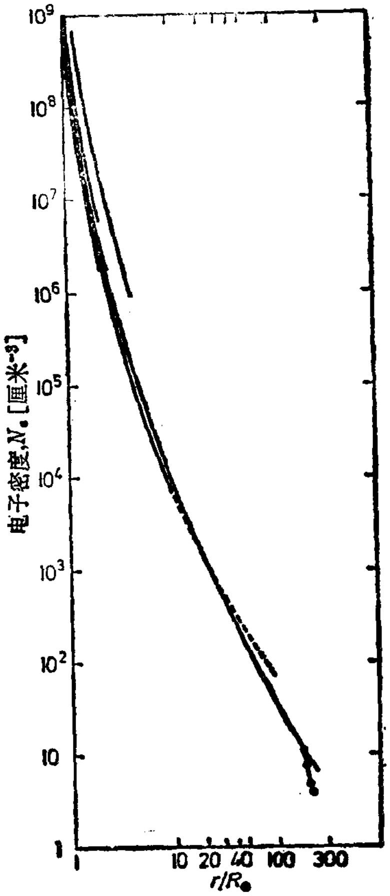


图 22 日冕赤道电子密度观测值随离太阳距离 r 的变化(取自 Newkirk, 1967 的文章)。对黑子周内不同时期取得的数据未作校正。长实线相应于汪、刘和张(Whang, Liu 和 Chang, 1966)的理论模型。太阳半径 $R_\odot\approx6.96\times10^{10}$ 厘米

查普曼(Chapman, 1957, 1959)首先证明: 在太阳外层大气中由于热传导产生的能量输运超过了辐射能量损失,结果是所观测到的太阳附近的 10^6 开温度,必然会缓慢减弱而延伸到地球轨道以外。稳定热流方程为:

$$\nabla\cdot(\kappa\nabla T)=0, \qquad (3\text{–}282)$$

式中完全电离气体的热传导系数为((3–55)式):

$$\kappa\approx6\times10^{-6}T^{5/2}\ \text{尔格·厘米}^{-1}\text{·秒}^{-1}\text{·开}^{-1}。 \qquad (3\text{–}283)$$

由(3–282)式及(3–283)式可知,在离太阳距离为 r 处,静止的太阳大气中的温度 $T(r)$ 为:

$$T(r)=\left(\frac{R_\odot}{r}\right)^{2/7}T(R_\odot), \qquad (3\text{–}284)$$

式中 $T(R_\odot)\approx10^6$ 开,太阳半径 $R_\odot=$*6.9599×10^{10} 厘米。热能损耗率 Q 由下式给出((3–53)式):

$$Q=-4\pi r^2\kappa\nabla T=-\frac{8\pi}{7}R_\odot\kappa(T_\odot)T(R_\odot)。 \qquad (3\text{–}285)$$

由(3–284)式可知,在地球处的温度是 $T(r\approx215R_\odot)\approx4\times10^5$ 开,根据(3–285)式热能损耗率 $Q\approx2\times10^{27}$ 尔格·秒$^{-1}$。地球附近的太阳风质子及电子的测量表明质子温度是 4×10^4 开,而电子温度是 10^5 开(Lüst, 1970)。

伯克兰等(Birkeland, 1908; 和 Chapman, 1918, 1919)首先提出粒子能够从太阳中逃逸出来,并且到达地球而引起磁暴及极光。后来比尔曼(Biermann, 1951, 1957)注意到彗尾方向之所以总是背离太阳是由于存在着超过太阳辐射压力的作用引起的,而这必定是由于速度为几百公里·秒$^{-1}$的连续的径向微粒流所致。如果(3–285)式所给出的所有热通量 Q 都进入到膨胀着的球形日冕内的话,则

$$Q\approx4\pi r^2M\frac{v}{2}N(r)(v^2+v_{逃}^2), \qquad (3\text{–}286)$$

式中 $N(r)$ 是离太阳距离为 r 处的日冕粒子密度, M 是粒子质量, v 是恒定的太阳风速度,对太阳来说,逃逸速度是 $v_{逃}=$*617.5 公里·秒$^{-1}$。假定 $v\ll v_{逃}$,利用 $Q=2.5\times10^{27}$ 尔格·秒$^{-1}$,我们得到在 $r=1.5\times10^{13}$ 厘米的地球轨道处,质子通量密度为 $N(r)v\approx2.4\times10^8$ 厘米$^{-2}$·秒$^{-1}$。观测到的地球附近的质子密度是 5 厘米$^{-3}$,相应于 $v\approx500$ 公里·秒$^{-1}$,接近由人造卫星所测得的 320 公里·秒$^{-1}$ 的速度(Lüst, 1970)。帕克(Parker, 1958)首先提出太阳微粒辐射的动力学起源必定会在描述膨胀着的太阳大气的流体动力学方程中找到。对于稳恒流动,欧拉方程(3–251)能够写成:

$$\rho \boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v}=-\nabla P-\rho g=-\nabla P-\frac{\rho M_{\odot}G}{r^2},\tag{3-287}$$

式中 ρ 是质量密度，$\boldsymbol{v}$ 是速度，P 是压力，g 是由于引力产生的加速度，$M_{\odot}=*1.9891\times10^{33}$ 克，引力常数 $G=*6.672\times10^{-8}$ 达因·厘米^2·克$^{-2}$，r 是离太阳中心的径向距离。当一种可压缩气体在一根横截面 A 可变的管中向下流动时，

$$A\rho v=\text{常数},\tag{3-288}$$

并且若太阳大气球对称膨胀，则 $A\propto r^2$。所以利用(3-287)式及(3-288)式，我们得到：

$$\left[\frac{v^2}{s^2}-1\right]\frac{dv}{v}=\left[2-\frac{M_{\odot}G}{s^2r}\right]\frac{dr}{r},\tag{3-289}$$

式中声速

$$s=\left(\frac{dP}{d\rho}\right)^{1/2}\approx\left(\frac{\gamma P}{\rho}\right)^{1/2}=\left(\frac{\gamma kT}{\mu m_{\text{H}}}\right)\approx\left(8.5\times10^7\,\frac{\gamma T}{\mu}\right)^{1/2}$$
$$\approx1.7\times10^7\ \text{厘米·秒}^{-1}。\tag{3-290}$$

这里 γ 是绝热常数，T 是温度，μ 是平均分子量，m_{H} 是氢原子的质量。因此，我们看到：当 r 值比临界值

$$r_c=\frac{M_{\odot}G}{2s^2}\approx3.5R_{\odot}\tag{3-291}$$

大时，太阳风以超声速 $v>s$ 膨胀，式中太阳半径 $R_{\odot}=*6.9599\times10^{10}$ 厘米。声速可与日冕中的质子热速度

$$v_{\text{热}}=\left(\frac{3kT}{m_{\text{H}}}\right)^{1/2}\approx1.6\times10^7\ \text{厘米·秒}^{-1}\tag{3-292}$$

相比拟，式中 m_{H} 是质子质量，日冕温度是 10^6 开。这些速度值也可以与太阳逃逸速度

$$v_{\text{逃}}=*6.175\times10^7\ \text{厘米·秒}^{-1}\tag{3-293}$$

相比。地球附近的太阳风速度实测表明 $v=(3\sim5)\times10^7$ 厘米·秒$^{-1}$。

如上所述，帕克(Parker, 1958)证明当任何日冕温度的降低速率不比 r^{-1} 快时，在离母天体表面的各种较大的径向距离内，唯一的稳定平衡态就是一个以各种超声速膨胀的平衡态。帕克(Parker, 1965)给出了恒星风的速度、密度及温度的详尽综述。帕克的模型已成功地用于说明宇宙线调制问题，福布希(Forbush, 1966)给出了对此课题的评述。

人造卫星的测量(Ness, Scearce 和 Seek, 1964)表明，地球附近太阳风的磁场强度为 $B\approx5\times10^{-5}$ 高斯。若磁力线在膨胀着的太阳风中冻结，则我们可期望 $B\propto(R_{\odot}/r)^2$ 而得出在太阳表面磁场强度为几高斯。这样的磁场已经观测到了(Babcock 和 Babcock, 1955)。由地球轨道处 5×10^{-5} 高斯的磁场可得出粒子密度为每立方厘米 5 个质子时的阿尔文速度 $V_A\approx30$ 公里·秒$^{-1}$。磁场对太阳风有转矩的作用，使它在地球轨道处的地平经度方向的速度约为 1 公里·秒$^{-1}$，并在约 10^{10} 年内使太阳完全停止自转(Weber 和 Davis, 1967)。

3.5.5. 对流——史瓦西条件、普朗特混合长度理论、瑞利及努珊数、保辛涅斯克方程

当没有质量对流运动以及当气体的温度不是常量时，气体将保持稳定，并处于力学平衡中。当存在对流运动时，所出现的流动就使气体趋于混和，并使气体的温度趋于均匀。当气体处于力学平衡时，欧拉方程(3-251)式成为：

$$\nabla P=-g\rho,\tag{3-294}$$

式中 P 是压力，g 是重力加速度，ρ 是质量密度。下面是开尔文(Kelvin, 1862)首先提出的

思想。让我们假定一个小的微扰并不会改变表面的恒压 P，对于理想气体，

$$P=\frac{k\rho T}{\mu m_{\mathrm{H}}}, \tag{3-295}$$

式中 T 是温度，k 是玻耳兹曼常数，μ 是平均分子量，m_{H} 是氢原子的质量。当在力学平衡的理想气体中发生绝热微扰时，我们得到温度梯度

$$\left(\frac{dT}{dr}\right)_{\text{绝热}}=\frac{T}{P}\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\frac{dP}{dr}=-\frac{g}{C_p}, \tag{3-296}$$

这里已假定气体是半径为 r 的一个球。其中 γ 是绝热系数以及 C_p 是定压比热。正如史瓦西(Schwarzschild, 1906)所首先指出的，在没有阻尼的情况下，若

$$\left(\frac{dT}{dr}\right)_{\text{结构}}>\left(\frac{dT}{dr}\right)_{\text{绝热}},$$

则就会发生对流，式中 $(dT/dr)_{\text{结构}}$ 是气体中实际结构的温度梯度。在任何种类的气体中，发生对流的更普遍的条件是：

$$\left(\frac{dT}{dr}\right)_{\text{结构}}>-\frac{gT}{C_pV}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P, \tag{3-297}$$

式中 V 是体积，$(\partial V/\partial T)_P$ 表示定压下的微分。

桑普森(Sampson, 1894)及史瓦西(Schwarzschild, 1906)首先提出热的辐射转移在恒星中是能量转移的主要形式。对于处于辐射平衡状态的恒星，温度梯度方程为(Eddington, 1917)：

$$\left(\frac{dT}{dr}\right)_{\text{结构}}=\frac{-3\varkappa\rho L(r)}{4acT^3 4\pi r^2}, \tag{3-298}$$

式中 $\varkappa$ 是罗斯兰德平均不透明度，辐射常数 $a=$*7.565660×10⁻¹⁵ 尔格·厘米⁻³·开⁻⁴，$L(r)$ 是在半径 r 处的光度。净辐射能通量 $F_{\text{辐射}}$ 由下式给出：

$$F_{\text{辐射}}=\frac{16\sigma T^3}{3\varkappa}\frac{dT}{dr}, \tag{3-299}$$

式中 $\sigma=$*5.67032×10⁻⁵ 尔格·厘米⁻²·开⁻⁴·秒⁻¹ 是斯忒藩–玻耳兹曼常数。

当发生对流时，直到

$$\left(\frac{dT}{dr}\right)_{\text{结构}}=\left(\frac{dT}{dr}\right)_{\text{绝热}}=\frac{T}{P}\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\frac{dP}{dr}=-\frac{g}{C_p} \tag{3-300}$$

为止，趋势是使结构温度梯度减少。确定气体对流运动的方程是连续性方程(3-250)式、纳维尔–斯托克斯方程(3-254)式至(3-251)式，同时对于不可压缩流体来说，还有热转移方程(3-57)：

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla T=\frac{\varkappa}{\rho C_p}\nabla^2 T。 \tag{3-301}$$

解该方程涉及到特征长度 l、速度 v 及对流气泡与其环境的温差 ΔT。当行进距离 l 以后，对流气泡与其环境气体并合，这个长度 l 称为“混合长度”。处于流体静力学平衡的理想气体，它的 l 的典型值是下式给出的标高 H：

$$l\approx H=\frac{kT}{\mu m_{\mathrm{H}}g}, \tag{3-302}$$

式中 T 是温度，μ 是平均分子量，m_{H} 是氢原子的质量，g 是重力加速度。温度差 ΔT 由下式给出：

$$\Delta T=l\left(\left|\frac{dT}{dr}\right|_{结构}-\left|\frac{dT}{dr}\right|_{绝热}\right)。\tag{3-303}$$

假定压力保持不变，由理想气体的状态方程及(3-303)式得出：

$$\Delta\rho=\frac{\rho\Delta T}{T}=l\left(\left|\frac{d\rho}{dr}\right|_{结构}-\left|\frac{d\rho}{dr}\right|_{绝热}\right),\tag{3-304}$$

式中 $\Delta\rho$ 是质量密度的变化，$d\rho/dr$ 表示 ρ 的径向梯度。对于体积为 V 的气泡，浮力将是：

$$F_b=Vg\Delta\rho=V\rho g\,\frac{\Delta T}{T}=\frac{V\rho gl}{T}\left(\left|\frac{dT}{dr}\right|_{结构}-\left|\frac{dT}{dr}\right|_{绝热}\right)。\tag{3-305}$$

假定这个力所作的功全部转变成气泡的动能，则气泡速度 v 由下式给出：

$$\begin{aligned}v&=\frac{1}{2}\left(\frac{g}{T}\right)^{1/2}\left(\left|\frac{dT}{dr}\right|_{结构}-\left|\frac{dT}{dr}\right|_{绝热}\right)^{1/2}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{g}{\rho}\right)^{1/2}\left(\left|\frac{d\rho}{dr}\right|_{结构}-\left|\frac{d\rho}{dr}\right|_{绝热}\right)^{1/2}。\end{aligned}\tag{3-306}$$

于是，由此得出对流的能量通量 $F_{对流}$ 是：

$$\begin{aligned}F_{对流}&=C_p\rho v\,\frac{l}{2}\left(\left|\frac{dT}{dr}\right|_{结构}-\left|\frac{dT}{dr}\right|_{绝热}\right)\\&=\frac{C_p\rho l^2}{4}\left(\frac{g}{T}\right)^{1/2}\left(\left|\frac{dT}{dr}\right|_{结构}-\left|\frac{dT}{dr}\right|_{绝热}\right)^{3/2}。\end{aligned}\tag{3-307}$$

(3-302)至(3-307)式是根据普朗特(Prandtl, 1952)首先建立的混合长度理论得出的。利用下列关系式：

$$\frac{dT}{dr}=\frac{T}{H}\,\frac{d\ln T}{d\ln P}=\frac{T}{H}\,\nabla,\tag{3-308}$$

就可以把上述方程(3-299)式、(3-306)式及(3-307)式化成一种方便的形式(Böhm-Vitense, 1953, 1958; Henyey, Vardya 和 Bodenheimer, 1965)：

$$\begin{aligned}F_{辐射}&=\frac{16\sigma T^4}{3\varkappa Hf}\,\nabla,\\v&=\left[\frac{gl^2}{4H}(\nabla-\nabla')\right]^{1/2},\\F_{对流}&=\frac{1}{2}\,C_p\rho v\,\frac{l}{H}\,T(\nabla-\nabla')\end{aligned}\tag{3-309}$$

及

$$F=\frac{16\sigma T^4}{3\varkappa H}\cdot\nabla_{辐射}=\sigma T_e^4=F_{对流}+F_{辐射},$$

式中 ∇' 是各个湍流元的对数梯度；$\nabla_{辐射}$是相应于总通量 F 为辐射所带走的情况下的梯度；f 是一个扩散修正因子，其值近于 1；C_p 是每单位质量的定压比热，而 T_e 是有效温度。

当考虑一个气体层时，在瑞利数 R 大于某个临界值时就会发生对流不稳定性。对于处在相反的温度梯度 $\Delta T/d$ 下的厚度为 d 的气体层来说，我们得出(Rayleigh, 1916)：

$$R=\frac{g\alpha}{\chi\nu}\,\frac{\Delta T}{d}\,d^4,\tag{3-310}$$

式中 g 是重力加速度，χ 和 ν 分别是导热系数和运动粘滞系数，而体膨胀系数 α 由状态方程

$$\rho=\rho_0[1-\alpha(T-T_0)]\tag{3-311}$$

给出，式中 T_0 是当质量密度 $\rho=\rho_0$ 时的温度。对大多数气体及流体来说，$\alpha\approx10^{-3}$ 至 10^{-4}，除非有外力作用，我们可以把运动方程中所有项中的 ρ 作为常数处理。在这种“保辛涅斯克”近似中，欧拉方程及热传导方程化成(Boussinesq, 1903)：

$$\frac{\partial}{\partial r}(\langle P\rangle+\rho\langle v^2\rangle)=-g\rho$$

及

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle T\rangle+\frac{\partial}{\partial r}(\langle v\Delta T\rangle)=\chi\frac{\partial^2\langle T\rangle}{\partial r^2}, \tag{3-312}$$

式中 ΔT 是与其平均值 $\langle T\rangle$ 的温差，$\langle\ \rangle$ 表示水平方向平均。在上述方程中用 l^{-1} 代替涨落量的空间导数，并且略去压力及时间导数项则就能得出混合长度方程(3-302)～(3-307)式。两个特征数，即佩克莱特(Peclet)数 P_e 及雷诺(Reynolds)数 R_e，则由

$$P_e=\frac{vl}{\chi}\approx(P_rR)^{1/2},$$

$$R_e=\frac{vl}{\nu}=\left(\frac{R}{P_r}\right)^{1/2} \tag{3-313}$$

给出，式中 R 及 P_r 分别表示瑞利(Rayleigh)数及普朗特(Prandtl)数。这些数量度湍动与由热传导和粘滞性所引起的阻尼效应之比。努珊(Nusselt)数是表示对流及传导热通量的总和 Q 的一种方便的方式：

$$N=\frac{Qd}{\varkappa\Delta T}。 \tag{3-314}$$

当没有对流只有传导时，努珊数变成 1。根据混合长度理论，我们得出(Spiegel, 1971)：

$$N=\left[\frac{\sqrt{1+4P_r}-1}{2P_r}\right]^{2/3}\left(\frac{P_rR}{R_c}\right)^{1/3},$$

式中普朗特数 $P_r=\nu/\chi$，并且由(3-58)式给出；R_c 是下面要给出的临界瑞利数。

张德拉塞卡(Chandrasekhar, 1961)已写了一本极好的教科书，该书对由下底加热的层的对流不稳定性作了全面的讨论。正如瑞利(Rayleigh, 1916)首先提出的，当

$$R>R_c, \tag{3-315}$$

厚度为 d 的层是不稳定的，其中：

表　　面	R_c	a	$2\pi/a$
两边自由	657.511	2.2214	2.828
两边刚体	1707.762	3.117	2.016
一边刚体及一边自由	1100.65	2.682	2.342

这里波长为 λ 的微扰具有的波数

$$a=\frac{2\pi d}{\lambda}。$$

例如，对于两边都是自由边界面的情况，

$$R=\frac{(\pi^2+a^2)^3}{a^2}, \tag{3-316}$$

对应于不稳定性开始的临界瑞利数是由条件 $\partial R/(\partial a^2)=0$ 确定的，由此得出 $a=2.214$ 及 $R=R_c=657.511$。杰弗里斯(Jeffreys, 1926; 以及 Jeffreys, 1930)也分别讨论了不可压缩流体及可压缩流体两者的稳定性判据。

若引入转动，对流就会被抑制；相对于所有温度梯度反向时所出现的对流来说，无粘滞的、理想流体变得稳定了。这是泰勒-普劳德曼(Taylor-Proudman)定理(Taylor, 1921, Proudman, 1916)的结论，该定理表明：因为转动无粘滞流体不可能沿转动方向发生变化，故无粘滞流体中的一切稳定的缓慢运动必定都是两维的。对于粘滞性自转流体，对流是可能的，并且以泰勒数

$$T=\frac{4\omega^2d^4}{\nu^2}\tag{3-317}$$

来表征，式中 ω 是角速度，ν 是运动粘滞系数，d 是层的厚度。对于两边为自由边界的情况，我们得出(Chandrasekhar, 1953; Chandrasekhar 和 Elbert, 1955)：

$$R=\frac{1}{a^2}[(\pi^2+a^2)^3+\pi^2T],\tag{3-318}$$

因而当 T 值很大时，

$$R_c=8.6956\,T^{2/3},$$

其中

$$a=1.3048\,T^{1/6}。$$

磁场同样抑制热对流；强度为 H 的磁场的影响大小是用参量(Thompson, 1951; Chandrasekhar, 1952, 1961)

$$Q=\frac{\mu^2H^2\sigma}{\rho\nu}d^2\tag{3-319}$$

来表征，式中 μ 是磁导率，ρ 是质量密度，ν 是运动粘滞系数，σ 是电导率，d 是层的厚度。对于两边是自由边界的情况，我们得出：

$$R=\frac{\pi^2+a^2}{a^2}[(\pi^2+a^2)^2+\pi^2Q],\tag{3-320}$$

因而当 Q 值很大时，

$$R_c=\pi^2Q,$$

其中

$$a=[\pi^4Q/2]^{1/6}。$$

3.5.6. 声波——速度、能量密度及太阳能通量

假定气体处于稳定、均匀平衡的条件是速度 v_0 为零，密度 ρ_0 及压力 P_0 为常数；再假定微扰使得密度为 $\rho=\rho_0+\rho_1$ 及速度为 $v=v_1$。忽略包括重力在内的所有外力，连续方程(3-250)式及欧拉方程(3-251)式化成：

$$\frac{\partial\rho_1}{\partial t}+\rho_0\nabla\cdot v_1=0\tag{3-321}$$

及

$$\frac{\partial v_1}{\partial t}=-\frac{1}{\rho_0}\nabla P_1。\tag{3-322}$$

对于理想气体，我们得出：

$$P_1=\frac{kT}{\mu m_H}\rho_1,\tag{3-323}$$

式中 T 是温度，μ 是分子量，m_H 是氢原子的质量。对于包括理想气体的绝热过程或多方过程

$$\nabla P_1=\left(\frac{\gamma P_0}{\rho_0}\right)\nabla\rho_1=\left(\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)\nabla\rho_1,\tag{3-324}$$

式中 γ 是绝热指数或多方指数。将(3-321)式对时间求微分，并利用(3-322)式及(3-324)式，我们得到波方程：

$$\frac{\partial^2\rho_1}{\partial t^2}=\left(\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)\nabla^2\rho_1,\tag{3-325}$$

它具有平面波解：

$$\rho_1 \propto \exp\left[i\left(\frac{2\pi\chi}{\lambda}-\omega t\right)\right], \tag{3-326}$$

式中频率 ω 与波长 λ 的关系为:

$$\omega^2=\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)。 \tag{3-327}$$

压力 P_1 及速度 v_1 两者都是同样满足波方程(3-325)。微扰波的"声"速 s 由下式给出:

$$s=\left(\frac{\omega\lambda}{2\pi}\right)=\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)^{1/2}=\left(\frac{\gamma P_0}{\rho_0}\right)^{1/2}=\left(\frac{\gamma k T_0}{\mu m_{\rm H}}\right)^{1/2}, \tag{3-328}$$

式中偏导数 $\partial P/\partial \rho$ 是在等熵情况下求导的。(3-328)式首先由拉普拉斯(Laplace, 1816)在绝热情况下推导得出。

当速度 v_1 沿着传播方向时,这种声波就称为纵波。波的马赫(Mach)数就是下述比值:

$$M=v_1/s。 \tag{3-329}$$

平面声波的能量密度 U 为:

$$U=\rho_0 v_1^2/2, \tag{3-330}$$

能量通量密度 S 由下式给出:

$$S=s\rho_0 v_1^2/2。 \tag{3-331}$$

在两种气体之间的边界面上,声波反射及透射的边界条件是由在两种气体的分界面上压力及速度垂直分量的连续所确定的。

当一个声波在气体中传播时,其强度随距离 x 按 $\exp[-2\gamma x]$ 减弱,其中吸收系数 γ 由下式给出(Landau 和 Lifshitz, 1959):

$$\gamma=\frac{\omega^2}{2\rho c^3}\left[\left(\frac{4}{3}\mu+\xi\right)+\varkappa\left(\frac{1}{C_V}-\frac{1}{C_p}\right)\right]。 \tag{3-332}$$

这里 ω 是声波的频率,ρ 是质量密度,动力粘滞系数 μ 由(3-23)式、(3-24)式或(3-25)式给出,第二个粘滞系数 ξ 通常与 μ 是同量级的,热传导系数 $\varkappa$ 由(3-55)式或(3-56)式给出,C_V 及 C_p 分别是定容比热及定压比热。声波的散射截面与第 1.36 节至第 1.40 节给出的散射截面相同。

比尔曼等(Biermann, 1946, 1947; Schwarzschild, 1948; 以及 Shatzman, 1949)首先提出在一颗恒星的对流区中的湍动可以产生压缩波,波的能量能够加热星冕。莱特希尔(Lighthill, 1952, 1954)提出了在分层大气中流体运动产生声音的理论,普劳德曼(Proudman, 1952)利用海森堡湍流谱得出了声波发射率:

$$\varepsilon_s=\frac{38\rho v^8}{l s^5}\ \text{尔格}\cdot\text{厘米}^{-3}\cdot\text{秒}^{-1}, \tag{3-333}$$

式中常数 38 是所选择的湍流谱的结果,ρ 是气体质量密度,v 是湍流速度,l 是湍流长度尺度,s 是声速。奥斯特布罗克(Osterbrock, 1961)将玻姆-维坦斯(Böhm-Vitense)模型用于湍动(参看第 3.5.5. 节)而得出了太阳通量为:

$$F_{s\odot}\approx 10^7-10^8\ \text{尔格}\cdot\text{厘米}^{-2}\cdot\text{秒}^{-1}。 \tag{3-334}$$

惠特克等(Whittaker, 1963; Stein, 1968; 以及 Stein 和 Schwartz, 1972)证明引力效应将使大尺度湍流阻息,并将产生引力波,其发射率量级为:

$$\varepsilon_G\approx 10^2\,\frac{\rho v^3}{l}\left(\frac{l}{H}\right)^5\ \text{尔格}\cdot\text{厘米}^{-3}\cdot\text{秒}^{-1}, \tag{3-335}$$

式中 H 是标高。高于下式给出的临界频率 ω_G 的引力波,并不能在等温大气中传播:

$$\omega_G = \frac{g}{s}(\gamma-1)^{1/2}; \tag{3-336}$$

而声波在频率低于下式给出的临界频率 ω_s 时不能传播(Lamb, 1909):

$$\omega_s = \frac{\gamma g}{2s} = \frac{s}{2H}, \tag{3-337}$$

式中 H 是标高。这些考虑是根据色散关系(Hines, 1960)

$$\omega^4 - \omega^2 s^2 (k_x^2 + K_z^2) + (\gamma-1) g^2 k_x^2 + g i \gamma \omega^2 K_z = 0 \tag{3-338}$$

得出的,上式适用于密度在 z 方向随标高 $H = s^2/(\gamma g)$ 按指数率变化的等温大气。垂直方向的波数 K_z 具有复数形式 $K_z = k_z + i\gamma g/(2s^2)$,其中对于传播的波来说,$k_z$ 是实数。当水平方向的波数 $k_x = 0$ 时,频率 $\omega < \omega_s$ 的垂直波就不能传播;而当 $k_x \to \infty$ 时,频率 $\omega > \omega_G$ 的垂直方向传播的波不能传播。当 $\omega > \omega_s$ 时,可能存在受引力调制的在垂直方向上传播的压缩振荡;而当 $\omega < \omega_G$ 时,可能存在受压缩调制的在垂直方向上传播的引力波。莱顿(Leighton, Noyes 和 Simon, 1962)首先观测到太阳光球中的垂直速度振荡。他们观测到具有典型振幅 0.4 公里·秒$^{-1}$、周期约为 300 秒的速度振荡。当取光球的特征值 $\gamma = 1.2$ 及 $s = 7$ 公里··秒$^{-1}$时,(3-336)式给出周期为 359 秒,而(3-337)式给出周期为 *268 秒。对于以均方根速度 v_1 振荡的线性声波,将出现下式给出的均方根温度振荡 ΔT:

$$\Delta T = \frac{\gamma - 1}{s} v_1 T,$$

式中 T 是气体温度。诺伊斯等(Noyes 和 Hall, 1972)报道在太阳大气温度极小时 ΔT 值等于 225 开,而兰氏(Lang, 1974)在来自色球-日冕过渡区的射电辐射中观测到 $\Delta T \approx 10^4$ 开。对这两种情况,温度振荡的周期接近 265 秒。

阿耳文(Alfvén, 1947)首先指出磁声波或磁流体动力学波同样能加热日冕,巴恩斯(Barnes, 1968, 1969)对这些波作了研究,他证明只有 10^8 尔格·厘米$^{-2}$·秒$^{-1}$ 的总通量以快模式磁声波向外传播进入日冕中(参看第 3.5.11 节)。

3.5.7. 等熵流——气体的绝热射流

对于理想气体的绝热非传导流,根据热力学第一定律(3-59)式、理想气体定律的(3-61)式以及比热的(3-63)式,直接得出:

$$C_p dT + v dv = 0, \tag{3-339}$$

式中 C_p 是定压比热,dT 是温度 T 的变化,dv 是速度 v 的变化。根据欧拉方程(3-251)式及根据(3-339)式还得出熵的变化 dS 为:

$$dS = C_p \frac{dT}{T} - \frac{R}{\mu} \frac{dP}{P} = 0, \tag{3-340}$$

式中 R 是普适气体常数。也就是说,在理想气体的绝热流动中,熵是常量(等熵的)。若下标"0"表示起始时刻,没有下标的表示后来时刻,由(3-340)式可知

$$\frac{P}{P_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}, \tag{3-341}$$

式中 γ 是(3-66)式给出的绝热指数。

当气体起始是静止的($v_0 = 0$),由(3-341)式及(3-339)式可知,下列方程成立:

$$\frac{v^2}{2} + C_p T = C_p T_0, \tag{3-342}$$

$$\frac{v^2}{2}+\frac{s^2}{\gamma-1}=\frac{s_0^2}{\gamma-1}, \tag{3-343}$$

$$\frac{s_0^2}{s^2}=\frac{T_0}{T}=1+\frac{\gamma-1}{2}M^2, \tag{3-344}$$

$$\frac{P_0}{P}=\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\gamma/(\gamma-1)}, \tag{3-345}$$

以及

$$\frac{\rho_0}{\rho}=\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{1/(\gamma-1)}, \tag{3-346}$$

式中声速 s 为:

$$s=\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)^{1/2}=\left(\frac{\gamma P}{\rho}\right)^{1/2},$$

以及马赫数 M 为:

$$M=v/s。$$

$M=1$ 的点是特别有用的,在该点

$$\left.\begin{aligned}&T=2T_0/(\gamma+1),\\&P=P_0\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\gamma/(\gamma-1)},\\&\rho=\rho_0\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{1/(\gamma-1)}。\end{aligned}\right\} \tag{3-347}$$

正如雷诺(Reynolds, 1876)所首先指出的,(3-347)式可应用于进入真空的气体射流。在这种情况射流的速度为:

$$v=s_0\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{1/2}。 \tag{3-348}$$

当辐射为主的气体作绝热膨胀时,我们得出下列关系式(参看(3-78)式):

$$\frac{dT}{T}=\frac{1}{3}\frac{d\rho}{\rho}, \tag{3-349}$$

$$\rho\propto T^3\propto R^{-3}\propto t^{-3} \tag{3-350}$$

及

$$U=aT^4\propto R^{-4}\propto t^{-4}, \tag{3-351}$$

式中 T 是温度,ρ 是气体质量密度,R 是气体云的半径,U 是辐射能量密度,辐射常数 $a=$ *7.565660×10^{-15} 尔格·厘米$^{-3}$·开$^{-4}$,并且假定气体云处在它的早期膨胀阶段,所以 $R=vt$,其中 v 是恒定的膨胀速度,t 是时间变数。

类似地,在半径为 R 的气体云中,一个相对论性粒子的能量 E 表现为:

$$E\propto R^{-1}\propto t^{-1}, \tag{3-352}$$

而磁通量守恒意味着

$$H\propto R^{-2}\propto t^{-2},$$

式中 H 是磁场强度。于是同步加速辐射公式导出的结论是:同步加速辐射流量密度 S 将为(Shklovsky, 1960; 参看(1-154)式及(1-180)式):

$$S\propto R^{-2\gamma}\propto t^{-2\gamma}, \tag{3-353}$$

式中 γ 是相对论性电子能谱的幂律指数。对仙后座 A 已观测到这种射电流量随时间的减小(参看 Shklovsky, 1968)。卡尔达晓夫等(Kardashev, 1962; 以及 van der Laan, 1963)给出了有关射电源膨胀的另外公式。

在膨胀的晚期,气体云膨胀因星际介质而减慢下来。设介质密度为 ρ,气体云半径为 R、

质量为 M 及起始速度为 v_0，则其速度 v 由下式给出(Oort, 1946; Shklovsky, 1968)：若 $\rho R^3 \gg M$

$$v=\frac{3Mv_0}{4\pi\rho R^3}, \tag{3-354}$$

及

$$R=4v_t=\left(\frac{3Mv_0t}{\pi\rho}\right)^{1/4}。$$

当绝热压缩或绝热膨胀时，比熵(每克的) S 是常数，因此对于辐射为主的光子气，我们得出关系式：

$$T=\left(\frac{3S\rho}{4a}\right)^{1/3} \tag{3-355}$$

及

$$P=\frac{3^{1/3}S^{4/3}\rho^{4/3}}{4^{4/3}a^{1/3}}, \tag{3-356}$$

这里 T 及 P 分别是温度及压力，辐射常数 $a=$*7.565660×10^{-15} 尔格·厘米$^{-3}$·开$^{-4}$。

3.5.8. 激波

正如兰金(Rankine, 1870)所证明的，密度 ρ、压力 P 及温度 T 的不连续面象"激波"一样可在气体中传播。若 u 表示激波波阵面的速度，并且如果在激波前面的气体是静止的，则在激波后的气体就以下式给出的速度 v_b 行进，

$$v_b=u-v_2=\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_2}u, \tag{3-357}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}
u=v_1&=\left[\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)\frac{P_2-P_1}{\rho_2-\rho_1}\right]^{1/2}=\frac{\rho_1}{\rho_2}v_2,\\
v_1&=M_1s_1=M_1(\gamma P_1/\rho_1)^{1/2};\\
v_2&=M_2s_2=M_2(\gamma P_2/\rho_2)^{1/2};\\
M_2^2&=\frac{1+\frac{\gamma+1}{2}M_1^2}{\gamma M_1^2-\frac{\gamma-1}{2}},
\end{aligned}\right\} \tag{3-358}$$

这里 M 是马赫数，s 是声速，γ 是绝热指数，下标 1 及 2 分别表示在激波后及激波前的区域。(3-358)式表示根据 $M_2<1$ 或 >1，而取 $M_1>1$ 或 <1。这意味着，不是区域 1 必定是超声速的而区域 2 是亚声速的，就是区域 2 必定是超声速的而区域 1 是亚声速的。

激波波阵面前后区域 2 和 1 中的压力、密度及温度关系方程首先是由兰金等(Rankine, 1870; 以及 Hugoniot, 1889)推导出来的。根据欧拉方程、能量守恒定律及理想气体定律直接得出的这些兰金-雨果尼奥(Rankine-Hugoniot)关系式是：

$$\left.\begin{aligned}
\frac{P_2}{P_1}&=1+\frac{2\gamma}{\gamma+1}[M_1^2-1],\\
\frac{\rho_2}{\rho_1}=\frac{v_1}{v_2}&=\frac{(\gamma+1)M_1^2}{(\gamma-1)M_1^2+2}=\frac{1+\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\frac{P_2}{P_1}}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}+\frac{P_2}{P_1}},\\
\frac{T_2}{T_1}&=\frac{\{2\gamma M_1^2-(\gamma-1)\}\{(\gamma-1)M_1^2+2\}}{(\gamma+1)^2M_1^2}=\frac{P_2}{P_1}\frac{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}+\frac{P_2}{P_1}}{1+\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\frac{P_2}{P_1}}。
\end{aligned}\right\} \tag{3-359}$$

由(3-357)式至(3-359)式可知:

$$v_b=\frac{s_1}{\gamma}\left(\frac{P_2}{P_1}-1\right)\left[\frac{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}{\frac{P_2}{P_1}+\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\right]^{1/2}$$

及

$$\frac{P_2-P_1}{P_1}=\frac{2\gamma}{\gamma+1}\left(M_1^2-1\right)=\frac{\Delta P}{P_1}。\tag{3-360}$$

对于一个很弱的激波, $\Delta P/P_1\ll 1$, 我们得到:

$$\begin{aligned}&\frac{\Delta\rho}{\rho_1}=\frac{1}{\gamma}\frac{\Delta P}{P_1}=\frac{v_b}{s_1},\\&\frac{\Delta T}{T_1}=\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{\Delta P}{P_1},\\&v_1\approx s_1。\end{aligned}\tag{3-361}$$

对于一个很强的激波, $\Delta P/P_1\gg 1$, 我们得到:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\rho_2}{\rho_1}=\frac{\gamma+1}{\gamma-1},\\&\frac{T_2}{T_1}=\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\frac{P_2}{P_1},\\&v_1=s_1\left[\frac{\gamma+1}{2\gamma}\frac{P_2}{P_1}\right]^{1/2},\\&v_b=s_1\left[\frac{2}{\gamma(\gamma+1)}\frac{P_2}{P_1}\right]^{1/2}。\end{aligned}\right\}\tag{3-362}$$

对于弱激波,激波波阵面的厚度 Δx 反比于波强度,且由下式给出:

$$\Delta x\approx\frac{P_1 l}{P_2-P_1}\approx\frac{v_1 l}{v_2-v_1}\approx\frac{l}{M-1}\quad(\text{当 } M\ll 1),\tag{3-363}$$

式中 l 是分子平均自由程。对于强激波, $M\gg 1$, 激波波阵面厚度的量级为 l(参看 Mott-Smith, 1951; Tidman, 1958)。当激波在传播中穿过电离气体时, $\Delta x\approx v_s\tau_i$, 其中压缩波中的离子速度为激波波阵面速度 v_s 的量级,离子碰撞时间是 τ_i(参看(3-18)式)。

在质量密度为 ρ_1 的理想气体中,对于起始能量为 E 的强爆炸,无量纲变量

$$\xi=r\left(\frac{\rho_1}{Et^2}\right)^{1/5}$$

可以起相似变量的作用(参看 Sedov, 1959)。在时刻 t 时的激波波阵面的半径 R_s 及速度 v_s 由下式给出:

$$R_s=\xi_1\left(\frac{E}{\rho_1}\right)^{1/5}t^{2/5}\quad 及\quad v_s=\frac{2}{5}\xi_1^{5/2}\left(\frac{E}{\rho_1}\right)^{1/2}R_s^{-3/2},$$

式中参数 ξ_1 的量级为 1。对于这种强激波情况,在激波波阵面以后的参数由下式给出[1]:

$$\left.\begin{aligned}&\rho_1=\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\rho_2,\qquad v_1=\frac{2}{\gamma+1}v_s,\\&P_1=\frac{2}{\gamma+1}\rho_2 v_s^2\approx\rho_2\left(\frac{E}{\rho_2}\right)^{2/5}t^{-6/5},\\&T_1=\frac{2(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2}\mu m_{\mathrm{H}}v_s^2\approx\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\mu m_{\mathrm{H}}\rho_2\left(\frac{E}{\rho_2}\right)^{2/5}t^{-6/5}。\end{aligned}\right\}\tag{3-364}$$

一颗坍缩星的爆聚常常会触发热核爆炸,于是这就会形成一个相对论性的膨胀外壳(Colgate 和 Johnson, 1960)。当激波横越过密度逐渐减小的星幔时,一般速度会增加。设

1) 原文(3-364)式下标 1 与 2 正好相反,现已改正。——译者注

介质的初始密度为：

$$\rho=\rho_0\left(\frac{x_0}{x}\right)^{7/4}$$

以及产生激波的压力为：

$$P_s=P_0\left(\frac{t_0}{t}\right)^{5/3},$$

则激波波阵面的位置为(Colgate 和 White, 1966)：

$$x_s=x_0\left(\frac{t}{t_0}\right)^{4/3}, \tag{3-365}$$

激波的速度为：

$$v_s=v_{s0}\left(\frac{x_s}{x_0}\right)^{1/4}。 \tag{3-366}$$

在谢多夫(Sedov, 1959)的书中给出了超新星爆发产生的球形及圆柱形激波的相似解。

(3-359)式表示的兰金-雨果尼奥(Rankine-Hugoniot)关系式描述了穿过宽度量级为分子自由程 l 的激波波阵面的流体参数的不连续性。当出现辐射通量时，激波波阵面仍具有量级为 l 的宽度，但是辐射加热了流入到温度不连续区的气体。当辐射通量 σT_2^4 满足不等式：

$$\sigma T_2^4\gg\frac{2}{\gamma^2-1}\rho_1v_1^3$$

或

$$\frac{\sigma}{R^4}\gg\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^4\left(\frac{2}{\gamma^2-1}\right)\rho v_1^{-5} \tag{3-367}$$

时，激波成为辐射为主的，式中 $\sigma=*5.67032\times10^{-5}$ 尔格·厘米$^{-2}$·开$^{-4}$·秒$^{-1}$ 是斯忒藩-玻耳兹曼常数，并且假定气体是服从 $P=\rho RT/\mu$ 的理想气体，而 ν 是绝热指数。邦德等(Bond, Watson 和 Welch, 1965)利用下列约化变量来描述辐射为主的激波：

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{v}=\frac{v}{c_1};\\&\tilde{T}=\frac{RT}{c_1^2}=(c_1-v)\frac{v}{c_1^2};\\&\tilde{J}=\frac{(2\gamma-1)}{\rho vc_1^2(\gamma+1)}J,\end{aligned}\right\} \tag{3-368}$$

式中 J 是辐射通量，常数 c_1 由下式给出：

$$c_1=\frac{\gamma+1}{\gamma}\frac{v_1+v_2}{2}\lesssim v_1。$$

因而他们描述下列四类激波：

$$\left.\begin{aligned}&\text{极弱激波}\qquad \frac{\gamma}{\gamma+1}>\tilde{v}_2>\frac{1}{2};\\&\text{弱激波}\qquad \frac{1}{2}>\tilde{v}_2>\frac{1}{\gamma+1};\\&\text{强激波}\qquad \frac{1}{\gamma+1}>\tilde{v}_2>\frac{3-\gamma}{2(\gamma+1)};\\&\text{极强激波}\qquad \frac{3-\gamma}{2(\gamma+1)}>\tilde{v}_2>\frac{\gamma-1}{\gamma+1}。\end{aligned}\right\} \tag{3-369}$$

辐射的结果是在激波密度-速度间断面前形成一个辐射先锋，而在间断面后形成了一个辐射尾。设下标“+”及“-”表示紧靠间断面之前及之后的区域；而下标 1 及 2 表示远离间断面

后和前的区域，在这个区域的辐射通量已降到它的未受扰的值，一个辐射为主的激波具有：

$$\left.\begin{array}{ll}\text{极弱激波} & \tilde{T}_-=\tilde{T}_+=\dfrac{\gamma}{\gamma+1}-\left(\dfrac{\gamma}{\gamma+1}\right)^2=\tilde{T}_0<\tilde{T}_2;\\ \text{弱激波} & \\ & \tilde{T}_-=\tilde{T}_+=\tilde{T}_0<\tilde{T}_2<\dfrac{1}{4};\\ \text{强激波} & \tilde{T}_-<\tilde{T}_+;\\ \text{极强激波} & \tilde{T}_-\leqslant\tilde{T}_2<\tilde{T}_+\leqslant\dfrac{1}{4}。\end{array}\right\}\quad(3\text{-}370)$$

只有强激波及极强激波才会出现温度和速度的间断面。

3.5.9. 流体动力学引力波

作小振动的无粘滞流体的运动是无旋的，即

$$\nabla\times\boldsymbol{v}=0,\qquad(3\text{-}371)$$

式中 v 是速度。这样的流动称为势流。由(3-371)式可知，我们可以令

$$\boldsymbol{v}=\nabla\varphi,\qquad(3\text{-}372)$$

式中速度势 φ 满足下列泊松方程：

$$\nabla^2\varphi=0。\qquad(3\text{-}373)$$

若流体是不可压缩的($\rho=$常数)，且主要的力是沿 z 轴方向的引力的话，则由欧拉方程(3-251)式可知

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{1}{g}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)_{z=0}=0,\qquad(3\text{-}374)$$

式中波方程是在 $z=0$ 的面上求出的，g 是引力加速度。(3-373)式及(3-374)式的解为：

$$\varphi=A\cos(kz-\omega t)\exp[kz],\qquad(3\text{-}375)$$

其中气体处在占有 $z<0$ 的区域，频率 ω 与波矢量 k 的关系为：

$$\omega=(kg)^{1/2}。\qquad(3\text{-}376)$$

这种引力波的传播速度 u 为：

$$u=\frac{\partial\omega}{\partial k}=\frac{1}{2}\left(\frac{g}{k}\right)^{1/2}=\frac{1}{2}\left(\frac{g\lambda}{2\pi}\right)^{1/2},\qquad(3\text{-}377)$$

式中波矢量 $k=2\pi/\lambda$，λ 是波长。由(3-375)式及(3-377)式可知，在运动流体中的速度分布为：

$$\begin{aligned}v_z&=-Ak\cos(kx-\omega t)\exp(kz),\\ v_x&=Ak\sin(kx-\omega t)\exp(kz)。\end{aligned}\qquad(3\text{-}378)$$

对于粘滞气体，波能量随 $\exp(-2\gamma t)$ 减小，其中 t 是时间变量，阻尼系数 γ 由下式给出(Landau 和 Lifshitz, 1959)：

$$\gamma=2\nu\omega^4/g^2,\qquad(3\text{-}379)$$

式中 ν 是运动粘滞系数，ω 是波频率，g 是引力加速度。

在等温的、指数性大气中引力波及声波的色散关系由(3-338)式给出；而由湍流大气所产生的引力波通量由(3-335)式给出。在粘滞介质中，引力波的色散关系为(Chandrasekhar, 1961)：

$$Y^4+2Y^2-4Y+1+Q+Q^{1/3}S=0,\qquad(3\text{-}380)$$

式中
$$Y=\left[1+\frac{\omega}{k^2\nu}\right]^{1/2},$$
$$Q=\frac{g}{k^3\nu^2}$$
及
$$S=\frac{T}{\rho(g\nu^4)^{1/3}}。$$
这里ω是波频率，k是波数，ν是运动粘滞系数，T是表面张力，g是引力加速度，ρ是质量密度。根据爱因斯坦广义相对论方程所得出的一种不同类型的引力波将在第5.9节中加以讨论。

3.5.10. 引力不稳定性的琼斯条件

假定气体处于静止、均匀及平衡的条件是：速度v_0为零，密度ρ_0及压力P_0都是恒量；并且假定一个微扰使密度$\rho=\rho_0+\rho_1$及速度$v=v_1$，而唯一的外力是引力势φ，则连续性方程(3-250)式及欧拉方程(3-251)式成为：
$$\frac{\partial\rho_1}{\partial t}+\rho_0\nabla\cdot v_1=0 \tag{3-381}$$
及
$$\frac{\partial v_1}{\partial t}=-\nabla\varphi_1-\frac{\nabla P_1}{\rho_0}。$$
对于理想气体中的等温过程，
$$P_1=\frac{kT}{\mu m_{\rm H}}\rho_1, \tag{3-382}$$
式中T是温度，μ是平均分子量，$m_{\rm H}$是氢原子的质量。根据泊松方程
$$\nabla^2\varphi_1=4\pi G\rho_1, \tag{3-383}$$
可以把(3-381)至(3-383)式合并而得到波动方程：
$$\frac{\partial^2\rho_1}{\partial t^2}=4\pi G\rho_0\rho_1+\frac{kT}{\mu m_{\rm H}}\nabla^2\rho_1, \tag{3-384}$$
该方程具有平面波解：
$$\rho_1=\exp\left[i\left(\frac{2\pi x}{\lambda}-\omega t\right)\right], \tag{3-385}$$
式中频率ω与波长λ的关系为：
$$\omega^2=\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2\left(\frac{kT}{\mu m_{\rm H}}\right)-4\pi G\rho_0。 \tag{3-386}$$
所以，小密度涨落的传播速度v_J为(Jeans, 1902)：
$$v_J=\frac{\lambda\omega}{2\pi}=s\left[1-\frac{G\rho_0\lambda^2}{\pi s^2}\right]^{1/2}, \tag{3-387}$$
式中声速s由下式给出：
$$s=\left(\frac{P_0}{\rho_0}\right)^{1/2}=\left(\frac{kT}{\mu m_{\rm H}}\right)^{1/2}。$$
具有比临界波长(Jeans, 1902)
$$\lambda_J=s\left(\frac{\pi}{G\rho_0}\right)^{1/2}=\left(\frac{\pi kT}{\mu m_{\rm H}G\rho_0}\right)^{1/2}\approx6\times10^7\left(\frac{T}{\mu\rho_0}\right)^{1/2}\text{厘米} \tag{3-388}$$
大的波长λ的涨落，将随时间指数地增涨，因此这种波是不稳定的。速度v_J称为琼斯速度，长度λ_J称为琼斯长度。尺度大于λ_J的一团物质从引力上讲是不稳定的，它将会不断地收缩。直径为λ_J的一个球的相应的临界质量为：

$$M_J = \frac{\pi}{6}\rho_0\lambda_J^3 \approx 10^{23}\frac{(T/\mu)^{3/2}}{\rho^{1/2}}\text{克。} \tag{3-389}$$

张德拉塞卡(Chandrasekhar, 1951)及帕克(Parker, 1952)讨论了琼斯判据推广到绝热过程的情况。无限均匀介质中引力不稳定性的琼斯判据是不受分别存在或同时存在的均匀转动或均匀磁场的影响的。张德拉塞卡等(Chandrasekhar 和 Fermi, 1953; Chandrasekhar, 1953, 1954; 以及 Pacholczyk 和 Stódólkiewicz, 1960)讨论了转动及磁场的作用。

当波传播方向与转动方向垂直时，色散关系式为：

$$\omega^2 = k^2s^2 + 4\Omega^2 - 4\pi G\rho,$$

式中 Ω 是转动速度，而最小不稳定波长为：

$$\lambda_J = \frac{\pi s}{(\pi G\rho - \Omega^2)^{1/2}}\text{。} \tag{3-390}$$

在此特殊情况下，若 $\Omega^2 > \pi G\rho$ 就不会发生引力不稳定性。对于沿其他任何一个方向上传播的波来说，如果满足琼斯条件 $s^2k^2 - 4\pi G\rho < 0$，则就会出现引力不稳定性。当磁场强度为无穷大时，琼斯扰动只能沿磁场方向传播而不能沿垂直于磁场的方向传播。当存在强度为 H 的磁场时，一般的色散关系式为[1]：

$$\omega^4 - \left(\frac{\pi H^2}{\lambda^2\rho} + \frac{4\pi^2s^2}{\lambda^2} - 4\pi G\rho\right)\omega^2 + \frac{\pi H^2}{\lambda^2\rho}\left(\frac{4\pi^2s^2}{\lambda^2} - 4\pi G\rho\right)\cos^2\theta = 0,$$

式中 θ 是磁场方向与波传播方向的夹角。

3.5.11. 阿耳文磁流体力学波

假定气体是处在速度 v_0 为零、密度 ρ_0 及压力 P_0 都为恒量的静止、均匀及平衡情况下，再假定一个微扰使密度 $\rho = \rho_0 + \rho_1$ 及速度 $v = v_1$，不考虑引力而是假定在完全导电介质中存在有强度为 B_0 的均匀磁场，则连续性方程(3-250)式及欧拉方程(3-251)式成为：

$$\frac{\partial\rho_1}{\partial t} + \rho_0\nabla\cdot\boldsymbol{v}_1 = 0$$

及

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}_1}{\partial t} = -\frac{\nabla P_1}{\rho_0} - \frac{\boldsymbol{B}_0}{4\pi\rho_0}\times(\nabla\times\boldsymbol{B}_1), \tag{3-391}$$

式中 B_1 是微扰磁场，根据麦克斯韦方程，

$$\frac{\partial B_1}{\partial t} = \nabla\times(\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{B}_0)\text{。} \tag{3-392}$$

对于理想气体，

$$\nabla P_1 = s^2\nabla\rho_1, \tag{3-393}$$

式中 $s = (\partial P/\partial\rho)^{1/2}$ 为声速，引进阿耳文速度

$$\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{B}_0(4\pi\rho_0)^{-1/2},$$

可将(3-391)式及(3-392)式合并而得出方程：

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{v}_1}{\partial t^2} - s^2\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{v}_1) + \boldsymbol{v}_A\times\nabla\times[\nabla\times(\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_A)] = 0\text{。} \tag{3-394}$$

如同阿耳文(Alfvén, 1942)和阿斯特朗(Astron, 1950)所首先指出的，(3-394)式有平面波解：

$$v_1 = \exp[i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - \omega t)], \tag{3-395}$$

1) 原文此式有错，现已改正。——译者注

式中 ω 是波频率，以及波矢量

$$\boldsymbol{k}=\frac{2\pi}{\lambda}\boldsymbol{n},$$

其中 λ 是波长，$\boldsymbol{n}$ 是在传播方向的单位矢量。当波矢量 $\boldsymbol{k}$ 垂直于 $\boldsymbol{v}_A$ 时，(3-394)式有平面波解，其相速度为：

$$v_p=\frac{\lambda\omega}{2\pi}=(s^2+v_A^2)^{1/2}, \tag{3-396}$$

这是纵波。当 $\boldsymbol{k}$ 平行于 $\boldsymbol{v}_A$ 时，就有两个平面波解，一个是相速度为 s 的纵波，另一个是相速度为 v_A 的横波。

对于粘滞率或导电率有限的介质，阿耳文波是被阻息的，我们得出色散关系式(Herlofson, 1950; Chandrasekhar, 1962)为：

$$(\omega-i\nu k^2)(\omega-i\eta k^2)=v_A^2k^2,$$

其解为：

$$\begin{aligned}\omega&=\pm k\left[v_A^2-\frac{1}{4}(\nu-\eta)^2k^2\right]^{1/2}+\frac{1}{2}i(\nu+\eta)k^2\\&\approx\pm v_Ak\left[1-\frac{1}{8}\frac{(\nu-\eta)^2}{v_A^2}k^2\right]+\frac{1}{2}i(\nu+\eta)k^2,\end{aligned} \tag{3-397}$$

这里 ν 是运动粘滞系数，电阻率 $\eta=c^2/(4\pi\mu\sigma)$，其中 μ 是磁导率，σ 是电导率，近似式是对 $\nu\to0$ 及 $\eta\to0$ 而言的。当不考虑粘滞率，而电导率是重要的话，那末明显地存在阿耳文波的条件为：

$$\frac{8\pi\mu\sigma v_A^2}{\omega^2c^2}=\frac{\mu v_A\lambda^2\sigma}{c^2}\approx\frac{\sigma B_0\lambda^2}{\rho_0^{1/2}c^2}\gg1, \tag{3-398}$$

当阿耳文波行进下列距离后，它的振幅就衰减到它的起始值的 $1/e$（参看 Alfvén 和Fälthammer, 1963)

$$z_0=\frac{\sigma B_0\lambda^2}{\pi^{3/2}\rho_0^{1/2}c^2}, \tag{3-399}$$

式中 $\lambda=2\pi v_A/\omega$。

3.5.12. 湍流

当研究在管子中流动的流体时，雷诺(Reynolds, 1883)发现：当雷诺数

$$R_e=\frac{Lv}{\nu} \tag{3-400}$$

减小到低于约为 2000 的临界值以下时，湍流运动就会被粘滞性所阻息。这里 L 是管的直径，v 是平均流速，ν 是运动粘滞系数。气体的粘滞率及雷诺数的公式由(3-23)至(3-31)式给出。如同罗斯兰德(Rosseland, 1929)所首先指出的，天体所涉及的距离尺度是如此巨大以致雷诺数必然会常常超过出现湍流所需的临界值。

湍动是涨落，因而必须把湍流速度作为位置及时间的随机连续函数来处理。当假定介质是均匀及各向同性时，则就认为与此相应的统计理论的形式是最简单的。在这种情况下，运动的平均性质是与位置或参考轴的方向无关的。于是，湍流速度 v 是用下列相关函数来描述的(Taylor, 1935)：

$$R_{ij}(\boldsymbol{r})=\langle v_i(\boldsymbol{x})v_j(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r})\rangle, \tag{3-401}$$

而它的傅里叶变换为(Taylor, 1938)：

$$\Phi_{ij}(\boldsymbol{k})=\frac{1}{8\pi^3}\int_{-\infty}^{+\infty}R_{ij}(\boldsymbol{r})\exp[-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}]d\boldsymbol{r}。$$

这里相关是指两点 i、j 之间的相关，它们的空间间距为矢量 $\boldsymbol{r}$；$\langle\ \ \rangle$ 表示空间平均，$\boldsymbol{k}$ 是波矢。当湍流是各向同性的及均匀的，则相关函数的形式为(von Kármán, 1937; von Kármán 和 Howarth, 1938)：

$$R_{ij}(\boldsymbol{r})=F(r)r_ir_j+G(r)\delta_{ij},\tag{3-402}$$

式中 F 及 G 是 r 的标量函数，δ_{ij} 是狄拉克 δ 函数。当速度相关函数进一步划分为纵向分量 $f(r)$ 及横向分量 $g(r)$ 时，我们得到关系式：

$$G=v^2g$$

及

$$F=\frac{v^2}{r^2}(f-g),$$

式中 v^2 是湍流速度的均方值；而

$$g(r)=\frac{\langle v_n(x)v_n(x+r)\rangle}{v^2};$$

$$f(r)=\frac{\langle v_p(x)v_p(x+r)\rangle}{v^2},$$

其中下标 p 及 n 分别表示平行(纵向)及垂直(横向)于 $\boldsymbol{r}$ 的速度分量。

物理上特别感兴趣的是能谱函数：

$$E(k)=2\pi k^2\Phi_{ii}(k)。\tag{3-403}$$

在波数空间，半径为 k 到 $k+dk$ 的球壳对总能量的贡献是 $E(k)dk$。

对于具有特征大小 $L=\alpha^{-1}$ 的湍流速度元的情况，我们可以取：

$$v(x)=\alpha^2x\exp\left[-\frac{\alpha^2x^2}{2}\right],\tag{3-404}$$

从而得到：

$$E(k)\propto k^4\exp\left[-\frac{k^2}{\alpha^2}\right]。$$

这种特殊情况表明 $E(k)$ 在 1.4α 处具有极大值，方差 $\sigma_k=0.4\alpha$ 以及波数 $k\approx L^{-1}$。换句话说，较大的湍涡流具有较小的波数，反之亦然。

总的湍流动能密度由下式给出：

$$\frac{\rho}{2}R_{ii}(0)=\frac{\rho}{2}\langle v_iv_i\rangle=\frac{\rho}{2}\iiint_{-\infty}^{+\infty}\Phi_{ii}(\boldsymbol{k})d\boldsymbol{k}=\rho\int_0^{\infty}E(k)dk。\tag{3-405}$$

由纳维尔-斯托克斯方程可知，动能的时间变化率由下式给出(参看 Batchelor, 1967)：

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\rho R_{ii}(0)}{2}\right]=-2\rho\nu\int_0^{\infty}k^2E(k)dk=-\rho\varepsilon,\tag{3-406}$$

式中 ν 是运动粘滞系数，ε 称为耗散积分。由(3-406)式可知，由于粘滞性的缘故，动能会转变成热而耗散掉，而这种耗散大部分是由具有大 k 值的小涡流形成的。

当考虑惯性力时，可以看到惯性力并不改变总动能；但它们肯定起了把动能从较大的湍流元转移到较小的湍流元的作用。柯尔莫戈罗夫(Kolmogoroff, 1941)假设当雷诺数大时，湍流的较小尺度的分量是处于统计平衡状态。在这种情况下，较小涡流的大小分布只随较大涡流的粘滞率及其他特性而变。柯尔莫戈罗夫(Kolmogoroff, 1941)得到能谱为：

$$E(k)\propto\varepsilon^{2/3}k^{-5/3},\tag{3-407}$$

式中 ε 是从较大涡流到较小涡流的能量转移率，并且是由(3-406)式给出的。解释柯尔莫戈罗夫谱的一种简单方式是假定尺度为 L_0 的大涡流将存在时间为：

$$t_{L_0}=L_0/v_{L_0},$$

式中 v_{L_0} 是它相对于相邻涡流的速度。若有恒定的能流进入较小涡流中，我们将得到：

$$v_L\propto L^{1/3},$$

即

$$t_L\propto L^{2/3},\tag{3-408}$$

式中 v_L 及 t_L 分别表示一个大小为 L 的涡流的速度及寿命。当速度 v_L 小于阿耳文速度 v_A 时，它们就会被磁场所阻息，而当 v_L 大于声速 s 时，部分动能可能以激波的形式耗散。在这些情况中我们得出(Kaplan, 1954)：

$$\begin{aligned} v_L&\propto L \quad (\text{当 } v_L>s);\\ v_L&\propto L^{1/2} \quad (\text{当 } v_L<v_A)。\end{aligned}\tag{3-409}$$

海森堡(Heisenberg, 1948, 1949)计算了在平衡范围内能量随波数的分布，并且得出(参看 Chandrasekhar, 1949)：

$$\begin{aligned} E(k)&=\frac{c\varepsilon^{2/3}k^{-5/3}}{[1+(8/3)(k/k_d)^4]^{4/3}}\\ &\propto \varepsilon^{2/3}k^{-5/3} \quad (\text{当 } k\ll k_d)\\ &\approx k^{-7} \quad (\text{当 } k\gg k_d)。\end{aligned}\tag{3-410}$$

这里 c 是常数，极限波数 $k_d=(\varepsilon/\nu^3)^{1/4}$。

罗斯兰德(Rosseland, 1929)和张德拉塞卡(Chandrasekhar, 1949)提出了湍流可能在天体物理学中起作用。理查森等(Richardson 和 Schwarzschild, 1950)首先把湍流理论应用于太阳上米粒的运动；张德拉塞卡等(Chandrasekhar 和 Fermi, 1953)则首先应用于确定星际磁场的强度；而威札克(Weizsäcker, 1951)首先应用于星系的形成。已发现柯尔莫戈罗夫(Kolmogoroff) $k^{-5/3}$ 能谱对大气湍流是适用的(参看 Lumley 和 Panofsky, 1964)。行星际磁场、速度及密度谱都表明柯尔莫戈罗夫能谱适合于频率范围为 10^{-5} 赫 $\lesssim f\lesssim 10$ 赫的太阳风(参看 Jokipii, 1974)。这里 $f\approx v_W k/2\pi$，其中 k 是波数，太阳风速度 $v_W\approx 350$ 公里·秒$^{-1}$。此外，奥泽努瓦等(Ozernoi 和 Chibisov, 1971)主张柯尔莫戈罗夫谱对星系尺度大小也是适用的。

3.5.13. 吸积

当一个稳定的种子天体处于温度为 T 的热平衡气体中时，它就会与气体原子发生碰撞，其碰撞时间 τ_c 为：

$$\tau_c\approx(\pi r^2 N v_{热})^{-1}\approx\left[\pi r^2 N\left(\frac{kT}{m}\right)^{1/2}\right]^{-1},$$

式中 r 是种子天体的半径，$v_{热}$ 是气体原子的热速度，N 及 m 分别是原子的数密度及质量。若每一个碰撞种子天体的原子都粘着在该天体上，则种子天体的质量 M 的增长率 A 为：

$$A=\frac{dM}{dt}\approx\frac{m}{\tau_0}\approx\pi r^2 N(kTm)^{1/2},\tag{3-411}$$

而半径的增长率为：

$$\frac{dr}{dt}\approx\frac{N}{\rho}(kTm)^{1/2}\approx\frac{A}{\pi r^2\rho},$$

式中 ρ 是气体质量密度。在气体云中这种类型的吸积认为是星际物质中尘粒形成的原因(Lindblad, 1935; Oort 和 van de Hulst, 1946)。

如果一个行星、恒星或星系相对于气体云的相对速度为 v，它们相碰的时间间隔大致为：

$$\tau \approx r/v, \tag{3-412}$$

式中 r 是两个天体之间的最小距离。设行星、恒星或星系的质量为 M，气体云的质量密度为 ρ，天体作用在单位体积气体上的引力为：

$$F = GM\rho/r^2, \tag{3-413}$$

由这个力转移所传递的动量 p 近似为：

$$p = \tau F = \frac{GM\rho}{rv}。 \tag{3-414}$$

在临界距离

$$R_A = \frac{GM}{v^2} = 1.3\times10^{14}\left(\frac{10\text{ 公里}\cdot\text{秒}^{-1}}{v}\right)^2\left(\frac{M}{M_\odot}\right)\text{厘米} \tag{3-415}$$

处，初始动量 ρv 就等于 p。当种子天体运动经过气体时，它将俘获或吸积临界半径 R_A 以内的气体。只要 R_A 大于气体的平均自由程，则可把俘获气体始终看作环绕种子天体的湍流云。湍流摩擦将会引起气体动能的耗损，因而大部分气体终将与行星、恒星或星系成为一体。因为在气体球内的总质量是 ρR_A^3，又因它是在时间 $\tau_A = R_A/v_2$ 以内增加的，所以质量增长率为(Hoyle 和 Lyttleton, 1939; Bondi 和 Hoyle, 1944)：

$$A = \frac{dM}{dt} \approx \pi\rho R_A^2 v = \pi R_A^2 \mu m_{\mathrm{H}} N v, \tag{3-416}$$

式中 μ 是分子量，m_{H} 是氢原子质量，N 是气体云的密度。半径增长率的相应公式为：

$$\frac{dr}{dt} = \frac{v}{4}\frac{\rho}{\rho_s}, \tag{3-417}$$

式中 $\rho_s = 3M/(4\pi R^3)$ 是行星、恒星或星系的质量密度。

若进入气体的平均动能小于行星、恒星或星系的引力能，由于引力吸引，所有气体会被吸引到大质量天体上，于是 (3-416)式写成：

$$A = \pi\rho[R(R+R_A)]v, \tag{3-418}$$

式中 R 是行星、恒星或星系的半径。取 $\rho = 10^{-24}$ 克·厘米$^{-3}$，即星际介质的 ρ 值，$R = R_\odot$ 及 $v = 10$ 公里·秒$^{-1}$，(3-418)式给出当 $M = M_\odot$ 时，$A \approx 10^{-18} M_\odot$/年。

当天体的半径 R 小于下式给出的临界半径 R_s 时，吸积到质量为 M 的行星、恒星或星系上的气体的速度是超声速的：

$$R_s = \frac{5-3\gamma}{4}\frac{GM}{s^2}, \tag{3-419}$$

式中 γ 是绝热指数，在无穷远处气体的声速 s 为：

$$s = \left(\frac{\gamma P}{\rho}\right)^{1/2} \approx \left(\frac{kT}{m_{\mathrm{H}}}\right)^{1/2}, \tag{3-420}$$

式中 P 及 T 分别是气体压力及温度，m_{H} 是氢原子质量。当 $v<s$ 并考虑到吸积，则 $R<R_s$。在这种情况下，临界吸积半径 R_A 由下式给出(Bondi, 1952; Zeldovich 和 Novikov, 1971)：

$$R_A = \delta(\gamma)\frac{GM}{s^2}, \tag{3-421}$$

式中

$$\delta(\gamma) = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{(5-3\gamma)}\right]^{(5-3\gamma)/(3\gamma-3)}。$$

当 $\gamma = 5/3$ 及 $4/3$ 时分别得出 $\delta(\gamma) = 0.5$ 及 1。对于 $v<s$ 的情况，吸积率 A 为：

$$A=4\pi R_s^2U_s\rho_s=\alpha(\gamma)\left(\frac{2GM}{c^2}\right)^2c\rho\left(\frac{m_{\rm H}c^2}{kT}\right)^{3/2}\approx\pi R_A^2s\rho, \tag{3-422}$$

式中在临界半径 R_s 处的声速 U_s 为:

$$U_s=s\left[\frac{2}{(5-3\gamma)}\right]^{1/2} \tag{3-423}$$

及
$$\alpha(\gamma)=\frac{\pi}{4\gamma^{3/2}}\left[\frac{2}{(5-3\gamma)}\right]^{(5-3\gamma)/[2(\gamma-1)]},$$

当 $\gamma=1$、5/3 及 4/3 时，$\alpha(\gamma)$ 的值分别为 1.5、0.3 及 1.4。当 v 小于 s 时，若 v 以 s 代替，(3-421)式及(3-422)式粗略地来说，是与(3-415)式及(3-416)式相同的。当 $\rho=10^{-24}$ 克·厘米$^{-3}$，$M\approx M_\odot$ 及 $s=1$ 公里·秒$^{-1}$，(3-422)式给出 $A\approx5\times10^{-12}M_\odot$/年。

一颗恒星由于吸积产生的光度由下式给出(Zeldovich 和 Novikov, 1971):

$$L\approx\varphi\frac{dM}{dt}\approx2\times10^{31}\left(\frac{\varphi}{0.1c^2}\right)\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^2\left(\frac{10^4}{T}\right)^{3/2}N\ \text{尔格·秒}^{-1}, \tag{3-424}$$

式中 φ 是靠近恒星表面的引力势，T 及 N 分别是靠近 R_A 的气体的温度及数密度，γ 已取为 4/3。虽然能谱是难以估算的，一种近似是假定发出辐射的表面是光度为 L、温度为 T 的黑体辐射体。于是，一旦由 L 和恒星的半径 R 求出 T，维恩位移定律就给出最大辐射的波长。对于白矮星，$M\approx M_\odot$，$R=10^9$ 厘米，$\varphi\approx10^{-4}c^2$ 及 $L\approx10^{28}N$ 尔格·秒$^{-1}$。在这种情况下，对于适当的 N 值，$T\approx500\sim2000$ 开，因而辐射处在红外区。对于中子星，$M\approx M_\odot$，$R\approx10^6$ 厘米，所以恒星所辐射出的能量大部分是在 150～900 埃的紫外波段。米歇尔(Michel, 1972)给出了有关中子星及黑洞吸积物质的进一步的公式。

丹拜等(Danby 和 Camm, 1957)给出了有关吸积天体密度分布的详尽讨论。丹拜和布雷(Danby 和 Bray, 1967)证明当气体不是冷的，吸积作用就不象上述所说的这样有效。斯皮格尔(Spiegel, 1970)给出了由于吸积激波产生的阻力 F_D 的公式，并且证明以超声速运动的星系引力能的耗散足以把星系团加热到约 10^8 开。他给出:

$$F_D=\pi R_A^2\rho v\ln\left\{\frac{\pi}{Rk_J}\left[\frac{M}{(M^2-1)^{1/2}}\right]\right\}, \tag{3-425}$$

式中
$$k_J=\left[\frac{4\pi G\rho}{s^2}\right]^{1/2},$$

以及马赫数 $M=v/s$ 是大于 1 的。超声速天体的作功率是 vF_D。

3.5.14. 恒星的变化性及振荡理论

法布里修斯(Fabricius, 1594)首先发现[1]从蒭蒿增二这颗恒星来的光是变化的；而古德里克(Goodricke, 1784)及贝利(Bailey, 1899)分别发现从仙王座 δ 星及天琴座 RR 星来的光是周期地变化的。其后库卡金等(Kukarkin[2] 和 Parenago, 1969)编纂了成千上万颗变星的星表。总的说来，有许多不同类型的变星，具有从 0.3～1000 天的光变周期。天琴座 RR 型变星的周期从 0.3～0.9 天，而经典造父变星的周期从 1～50 天。

沃格尔等(Vogel, 1889; 以及 Belopolski, 1897)发现经典造父变星的视向速度的变化与光变具有相同的周期；而且视向速度曲线趋于成为光变曲线的镜像。若视向速度曲线反映恒星表面的运动，那么在光变曲线与速度曲线之间的相位滞后意味着当恒星从平衡半径膨胀时它是最亮的。赫兹朋(Hertzsprung, 1905)指出，脉动星在赫罗图上处在一条“不稳

1) 我国早在公元二世纪以前的汉代就已观测到了变星的光度变化。——译者注

2) 原文误为，Kukarin。——译者注

定"狭条中，并且指出造父变星是处于一种特殊演化阶段的"巨"星（参看图 42）。莱维特(Leavitt, 1912)指出，经典造父变星的周期随它们的绝对光度而增加，这种周光关系的详情将在第 5.3.5 节讨论。赫兹朋(Hertzsprung, 1926)则指出造父变星的光变曲线呈现与不对称性和形状有关的周期性。此外，已证明视向速度曲线的总振幅 $2K$ 与光变曲线的振幅 A_{pg} 是成线性关系的(Eggen, 1951)：

$$2K \approx 35.3A_{pg} \text{ 公里·秒}^{-1} \quad (\text{当 } A_{pg} < 1.2 \text{ 星等})。 \tag{3-426}$$

里特(Ritter, 1880, 1881)首先提出假说：一颗恒星的绝热径向振荡可以说明所观测到的周期变化。爱丁顿(Eddington, 1918, 1919, 1926)利用连续性方程(3-250)及欧拉方程(3-251)的线性形式，以及绝热关系式：

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\Delta P}{P} = \Gamma_1 \frac{\Delta\rho}{\rho};\\
&\frac{\Delta T}{T} = (\Gamma_3 - 1)\frac{\Delta\rho}{\rho};\\
&\Gamma_1 = \beta + \frac{(4-3\beta)^2(\gamma-1)}{\beta+12(\gamma-1)(1-\beta)};\\
&\Gamma_3 = 1 + \frac{\Gamma_1 - \beta}{4-3\beta};\\
&\beta = \frac{P_G}{P} = \frac{Nk\rho T}{Nk\rho T + aT^{4/3}},
\end{aligned}\right\} \tag{3-427}$$

从而得到了绝热径向振荡的波动方程：

$$-\frac{1}{\rho r^4}\frac{d}{dr}\left(\Gamma_1 P r^4 \frac{d\xi}{dr}\right) - \frac{1}{r\rho}\left\{\frac{d}{dr}[(3\Gamma_1 - 4)P]\right\}\xi = \sigma^2\xi$$

或

$$\frac{d^2\xi}{dx^2} + [4 - V(x)]\frac{1}{x}\frac{d\xi}{dx} + \frac{V(x)}{x^2}\left[\frac{4-3\gamma}{\gamma} + \frac{x^3R^3\sigma^2}{\gamma GM(x)}\right]\xi = 0, \tag{3-428}$$

这里 P 为一颗恒星具有的总压力；气体压力 $P_G = Nk\rho T$，其中 N 是每单位质量的自由电子及离子的总数；辐射压力 $P_R = aT^4/3$，其中 $ac/4$ 是斯忒藩-玻耳兹曼常数；ρ 为质量密度；T 为温度；γ 为绝热系数。线性径向振荡引起的半径 r 的改变 Δr 为：

$$\Delta r = r\xi \exp[i\sigma t], \tag{3-429}$$

式中 ξ 及 σ 分别是振荡的振幅及频率。这些振荡是看作迭加在整个流体静力学和热平衡状态上的。当平衡半径为 R 时，变量 $x = r/R$，而

$$V(x) = \frac{G\rho(x)M(x)}{rP(x)}, \tag{3-430}$$

式中 $M(x)$ 是 x 以内的质量，并且由下式给出：

$$M(x) = \int_0^x 4\pi r^2\rho(r)\,dr。$$

波动方程(3-428)式的边界条件为：

在 $r=0$ 处，　　$\Delta r = 0$;

在 $r=R$ 处，

$$\frac{\Delta P}{P} = -\left[4 + \frac{\sigma^2R^3}{GM}\right]\xi \tag{3-431}$$

或

在 $x=1$ 处，　　$$\frac{d\xi}{dx} = \left[4 - 3\gamma + \frac{\sigma^2R^3}{GM}\right]\frac{\xi}{Y}。$$

(3-428)式容许对参数 σ^2 的某些本征值 σ_i^2 有本征函数解 ξ_i, σ 随整数 i 的增加而增加。史瓦西(Schwarzschild, 1941)已算出当 $\Gamma_1=5/3$, 前四个模式 $i=0、1、2、3$ 的振幅 ξ, 而且勒杜克斯等(Ledoux 和 Walraven, 1958)总结了当取 $\Gamma_1=5/3$ 时, 各种恒星模型的前两种径向振荡模式的特性。总的来说, 基谐模 $i=0$ 有下列解 (Ledoux 和 Pekeris, 1941; Ledoux, 1945):

$$(3\Gamma_1-4)\frac{4\pi G\rho}{3}\leqslant\sigma_0^2\leqslant-(3\Gamma_1-4)\frac{\Omega}{I}, \tag{3-432}$$

式中 $\Omega\approx-GM^2/R$ 是引力势能, $I\approx MR^2$ 是转动惯量。若存在强度为 H 的磁场, 必须以 $\Omega+\mathscr{M}$ 代替 Ω(Chandrasekhar 和 Limber, 1954), 其中磁能 $\mathscr{M}=R^3H^2/6$。对于一颗均匀恒星, 我们得到(Ritter, 1881):

$$\sigma_0^2=(3\Gamma_1-4)\frac{GM}{R^3}, \tag{3-433}$$

所以周期 Π_0 为:

$$\Pi_0=\frac{2\pi}{\sigma}\approx\frac{2R}{s}\propto\rho^{-1/2}, \tag{3-434}$$

式中 s 是声速, 而脉动常数 Q_0 为:

当 $\Gamma_1=5/3$

$$Q_0=\Pi_0\left(\frac{\rho}{\rho_\odot}\right)^{1/2}\approx0.116\ \text{日}, \tag{3-435}$$

式中太阳密度 $\rho_\odot=$ *1.409 克·厘米$^{-3}$。爱泼斯坦(Epstein, 1950)指出, (3-428) 式的基谐模的解取决于峰值在

$$x=\frac{r}{R}\approx0.75 \tag{3-436}$$

的加权函数。这表示基谐模的周期主要取决于恒星外壳的状况, 而几乎与大部分质量所在的恒星核心区的状况无关。史瓦西等(Schwarzschild, 1941; Baker 和 Kippenhahn, 1965; 以及 Christy, 1966)给出了作为 Q_0 的函数的周期比 Π_i/Π_0。观测资料(Christy, 1966)表明 $\Pi_1/\Pi_0\approx0.77$ 及 $Q_0=0.033$ 日。均匀模型给出 $Q_0\approx0.12$, 而指数为 3 的多层球标准模型给出 $Q_0\approx0.038$。克里斯蒂(Christy, 1966)给出质量为 M、半径为 R 的恒星的

$$Q_0\approx0.022\left(\frac{R}{R_\odot}\right)^{1/4}\left(\frac{M_\odot}{M}\right)^{1/4}\text{日}, \tag{3-437}$$

这里太阳半径 $R_\odot=$ *6.9599×10^{10} 厘米, 太阳质量 $M_\odot=$ *1.9891×10^{33} 克。

虽然变星的周期对非线性效应及非绝热效应相对地说是不灵敏的, 绝热振荡的迅速衰减, 为了解释变星的连续脉动就需要考虑某种非线性或非绝热效应。这些效应对解释观测到的亮度振荡与恒星半径振荡之间的相移也是需要的。爱丁顿(Eddington, 1941)提出, 不稳定性的一个可能的原因是靠近恒星表面的非绝热氢电离区; 瑞瓦金 (Zhevakin, 1953, 1963)以及考克斯等(Cox 和 Whitney, 1958)指出, 恒星振荡可能受激于氦的电离区(He^+)。后来贝克等(Baker 和 Kippenhahn, 1962, 1965; 以及 Cox, 1963)的线性非绝热计算证实了瑞瓦金的结论。这些计算利用了线性形式的运动方程:

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}=-\frac{GM(r)}{r^2}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} \tag{3-438}$$

以及热流方程:

$$\frac{\partial Q}{\partial t}=\frac{\partial E}{\partial t}-\frac{P}{\rho^2}\frac{\partial\rho}{\partial t}=\varepsilon-\frac{1}{4\pi r^2\rho}\frac{\partial L}{\partial r}, \tag{3-439}$$

这里 $M(r)$ 是半径 r 以内的质量，$\partial Q/\partial t$ 是每单位质量的热的净增率，E 是每单位质量总的内能，ε 是每单位质量的热核能产生率：

$$\varepsilon=\varepsilon_0\rho^{\lambda}T^{\nu}$$

或

$$\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon}=\lambda\frac{\Delta\rho}{\rho}+\nu\frac{\Delta T}{T}\approx\frac{\Delta\rho}{\rho}[\lambda+\nu(\Gamma_3-1)],\tag{3-440}$$

以及"内"光度 $L(r)$ 由下式给出：

$$L(r)=-4\pi r^2\frac{4ac}{3}\frac{T^3}{\varkappa\rho}\frac{\partial T}{\partial r},\tag{3-441}$$

式中罗斯兰德平均不透明度 $\varkappa$ 已有考克斯等(Cox, Stewart 和 Eilers, 1965)列表给出。由常用公式

$$\varkappa=\varkappa_0\rho^nT^{-s},\tag{3-442}$$

得出

$$\frac{\Delta\varkappa}{\varkappa}=n\frac{\Delta\rho}{\rho}-s\frac{\Delta T}{T}\tag{3-443}$$

及
$$\frac{\Delta L}{L}=4\frac{\Delta r}{r}+(4+s)\frac{\Delta T}{T}-n\frac{\Delta\rho}{\rho}+\frac{1}{d\ln T/dx}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Delta T}{T}\right)。$$

热流方程(3-439)式的另外的形式为：

$$\frac{\partial P}{\partial t}=\frac{\Gamma_1P}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho(\Gamma_3-1)\left[\varepsilon-\frac{1}{4\pi r^2\rho}\frac{\partial L}{\partial r}\right]$$

及

$$\frac{\partial\ln T}{\partial t}=(\Gamma_3-1)\frac{\partial\ln\rho}{\partial t}+\frac{1}{c_VT}\left[\varepsilon-\frac{1}{4\pi r^2\rho}\frac{\partial L}{\partial r}\right]。\tag{3-444}$$

当采用 $\xi=\Delta r/r$ 以及(3-438)式及(3-439)式或(3-444)式的线性形式时，我们得到非绝热径向振荡的波动方程：

$$\begin{aligned}\xi-\frac{\dot{\xi}}{r\rho}\frac{d}{dr}[(3\Gamma_1-4)P]-\frac{1}{\rho r^4}\frac{\partial}{\partial r}\left[\Gamma_1Pr^4\frac{\partial\dot{\xi}}{\partial r}\right]\\=-\frac{1}{r\rho}\frac{\partial}{\partial r}\left[\rho(\Gamma_3-1)\Delta\left(\varepsilon-\frac{1}{4\pi r^2\rho}\frac{\partial L}{\partial r}\right)\right],\end{aligned}\tag{3-445}$$

式中符号上的圆点表示斯托克斯导数 $\partial/\partial t$。贝克等(Baker 和 Kippenhahn, 1962, 1965; Cox, 1963; 以及 Zhevakin, 1963)已给出(3-438)式、(3-439)式、(3-444)式及(3-445)式的计算机解，而勒杜克斯(Ledoux, 1963, 1965)已给出本征值的积分解。

一般说来，在考虑了偏离平衡球形的情况后，流体的变形表面的半径 r 就由下式给出：

$$r=R+\varepsilon Y_l^m(\varphi,\ \theta),\tag{3-446}$$

式中 R 是平衡半径；Y_l^m 是球谐函数；$\varepsilon=\varepsilon_0\exp[-\sigma t]$，其中 ε_0 是常数，$2\pi/\sigma$ 是振荡周期。非粘滞流体的径向振荡及非径向振荡都具有开尔文模式

$$\sigma^2=-\frac{2l(l-1)}{(2l+1)}\frac{GM}{R^3}=-\frac{8}{3}\pi G\rho\frac{l(l-1)}{2l+1}。\tag{3-447}$$

当引入粘滞性，开尔文模式受到阻息，其平均寿命为：

$$\tau=\frac{R^2}{\nu(l-1)(2l+1)},\tag{3-448}$$

式中假定运动粘滞系数 ν 是极小的。拉姆等(Lamb, 1881; 以及 Chandrasekhar, 1959)已考虑了粘滞性球体的振荡。张德拉塞卡等(Chandrasekhar 和Lebovitz, 1962, 1963 和1964; Chandrasekhar, 1964; Tassoul 和 Tassoul, 1967; Tassoul 和 Ostriker, 1968; Tassoul, 1968; 以及 Lebovitz 和 Russell, 1972)已给出了气体团径向振荡及非径向振荡的普遍公

式。例如，张德拉塞卡等(Chandrasekhar 和 Lebovitz, 1964)给出了多层气体球属于 $l=1$ 及 $l=2$ 阶的球谐函数的非径向振荡的基本频率。

3.5.15. 流体及等离子体中的不稳定性

处于热力学平衡的均匀等离子体是稳定的；而等离子体密度、温度、速度或磁场的非均匀性的引入可以引起不稳定性。分析不稳定性通常是假定起始平衡状态 φ_0 受到一个无限小的微扰：

$$\varphi_1 \propto \exp i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t), \tag{3-449}$$

式中 $\boldsymbol{k}$ 是波矢，ω 是频率。因此运动方程和守恒方程都是线性化的，并且假定有解 $\varphi=\varphi_0+\varphi_1$。从而得出 ω 与 $\boldsymbol{k}$ 之间的色散关系。若对于 $\boldsymbol{k}$ 的任何实数值 ω 具有正的虚部，这种等离子体就被说成是线性不稳定的。若所有可能的 ω 是实数或有负的虚部，则这种等离子体就被说成是稳定的。

当不可压缩流体的质量密度 ρ 分布不均匀时，它可以呈现出瑞利(Rayleigh, 1900)-泰勒(Taylor, 1950)不稳定性。对于两种垂直相邻的、处在流体静力学中的、无粘滞流体来说，若下层流体的密度为 ρ_1，上层流体的密度为 ρ_2，则色散关系为(Rayleigh, 1900)：

$$\omega^2=-gk\left(\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_2+\rho_1}\right), \tag{3-450}$$

式中 g 是引力加速度。若 $\rho_2<\rho_1$，状态是稳定的；而若 $\rho_2>\rho_1$，则对所有波数来说都是不稳定的。不过，若存在表面张力 T，对于足够短的波长来说，流体的结构是稳定的。在这种情况，对于处在 $0<k<k_0$ 的范围内的所有波数 k 来说，流体都是不稳定的，其中

$$k_0=\left[\frac{(\rho_2-\rho_1)}{T}g\right]^{1/2}。 \tag{3-451}$$

当存在强度为 B 的水平磁场时，具有下列有效表面张力 $T_{有效}$ (Kruskal 和 Schwarzschild, 1954)的流体，它的结构也是稳定的：

$$T_{有效}=\frac{\mu B^2}{2\pi k}\cos^2\theta, \tag{3-452}$$

式中 μ 是磁导率，θ 是在波矢与 B 方向之间的夹角。若流体以角速度 Ω 自转，色散关系成为(Hide, 1956; Chandrasekhar, 1961)：

$$\omega^2\left[1-\frac{4\Omega^2}{\omega^2}\right]^{1/2}=\omega_0^2, \tag{3-453}$$

式中 ω_0^2 是(3-450)式给出的 ω^2。所以，转动确定了 ω 的下限为 2Ω。

对于密度为 $\rho=\rho_0\exp(-z/H)$ 的分层介质，其中 H 是标高，当 H 为负值时就会出现瑞利-泰勒不稳定性，而当 H 为正值时就产生稳定的引力波。当无粘滞流体限制在 $z=0$ 及 $z=d$ 的两个刚体平面之间时，色散关系为(Rayleigh, 1960; Chandrasekhar, 1955)：

$$\frac{g}{H\omega^2}=1+\frac{[d^2/(4H^2)]+m^2\pi^2}{k^2d^2}, \tag{3-454}$$

式中 m 是整数。所以当密度梯度为 ∇N 时，我们得到，若

$$g\nabla N<0, \tag{3-455}$$

就会出现不稳定性，此时

$$\omega=\pm i(gH^{-1})^{1/2}, \tag{3-456}$$

式中

$$H^{-1}=-\frac{d}{dz}[\ln N]。\tag{3-457}$$

对于小于最小波数 $k_{\min}$:

$$k_{\min}^2=-\frac{4\Omega^2 H}{gd^2}\left[\frac{d^2}{4H^2}+\pi^2\right]\tag{3-458}$$

的所有波数 k，转动使这种结构稳定了，式中 Ω 是转动角速度，d 是层的厚度。

当等离子体粒子沿半径为 R 的弯曲磁力线运动时，流动产生的离心加速度

$$g\approx\frac{P}{\rho R},\tag{3-459}$$

其中假定了磁力线穿过的大气其密度为 ρ、压力为 P。对于理想的"槽纹模式"不稳定性，我们得到：

$$\omega^2\approx gH^{-1}\approx\frac{P}{\rho RH},\tag{3-460}$$

可以看出这与瑞利-泰勒不稳定性的色散关系是一样的。库尔斯拉德(Kulsrud, 1967)给出了交换不稳定性的近似色散关系式：

$$\omega^2=-\left[\frac{\gamma P}{U}\frac{dU}{dP}+1\right]\frac{P^2}{\rho U}\frac{dU}{dP},\tag{3-461}$$

其中假定气体压力 P 远小于磁压力 $B^2/(8\pi)$，以及量

$$U=\int\frac{dl}{B},$$

式中积分是沿磁场强度为 B 的磁力线进行。若

$$\frac{dP}{dU}>0,$$

就会发生不稳定，而若 (3-462)

$$\frac{d}{dP}[PU^\gamma]<0,$$

则是稳定的。这里 γ 是比热比。若两个等通量管形的流体交换要求等离子体的压缩比它的膨胀更厉害，则系统是稳定的。长谷川(Hasegawa, 1971)给出普遍的交换色散关系式为：

$$\frac{\omega_{ci}}{Hk_\perp}\left[\frac{1}{\omega+k_\perp g/\omega_{ci}}-\frac{1}{\omega}\right]=1-\frac{M_i}{M_e}\left[\frac{k_{/\!/}\omega_{ci}}{k_\perp\omega}\right]^2,\tag{3-463}$$

式中引力加速度 g 取作模拟离心力，是由于粒子平行于弯曲磁力线的运动而产生的；$k_\perp$ 及 $k_{/\!/}$ 分别表示垂直于磁场方向的两个正交的波矢。下标 i 及 e 分别表示离子及电子，荷电为 Z_je 的第 i 种粒子的回旋频率 ω_{cj} 为：

$$\omega_{cj}=\frac{Z_jeB}{M_jc}。\tag{3-464}$$

对于槽纹模式，$k_{/\!/}=0$，(3-463)式就变成(3-460)式。不过，当 $k_{/\!/}\neq 0$ 时，只要

$$Rk_{/\!/}>2\left(\frac{M_e}{M_i}\right)^{1/2},\tag{3-465}$$

则任何大小的微扰引起的不稳定性都能加以稳定化，上式中 R 是磁力线的曲率半径。

即使没有引力场的作用，对于平行相速度在电子的热速度与离子的热速度之间的波来说，具有密度梯度的等离子体将会是不稳定的。这种漂移波不稳定性的频率即为漂移波频率(Moiseev 和 Sagdeev, 1963; Hasegawa, 1971)：

$$\omega=\frac{v_{T_e}^2k_{/\!/}}{H\omega_{ce}}\tag{3-466}$$

当
$$v_{T_e} > \frac{\omega}{k_{/\!/}} > v_{T_i},$$
式中 H 是(3-457)式所给出的标高，v_T 是热速度。

当考虑密度及剪切流两者的不均匀性时，即使 $\rho_2 < \rho_1$，还是有可能看到两种流体之间的不稳定性。若 $v_1 - v_2 = v$ 表示在两种流体之间的相对速度，则对所有波数

$$k > \frac{g(\rho_2 - \rho_1)(\rho_1 + \rho_2)}{\rho_1 \rho_2 (v_1 - v_2)^2 \cos^2 \varphi} \tag{3-467}$$

来说，就会出现开尔文(Kelvin, 1910)-亥姆霍兹(Helmholtz, 1868)不稳定性，式中 φ 是 $\boldsymbol{k}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 之间的夹角。若

$$(v_1 - v_2)^2 < \frac{2(\rho_1 + \rho_2)}{\rho_1 \rho_2} [Tg(\rho_1 - \rho_2)]^{1/2}, \tag{3-468}$$

表面张力 T 将抑制不稳定性。若以(3-452)式所给出的 $T_{有效}$ 替代 T 而不等式(3-468)成立的话，则强度为 B 的磁场也将抑制不稳定性。

由于 E 垂直 H 的漂移引起的剪切流，在等离子体中存在静电开尔文-亥姆霍兹不稳定性。对于平行于强度为 B 的均匀磁场、厚度为 $2a$ 的电子层，色散关系成为：

$$\frac{4\omega^2}{\omega_0^2} = \left[1 - \frac{2kv_0}{\omega_0}\right]^2 - \exp[-4ka], \tag{3-469}$$

式中
$$\omega_0 = 4\pi e c N/B = \omega_{pe}^2/\omega_{ce},$$
剪切速度 v_0 由下式给出：
$$v_0 = E(a)/B,$$
式中 ω_{ce} 及 ω_{pe} 分别由(3-464)式及(3-471)式给出，$E(a)$ 是在点 a 的电场强度。对于满足不等式

$$ka \lesssim 0.7 \tag{3-470}$$

的所有波数 k 的波，都变得不稳定，上式足以使(3-469)式的右边成为负值。

如同在第1.32节中所给出的，一种粒子 j 组成的热平衡等离子体的基本振荡频率 ω_{pj} 由下式给出(Tonks 和 Langmuir, 1929)：

$$\omega_{pj} = \left[\frac{4\pi e^2 Z_j^2 N_j}{M_j}\right]^{1/2}, \tag{3-471}$$

式中 eZ_j 是粒子电荷，M_j 是质量，N_j 是体密度。在没有碰撞的情况下，这些振荡会被阻息，其阻尼常数(Londau, 1946)为：

$$d(\omega) \approx -\omega_{pj} \sqrt{\frac{\pi}{8}} \left(\frac{\omega_{pj}}{kv_T}\right)^3 \exp\left(-\frac{\omega^2}{2k^2 v_T^2}\right), \tag{3-472}$$

式中 d 表示圆括弧中的项的虚部，k 是扰动波数，v_T 是均方根热速度。玻姆等(Bohm 和 Gross, 1949)指出上面所描述的阻尼的物理机制是由于以接近波的相速运动的粒子所产生的电场引起的陷获，随之发生粒子与等离子体振荡之间能量的交换。

由线性化的玻耳兹曼方程可知，等离子体的普遍色散关系为(Vlasov, 1945; Landau, 1946; Bohm 和 Gross, 1949)：

$$1 - \frac{\omega_{pj}^2}{k^2} \int \frac{\partial f_0/\partial v}{v - (\omega/k)} dv = 0, \tag{3-473}$$

式中 $f_0(v)$ 是速度 v 的平衡(未微扰的)分布函数。若 $f_0(v)$ 只有一个峰，则可以证明(Jackson, 1960)振荡只能是阻尼振荡。在麦克斯韦分布情况下，色散关系为：

$$\omega^2 \simeq \omega_{pj}^2 \left[1+\frac{3k^2 v_T^2}{\omega_{pj}^2}\right], \tag{3-474}$$

而阻尼常数由(3-472)式给出。不过，若速度分布具有双峰，则阻尼振荡、稳态振荡或越来越强的振荡都是可能的。例如，对于速度为 $\boldsymbol{v}_j$ 的第 j 射束的等离子体，纵向振荡的色散关系成为(Bailey, 1948; Pierce, 1948)：

$$1=\sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{(\omega-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_j)^2}, \tag{3-475}$$

式中等离子体频率 ω_{pj} 由(3-471)式给出。对于稳定等离子体中速度为 v_s 的束流，色散关系成为：

$$1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}-\frac{\omega_{ps}^2}{(\omega-kv_s)^2}=0, \tag{3-476}$$

式中 ω_p 及 ω_{ps} 分别表示等离子体频率及川流的等离子体频率。当川流($\omega<kv_s$)的负能量波与等离子体的正能量波耦合时，就会发生"双流"不稳定性。对于弱耦合，可能有色散关系为 $\omega=kv_s\pm\omega_{ps}$ 及 $\omega=\pm\omega_p$ 的四种波，斯特罗克(Sturrock, 1958)给出了这些情况的稳定振荡及不稳定振荡的详情。若

$$\frac{\omega}{v_s}\approx k \lesssim \frac{\omega_p}{v_s}, \tag{3-477}$$

对所有波数 k，我们可以得到不稳定性的振荡和越来越强的振荡。若 kv_s 并不趋近于 ω_p，这种不稳定性的增长率就由下式给出：

$$d(\omega)=\frac{\omega_{ps}kv_s}{(\omega_p^2-k^2v_s^2)^{1/2}}。 \tag{3-478}$$

对于由相同密度但具有大小相等、方向相反的速度 v_s 的两股电子流组成的电子等离子体，当

$$k \leqslant 0.5\frac{\omega_p}{v_T}\approx\sqrt{2}\frac{\omega_p}{v_s}, \tag{3-479}$$

就会出现越来越强的振荡。上式中 v_T 是川流的热速度，而波频率 $\omega=kv_s$。对于相对论性川流来说，在等离子体频率的方程中所要用到的质量相应地为：

$$M=\gamma^3 M_0, \tag{3-480}$$

式中 M_0 是静质量，$\gamma=(1-v_s^2/c^2)^{-1/2}$。若等离子体不是冷的，只要等离子体的热速度 v_T 远小于川流的速度，上面讨论的双流不稳定性还会发生。不过，在这种情况下，等离子体波的增强是伴随有速度分布的平坦化及在下列时间内川流失去其全等性(Zheleznyakov 和 Zaitsev, 1970)：

$$\tau=\frac{N_p}{N_s}\left(\frac{\Delta v_s}{v_s}\right)^2\frac{1}{\omega_p}, \tag{3-481}$$

式中 N_s、v_s 及 Δv_s 分别表示川流的粒子密度、速度及速度弥散度，N_p 及 ω_p 分别表示等离子体的密度及等离子体频率。

布尼曼等(Buneman, 1958, 1959; 以及 Jackson, 1960)已讨论了电子-离子等离子体的色散方程，并且导出了色散方程的普遍形式：

$$1-\frac{\omega_{pe}^2}{k^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial f_{0e}/\partial v\,dv}{v-(\omega/k)}-\frac{\omega_{pi}^2}{k^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial f_{0i}/\partial v\,dv}{v-(\omega/k)}=0, \tag{3-482}$$

式中下标 e 及 i 分别表示电子及离子。对于电子及离子的热速度分别为 v_{T_e} 及 v_{T_i} 的麦克斯韦分布来说，当波数 k 为：

$$k \lesssim \sqrt{2}\left[1+\left(\frac{M_e}{M_i}\right)^{1/2}\right]\frac{\omega_{pe}}{v} \tag{3-483}$$

时，就会出现越来越强的振荡，式中速度差 $v=v_e-v_i$ 是电子与离子的平均速度之差，并且假定该差值较大。当离子流经过冷电子区，或者当电子流经过电子区时，(3-483)式分别化成(3-477)式或(3-479)式。不过，当电子相对于冷离子作热运动时，色散关系式的实部化成：

$$\omega = ks_i \quad (当\ \omega \ll \omega_{pi}), \tag{3-484}$$

式中离子声速 s_i 由下式给出：

$$s_i = v_{T_e}\left(\frac{M_e}{M_i}\right)^{1/2}。$$

由色散关系(3-484)式所表示的波称为离子声波，在下列情况下就会出现不稳定振荡(Hasegawa, 1971)：

$$v_D > s_i \quad (当\ \omega \lesssim \omega_{pi})$$

以及 (3-485)

$$\frac{\partial f_{0e}}{\partial v} > 0 \quad (当\ \omega \sim \omega_{pe}),$$

式中 v_D 是电子漂移速度，f_{0e} 是未微扰电子的速度分布函数。

当存在强度为 B 的磁场时，就象前面讨论过的静电不稳定性一样，速度各向异性就会导致电磁不稳定性。对于冷等离子体，其中所出现的速度为 v_j 的第 j 束流，它的色散关系为：

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{1}{c^2}\sum_j \frac{\omega_{pj}^2\omega}{\omega + kv_j + \omega_{cj}}, \tag{3-486}$$

式中第 j 种粒子的回旋频率 ω_{cj} 由(3-464)式给出，等离子体频率 ω_{pj} 由(3-471)式给出。对于冷离子及漂移电子，色散关系化成(Hasegawa, 1971)：

$$k^2c^2 - \omega^2 + \omega_{pe}^2\frac{\omega - kv_D}{\omega - kv_D + \omega_{ce}} + \omega_{ci}^2\frac{\omega}{\omega - \omega_{ci}} = 0, \tag{3-487}$$

式中 v_D 是电子漂移速度，下标 e 及 i 分别表示电子及离子。满足这种色散关系的波称为离子回旋波，并且，当 $\omega \approx \omega_{ci}$ 或 $\omega \approx 0$ 时，它们就变得不稳定了。

压力 P 的各向异性也象密度或速度的各向异性一样会导致不稳定性。当存在磁场并且碰撞效应可以忽略时，沿磁场方向的粒子压力 $P_{/\!/}$ 及垂直磁场方向的粒子压力 $P_\perp$ 彼此不会耦合，这就可能出现稳定性。若 $f_j(v)$ 是第 j 种粒子的速度分布函数

$$P_{/\!/} = \sum M_j\int v_{/\!/}^2 f_j(v)\,d^3v$$

及 (3-488)

$$P_\perp = \sum M_j\int v_\perp^2 f_j(v)\,d^3v,$$

式中求和是对所有粒子的种类进行。如果我们令 $\beta = 8\pi P/B^2$ 表示一种等离子体粒子的压力与磁场压力之比，则在低频($\omega \ll \omega_{ci}$)及长波($kv_{Ti} \ll \omega_{ci}$)时，色散关系就成为(Kutsenko 和 Stepanov, 1960)：当 $\langle v_{/\!/}\rangle = 0$，

$$\frac{\omega^2}{k_{/\!/}^2 v_A^2} = 1 - \sum_{粒子种类}\frac{1}{2}(\beta_{/\!/} - \beta_\perp); \tag{3-489}$$

当 $\omega \ll kv_A$，

$$k_{/\!/}^2\left[1+\sum_{粒子种类}\frac{\beta_\perp - \beta_{/\!/}}{2}\right] + k_\perp^2\left[1+\sum_{粒子种类}\beta_\perp\left(1-\frac{\beta_\perp}{\beta_{/\!/}}\right) - i\frac{\beta_{\perp i}^2}{\beta_{/\!/ i}}\frac{\omega}{k_{/\!/}\langle v_{/\!/ i}\rangle}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}\right] = 0, \tag{3-490}$$

式中下标 $/\!/$ 及 $\perp$ 同样分别表示与磁场平行或垂直的方向，下标 i 表示离子分量，v_A 是阿耳文速度。当 $k \gg k_\perp$ 时，阿耳文波沿(平行于)磁力线传播，当

$$1+\sum_i \frac{\beta_{\perp i}-\beta_{/\!/ i}}{2}<0 \tag{3-491}$$

或

$$P_{/\!/}>P_\perp+\frac{B^2}{4\pi}$$

时，波是不稳定的。这种"水龙管"式不稳定性对于剪切模式(平行于磁场的分量没有变化，即(3-489)式)及压缩模式(平行于磁场的分量($k_{/\!/}>k_\perp$)有变化，即(3-490)式)两者都会发生。当几乎是垂直传播时($k_{/\!/} \ll k_\perp$)，压缩模式允许在

$$1+\sum_i \beta_{\perp i}\left(1-\frac{\beta_{\perp i}}{\beta_{/\!/ i}}\right)<0$$

或

$$\frac{P_\perp^2}{P_{/\!/}}>P_\perp+\frac{B^2}{8\pi} \tag{3-492}$$

的情况下，出现"镜"式不稳定性。

在太阳耀斑理论中特别重要的是"撕裂"不稳定性，这在两种极性相反的磁场彼此迎面运动并且重新接起来时就会发生。设强度为 B 的磁场引入厚度为 δ、沿磁力线长度为 L 的区域，磁场向外的扩散为向内流动的等离子体所平衡。设 v 表示等离子体速度，则我们得到(Sweet, 1958; Parker, 1963; Furth, Kileen 和 Rosenbluth, 1963)：

$$v=(4\pi\delta\sigma/c^2)^{-1}, \tag{3-493}$$

式中 σ 是电导率，物质被挤压出该区域的阿耳文速度为：

$$v_A=\frac{B}{(4\pi\rho)^{1/2}}。 \tag{3-494}$$

为了得到不稳定性寿命

$$\tau \approx \frac{L}{v}=\frac{LR_m^{1/2}}{v_A}, \tag{3-495}$$

因此物质流的连续性要求

$$vL=v_A\delta, \tag{3-496}$$

式中磁雷诺数为：

$$R_m=\left(\frac{L}{\delta}\right)^2=\left(\frac{v_A}{v}\right)^2=\frac{4\pi L\sigma v_A}{c^2}。 \tag{3-497}$$

佩茨切克(Petschek, 1964)考虑了再连接的几何结构与外部环境的匹配，得到了再连接率马赫数 M：

$$M=\frac{v}{v_A}=\frac{\pi}{4}\,\frac{1}{\ln[2M^2R_m]}。 \tag{3-498}$$

一般说来，

$$R_m^{-1/2} \lesssim \frac{v}{v_A} \lesssim 1。 \tag{3-499}$$

在这种情况下，通量湮没的时间尺度 τ 为：

$$\tau=\frac{L}{v}=\frac{4L}{\pi v_A}\ln\left[2R_m\left(\frac{L}{v_A\tau}\right)^2\right]。 \tag{3-500}$$

如同戈尔德等(Gold 和 Hoyle, 1960)所强调的，太阳耀斑的能量一定来自所释放的磁能 $(\Delta B)^2/8\pi$，这种磁能的释放应在上面讨论的磁场湮没-再连接机制中发生。斯特罗克

(Sturrock, 1966)已提出一种耀斑机制，这种机制把佩茨切克的湮没模型具体用于磁回路的开场区域。

最广泛研究过的不稳定性之一是箍缩不稳定性，这是轴向电流在具有轴向磁场的等离子体柱中流过时产生横向磁场使气体箍缩(Tayler, 1957; Kruskal 和 Tuck, 1958; Chandrasekhar, Kaufman 和 Watson, 1958)。设 B_z 表示在等离子体柱中轴向磁场的强度，B_θ 表示横向磁场的强度，则当

$$B_\theta^2 > 2B_z^2 \tag{3-501}$$

时，就会出现不稳定性，并且当

$$B_\theta^2 \ln\left(\frac{L}{R}\right) > B_z^2 \tag{3-502}$$

时，等离子体柱形成香肠形，即半径为 R、长度为 L 的整段等离子体柱会被扭结或被折曲，而当

$$B_\theta > \frac{2\pi R}{L} B_z, \tag{3-503}$$

等离子体柱会被加倍地折曲而形成螺旋形状。

第四章　核天体物理学与高能粒子

4.1. 早期发现的基本粒子、符号及定义

4.1.1. 电子、质子、中子、光子以及它们的反粒子

约在汤姆孙(Thomson, 1897)发现所有原子都发射电子的同时，伦琴(Röntgen, 1896)观测到了称为X射线的能量范围在1～500千电子伏的光子。继之而来维拉德(Villard, 1900)观测到了能量大于500千电子伏的光子，称为伽马(γ)射线。后来爱因斯坦(Einstein, 1905)提出：一个能量为$h\nu$及零质量的光子是个频率为ν的电磁波，反过来也是一样。接着卢瑟福(Rutherford, 1911, 1914)引进物质的原子核理论，他提出原子的半径约为10^{-8}厘米，它实际上是由围绕着荷正电的原子核的一群电子组成的，原子核的半径小于10^{-12}厘米。随后卢瑟福等(Rutherford 和 Chadwick, 1921)发现质子，进一步证实了原子核包含荷正电粒子的推测。以后查德威克等发现中子(Chadwick, 1932; Curie 和 Joliot, 1932)，海森堡(Heisenberg, 1932)提出原子核除包含质子外还包含中性的中子。约在同时，宇宙线的研究导致了正电子的发现(Anderson, 1932)，正电子与电子的差别只是在于它的电荷为正。虽然在理论上预期质子及中子会有类似的反粒子，但直到大型加速器出现后才观测到这种反粒子(Chamberlian 等, 1955)。这些早期的基本粒子的性质列于表37。

4.1.2. 符号、命名法及单位

一个原子核由下列各数所确定：

$$\left.\begin{aligned}\text{原子序数} &= Z = \text{质子数目},\\ \text{中子数} &= N = \text{中子数目},\\ \text{质量数} &= A = N+Z = \text{核子数目},\\ \text{同位素数} &= N-Z = A-2Z。\end{aligned}\right\} \tag{4-1}$$

利用下列关系式能够从原子质量$M_{A,Z}$算出原子核质量$M_{核}$(Fermi, 1928; Thomas, 1927)：

$$M_{核} = M_{A,Z} - {}^{*}5.4858026\times10^{-4}Z + 1.67475\times10^{-8}Z^{7/3}\ \text{原子质量单位}, \tag{4-2}$$

式中Z是原子核的原子序数。(4-2)式右边第二项是对电子质量的修正，最后一项代表$15.6Z^{7/3}$电子伏的费密-托马斯(Fermi-Thomas)结合能。质量数A是最靠近精确质量值M(以原子质量单位表示)的整数。

对原子核中具有某些相同Z、N及A值者已给定了专门名称：

$$\left.\begin{aligned}\text{同位素} &= Z\ \text{相同、}N\ \text{不同},\\ \text{同中子异荷素} &= N\text{相同、}Z\ \text{不同},\\ \text{同量异位素} &= A\ \text{相同而}\ N\text{、}Z\ \text{不同},\\ \text{同质异能素} &= A\ \text{相同、}Z\ \text{相同}。\end{aligned}\right\} \tag{4-3}$$

原子核中未受激原子核用符号(Z, A)，而受激原子核用符号$(Z, A)^{*}$。

一个粒子a与一个原子核X相互作用以产生一个原子核Y及一个新粒子b的反应标示为：

表 37 电子、质子、中子、光子以及它们的反粒子的性质[1]

粒子	符号	静质量(克)	(原子质量单位)	(兆电子伏/c^2)
负电子或电子	β^- 或 e^-	9.109558(54)$E-28$	5.485930(34)$E-4$	0.5110041(16)
正电子	β^+ 或 e^+	9.109558(54)$E-28$	5.485930(34)$E-4$	0.5110041(16)
质子	p	1.672614(11)$E-24$	1.00727661(8)	938.2592(52)
反质子	$\bar{p}$	1.672614(11)$E-24$	1.00727661(8)	938.2592(52)
中子	n	1.674920(11)$E-24$	1.00866520(10)	939.5527(52)
反中子	$\bar{n}$	1.674920(11)$E-24$	1.00866520(10)	939.5527(52)
光子	γ	0.0	0.0	0.0

粒子	电荷(静电单位)	自旋	磁矩[2]	平均寿命(秒)
负电子或电子	$-4.803250(21)E-10$	1/2	1.0011596577(35)μ_B	∞
正电子	$+4.803250(21)E-10$	1/2	1.0011596577(35)μ_B	∞
质子	$+4.803250(21)E-10$	1/2	2.792782(17)μ_N	∞
反质子	$-4.803250(21)E-10$	1/2	2.792782(17)μ_N	∞
中子	0.0	1/2	$-1.913148(66)\mu_N$	9.35(14)$E+2$[3]
反中子	0.0	1/2	$-1.913148(66)\mu_N$	
光子	0.0	1	0.0	∞

[1] 在每一个引用值后面圆括号内的数字表示所引用值最后两位的标准偏差。表中的值取自泰勒(Taylor 等, 1969; 以及 Söding 等, 1972)的文章。符号 $E-n$ 意指 10^{-n}, 其中 n 是一个整数。质量转换因子是 1 克 = *5.609545(16)$E+26$ 兆电子伏及 1 原子质量单位 = *931.5016(26) 兆电子伏。

[2] 玻尔磁子 μ_B = *9.274078(36)$E-21$ 尔格·高斯$^{-1}$ = *0.5788379(21)$E-14$ 兆电子伏·高斯$^{-1}$, 以及核磁子 μ_N = *5.050824(20)$E-24$ 尔格·高斯$^{-1}$ = *3.152452(03)$E-18$ 兆电子伏·高斯$^{-1}$。

[3] 中子平均寿命 $9.35\pm0.14\times10^2$ 秒相当于半衰期 10.61 ± 0.16 分钟(参看 Christensen 等, 1967 的文章)。

$$a+\mathrm{X}\to\mathrm{Y}+b+Q \quad \text{或} \quad \mathrm{X}(a,\ b)\mathrm{Y}, \tag{4-4}$$

式中 Q 是在反应过程中释放出的能量。一个元素 B 用下列符号表示:

$$_Z\mathrm{B}^A_N \text{ 或 } ^A_N\mathrm{B} \text{ 或 } ^A\mathrm{B}, \tag{4-5}$$

式中 A 是质量数, Z 是原子序数, N 是中子数。出现在一次反应的圆括号内的元素给予下列符号:

$$\mathrm{H}^1 \text{ 用 } p,\ \mathrm{H}^2 \text{ 用 D},\ \mathrm{H}^3 \text{ 用 T},\ \mathrm{He}^3 \text{ 用 } \tau,\ \mathrm{He}^4 \text{ 用 } \alpha。 \tag{4-6}$$

象 π 介子这样的基本粒子, 有正的(+)、负的(−)或中性的(0)电荷, 我们用符号[1)]:

$$\pi^+、\pi^- \text{ 或 } \pi^0 \tag{4-7}$$

表示。一个反粒子用上面加一横划表示, 例如反 μ 子用 $\bar{\mu}$ 表示。

用于原子核天体物理学的典型单位是:

$$\left.\begin{aligned}
&1\text{靶(恩)} &&= 10^{-24}\ \text{厘米}^2,\\
&1\text{原子质量单位} &&= {}^*931.5016(26)\ \text{兆电子伏}/c^2\\
& &&= {}^*1.6605655(86)\times10^{-24}\ \text{克},\\
&1\text{兆电子伏} &&= {}^*1.6021892(46)\times10^{-6}\ \text{尔格},\\
&1\text{费密} &&= 10^{-13}\ \text{厘米},\\
&\text{玻耳兹曼常数}\ k &&= {}^*8.617347(27)\times10^{-11}\ \text{兆电子伏}\cdot\text{开}^{-1}\\
& &&= {}^*1.380662(44)\times10^{-16}\ \text{尔格}\cdot\text{开}^{-1},\\
&\text{普朗克常数}\ \hbar &&= {}^*1.0545887(57)\times10^{-27}\ \text{尔格}\cdot\text{秒}\\
& &&= {}^*0.6582173(17)\times10^{-21}\ \text{兆电子伏}\cdot\text{秒}。
\end{aligned}\right\} \tag{4-8}$$

1) 原文符号为 μ^+、μ^- 或 μ^0, 因 μ 子无 μ^0, 故原文不妥, 改用 π^+、π^- 或 π^0。——译者注

物理常数值取自[1]泰勒等(Taylor, Parker 和 Langenberg, 1969)的值，在括号中的数字相当于一种标准偏差的不确定度，即所引用值的最后两位数字的不确定度。

4.1.3. 结合能、质量亏损、质量盈余、原子质量、质量分数、敛集率、能量释出、幻数及质量定律

由于原子质量与原子组分质量所造成的能量之差就是原子核与电子的结合能 E_B。

$$E_B(A, Z)=c^2[ZM_{\rm H}+(A-Z)M_N-M_{AZ}]$$
$$=c^2[ZM_p+(A-Z)M_n-M_{核}]=c^2\Delta M, \qquad (4\text{–}9)$$

式中光速 $c={}^*2.99792458(1.2)\times10^{10}$ 厘米·秒$^{-1}$，Z 是原子序数，A 是质量数，ΔM 是质量亏损，$M_{\rm H}$ 是中性氢原子的质量，M_n 和 M_p 分别是中子及质子的质量，M_{AZ} 及 $M_{核}$ 分别是中性原子及原子核的质量。当采用半经验质量定律时，结合能由(4–19)式给出。把一个中子移到无穷远处所需的离解能 S_N 可根据爱因斯坦(1905, 1906, 1907)质能相当性得出，并由下式给出：

$$S_N=[M_{A-1,Z}+M_N-M_{A,Z}]c^2。 \qquad (4\text{–}10)$$

原子质量盈余 ΔM_{AZ} 为：

$$\Delta M_{AZ}=(M_{AZ}-A)\times1\ 原子质量单位={}^*931.5016(M_{AZ}-A)\ 兆电子伏, \qquad (4\text{–}11)$$

式中原子质量 M_{AZ} 以原子质量单位给出，A 是质量数。原子核质量由下式给出：

$$M_{核}=A+\Delta M_{AZ}-{}^*5.4858026\times10^{-4}Z+1.67475\times10^{-8}Z^{7/3}\ 原子质量单位, \qquad (4\text{–}12)$$

式中 Z 是原子序数。原子质量盈余的值列于表 38。利用(4–9)式至(4–12)式可以根据原子质量盈余算出原子核的质量、结合能与分离能。

原子质量可以利用这些质量盈余及(4–11)式算出。一些经常用到的原子质量是：

$$\begin{aligned}A_{\rm N}&=1.008665\ 原子质量单位;\\A_{\rm H}&=1.007825\ 原子质量单位;\\A_{\rm D}&=2.014102\ 原子质量单位;\\A_{\rm T}&=3.016050\ 原子质量单位;\\A_{\rm He^3}&=3.016030\ 原子质量单位;\\A_{\rm He^4}&=4.002603\ 原子质量单位,\end{aligned} \qquad (4\text{–}13)$$

式中符号 A_i 是用来表示元素 i 的原子质量。

为了描述在质量密度为 ρ 的气体中一种给定的元素 i 的丰度，常常用到质量分数 X_i：

$$X_i=\frac{A_iN_i}{\rho N_A}, \qquad (4\text{–}14)$$

式中 A_i 是以原子质量单位表示的质量，N_i 是元素 i 的数密度，阿伏伽德罗数

$$N_A={}^*6.022045(31)\times10^{23}\ 摩尔^{-1}。$$

敛集率 f 为：

$$f=(M_{AZ}-A)/A, \qquad (4\text{–}15)$$

式中 M_{AZ} 是具有质量数为 A 及原子序数为 Z 的原子的原子质量。

在反应 $a+X\rightarrow b+Y+d+Q$ 中的能量释出 Q 可根据爱因斯坦的(Einstein, 1905, 1906, 1907)能量 E 与质量 M 的关系式 $E=Mc^2$ 得出，并由下式给出：

1) 国际科学协会科学技术数据委员会已正式采用基本常数最新数值，并刊载于 *J. Phys. Chem. Ref. Data* (物理化学参考数据资料杂志)第 2 卷第 4 期第 741 页(1973 年)，本书的物理常数，已改用最新数值。—— 译者注

表 38 元素的原子序数 Z、质量数 A、实测原子质量盈余、同位素生成类型、太阳系丰度及中子俘获截面。实测原子质量盈余已归一化到 $C^{12}=0.000$ 取 1 原子质量单位 =*931.5016 兆电子伏/c^2，数据取自韦普斯特拉等(Wapstra 和 Gove, 1971)。质量盈余值的标准误差小于最右边一位数字的 10 倍，元素生成类型用下列符号表示：C 表示爆发性碳燃烧、E 表示原子核统计平衡、H 表示氢燃烧、He 表示氦燃烧、N 表示新星爆发、O 表示爆发性氧燃烧、P 表示富质子核素、R 表示快中子俘获、S 表示慢中子俘获、Si 表示爆发性硅燃烧、U 表示宇宙核合成以及 X 表示宇宙线散裂。生成类型及太阳系丰度取自卡梅伦(A. G. W. Cameron, 1973 年私人通信)。丰度数据已归一化到硅 $=10^6$，主要取自梅森 (B. Mason) 的«陨星元素丰度手册»(Handbook of elemental abundances in meteorites, Gordon 和 Breach, New York, 1971)一书及威思布鲁 (G. L. Withbroe) 的«太阳光球及日冕的化学组成»一文[见«关于太阳物理、原子光谱及气体星云的门泽尔学术讨论会文集»(Menzel Symposium on Solar Physics, Atomic Spectra, and Gaseous Nebulae, Nat. Bur. of Stands.-Wash. Pub. No. 353, 127, 1971)]。中子俘获截面是在 30 千电子伏测定的麦克斯韦平均截面($T=3.48\times10^8$ 开)，取自艾伦等 (Allen, Gibbons 和 Macklin, 1971) 的文章。带有角标¹ 的截面值是半经验估计，而在圆括号内的值是不确定的实验值

Z	元素	A	盈余 (兆电子伏)	类型	丰度	截面 (毫靶)
0	N	1	8.07169			
1	H				3.18×10^{10}	
		1	7.28922		3.18×10^{10}	
		2	13.13627	P	5.2×10^{5}	
		3	14.95038			
		4	25.9			
		5	33.8			
2	He				2.21×10^{9}	
		3	14.93173	H, P	$\sim3.7\times10^{5}$	
		4	2.42494	U, H	2.21×10^{9}	
		5	11.39			
		6	17.5973			
		7	26.111			
		8	31.65			
3	Li				49.5	
		4	25.13			
		5	11.68			
		6	14.0875	X	3.67	
		7	14.9086	P	45.8	
		8	20.9475			
		9	24.966			
		10	35.3			
		11	43.3			
4	Be				0.81	
		6	18.375			
		7	15.7703			
		8	4.9418			
		9	11.3484	X	0.81	
		10	12.6081			
		11	20.177			
		12	25.0			
		13	35.7			

（续表）

Z	元素	A	盈余（兆电子伏）	类型	丰度	截面（毫靶）
5	B				350.0	
		7	27.94			
		8	22.9223			
		9	12.4157			
		10	12.0523	P	68.7	
		11	8.66795	P	281.3	
		12	13.3704			
		13	16.562			
		14	24.2			
		15	29.4			
6	C				1.18×10^{7}	0.2 ± 0.4
		9	28.912			
		10	15.7027			
		11	10.6502			
		12	0.00000	He	1.17×10^{7}	
		13	3.12527	N	1.31×10^{5}	
		14	3.01995			
		15	9.8735			
		16	13.693			
		17	17.6			
7	N				3.74×10^{6}	
		11	25.5			
		12	17.344			
		13	5.3457			
		14	2.86382	H	3.63×10^{6}	
		15	0.1018	N	1.33×10^{4}	
		16	5.6835			
		17	7.871			
		18	13.274			
		19	16.4			
8	O				2.15×10^{7}	
		13	23.106			
		14	8.00859			
		15	2.8611			
		16	−4.73668	He	2.14×10^{7}	
		17	−0.8074	N	8,040	
		18	−0.78250	N, He	4.38×10^{4}	
		19	3.3323			
		20	3.800			
		21	10.7			
9	F				2,450	5.6 ± 0.4
		15	17.7			
		16	10.693			
		17	1.9518			
		18	0.8728			
		19	−1.4861	P	2,450	
		20	−0.0157			
		21	−0.046			
		22	2.828			

(续表)

Z	元素	A	盈余（兆电子伏）	类型	丰度	截面（毫靶）
10	Ne				3.44×10^{6}	
		17	16.48			
		18	5.319			
		19	1.7521			
		20	−7.0417	C	3.06×10^{6}	
		21	−5.7312	He, N	9,290	
		22	−8.0251	He, N	3.73×10^{5}	
		23	−5.1500			
		24	−5.948			
11	Na				6.0×10^{4}	
		19	12.98			
		20	6.84			
		21	−2.183			
		22	−5.1829			
		23	−9.5290	C	6.0×10^{4}	2.7±0.4
		24	−8.4167			
		25	−9.356			
		26	−7.51			
		27	−6.6			
12	Mg				1.061×10^{6}	4.0±1.0
		20	17.5			
		21	10.911			
		22	−0.384			
		23	−5.4724			
		24	−13.9313	C	8.35×10^{5}	
		25	−13.1915	C	1.07×10^{5}	
		26	−16.2134	C	1.19×10^{5}	
		27	−14.5847			
		28	−15.0170			
13	Al				8.5×10^{4}	
		22	18.0			
		23	6.77			
		24	−0.049			
		25	−8.9123			
		26	−12.2088			
		27	−17.1950	C	8.5×10^{4}	4.6±0.8
		28	−16.8488			
		29	−18.213			
		30	−15.89			
14	Si				1.00×10^{6}	3.8±1.0
		24	10.8			
		25	3.82			
		26	−7.147			
		27	−12.3854			
		28	−21.4911	O, Si	9.22×10^{5}	3.8±1.0
		29	−21.8933	O	4.70×10^{4}	10.4[1]
		30	−24.4313	O	3.09×10^{4}	(1.9)
		31	−22.9479			
		32	−24.091			

（续表）

Z	元素	A	盈余（兆电子伏）	类	丰度	截面（毫靶）
15	P				9,600	
		27	0.2			
		28	− 7.154			
		29	−16.950			
		30	−20.2039			
		31	−24.4396	O	9,600	(7)
		32	−24.3024			
		33	−26.3370			
		34	−24.83			
16	S				5.0×10^5	3.0±0.6
		29	− 3.2			
		30	−14.065			
		31	−18.998			
		32	−26.0143	O, Si	4.75×10^5	3.0±0.6
		33	−26.5860	O, Si	3,800	
		34	−29.9292	O, Si	2.11×10^4	
		35	−28.8456			
		36	−30.6659	C, R	68	
		37	−26.907			
		38	−26.863			
17	Cl				5,700	11±4
		31	− 7.2			
		32	−13.263			
		33	−21.0024			
		34	−24.4384			
		35	−29.0130	O, Si	4,310	13.5±5
		36	−29.5218			
		37	−31.7615	O, Si	1,390	(3)
		38	−29.800			
		39	−29.802			
		40	−27.5			
18	Ar				1.172×10^5	
		33	− 9.4			
		34	−18.395			
		35	−23.0494			
		36	−30.2305	O, Si	9.87×10^4	
		37	−30.9474			
		38	−34.7144	O, Si	1.85×10^4	
		39	−33.240			
		40	−35.0392	C, R	~20?	(4.5)
		41	−33.0661			
		42	−34.42			
19	K				4,200	16±2
		35	−11.2			
		36	−17.317			
		37	−24.7984			
		38	−28.792			
		39	−33.8053	O, Si	3,910	16±2

（续表）

Z	元素	A	盈余（兆电子伏）	类型	丰度	截面（毫靶）
19	K	40	−33.5341	O, R	5.76	
		41	−35.5583	O, Si	289	22±3
		42	−35.0214			
		43	−36.582			
		44	−35.801			
		45	−36.611			
		46	−35.426			
		47	−35.704			
20	Ca				7.21×10^4	10±1
		37	−13.23			
		38	−22.023			
		39	−27.283			
		40	−34.8457	O, Si	6.99×10^4	
		41	−35.1371			
		42	−38.5381	O, Si	461	
		43	−38.3990	C	105	
		44	−41.4636	O, Si	1,490	
		45	−40.8063			
		46	−43.138	C, R	2.38	
		47	−42.343			
		48	−44.222	C, R	133	
		49	−41.292			
		50	−39.578			
21	Sc				35	
		40	−20.521			
		41	−28.641			
		42	−32.1070			
		43	−36.1790			
		44	−37.814			
		45	−41.0631	C	35	44±6
		46	−41.7584			
		47	−44.3289			
		48	−44.495			
		49	−46.552			
		50	−44.545			
		51	−43.227			
22	Ti				2,775	20±
		42	−25.121			
		43	−29.320			
		44	−37.548			
		45	−39.0007			
		46	−44.1258	Si, E	220	34[1]
		47	−44.9292	C	202	92[1]
		48	−48.4856	Si, E	2,050	12[1]
		49	−48.5573	C	153	20[1]
		50	−51.4336	C, E	148	(2)
		51	−49.739			
		52	−49.470			

（续表）

Z	元 素	A	盈 余（兆电子伏）	类 型	丰 度	截 面（毫靶）
23	V				262	25±8
		45	−31.9			
		46	−37.0714			
		47	−42.0048			
		48	−44.4702			
		49	−47.9561			
		50	−49.2167	C	0.63	
		51	−52.1974	E	261	25±8
		52	−51.4369			
		53	−51.861			
		54	−49.93			
24	Cr				1.27×10^4	6.2±2
		47	−34.5			
		48	−42.816			
		49	−45.388			
		50	−50.2557	Si, E	547	31±4
		51	−51.4460			
		52	−55.4150	Si, E	1.06×10^4	3.8±1.0
		53	−55.2838	Si, E	1,210	40±5
		54	−56.9323	E	302	23[1]
		55	−55.121			
		56	−55.266			
25	Mn				9,300	
		49	−37.72			
		50	−42.6246			
		51	−48.240			
		52	−50.705			
		53	−54.6865			
		54	−55.557			
		55	−57.7100	Si, E	9,300	50±2
		56	−56.9087			
		57	−57.62			
		58	−56.06			
26	Fe				8.3×10^5	18±8
		52	−48.333			
		53	−50.942			
		54	−56.2517	Si, E	4.83×10^4	34±10
		55	−57.4784			
		56	−60.6094	Si, E	7.61×10^5	13.5±2.0
		57	−60.1838	E	1.82×10^4	30±5
		58	−62.1551	E	2,740	4.5[1]
		59	−60.6700			
		60	−61.435			
		61	−59.03			
27	Co				2,210	
		54	−48.002			
		55	−54.0124			
		56	−56.0412			

（续表）

Z	元 素	A	盈 余（兆电子伏）	类 型	丰 度	截 面（毫靶）
27	Co	57	−59.3470			
		58	−59.8472			
		59	−62.2357	E	2,210	35±10
		60	−61.6556			
		61	−62.920			
		62	−61.530			
		63	−61.863			
		64	−60.1			
28	Ni				4.80×10^4	12.4±2
		56	−53.908			
		57	−56.104			
		58	−60.2350	E	3.26×10^4	17±3
		59	−61.1626			
		60	−64.4792	E	1.26×10^4	7.5±2
		61	−64.2270	E	571	(30)
		62	−66.7519	C	1,760	6[1]
		63	−65.5215			
		64	−67.1093	C	518	(10)
		65	−65.133			
		66	−66.060			
		67	−63.20			
29	Cu				540	47±7
		58	−51.668			
		59	−56.363			
		60	−58.352			
		61	−61.9818			
		62	−62.805			
		63	−65.5874	E	373	49±14(92)
		64	−65.4318			
		65	−67.2648	C	167	42±7(18)
		66	−66.2598			
		67	−67.302			
		68	−65.42			
		69	−65.94			
30	Zn				1,244	41±10
		60	−54.193			
		61	−56.58			
		62	−61.115			
		63	−62.222			
		64	−66.0064	E	608	50[1]
		65	−65.9141			
		66	−68.8945	E	346	40[1]
		67	−67.8767	C	51.1	160[1]
		68	−70.0043	C	231	23±3
		69	−68.4162			
		70	−69.5597	C	7.71	16[1]
		71	−67.332			
		72	−68.131			

(续表)

Z	元素	A	盈余(兆电子伏)	类型	丰度	截面(毫靶)
31	Ga				48	115±20
		63	−56.7			
		64	−58.934			
		65	−62.655			
		66	−63.719			
		67	−66.876			
		68	−67.085			
		69	−69.3230	E	29.0	130±30
		70	−68.9060			
		71	−70.1381	C	19.0	120±30(60)
		72	−68.5876			
		73	−69.74			
		74	−67.92			
32	Ge				115	74±7
		65	−56.4			
		66	−61.617			
		67	−62.45			
		68	−66.698			
		69	−67.0975			
		70	−70.5595	E	23.6	84[1]
		71	−69.9030			
		72	−72.5807	E	31.5	65[1], 40
		73	−71.2932	C	8.92	270[1]
		74	−73.4224	E	42.0	34±20
		75	−71.841			
		76	−73.2123	C	8.92	53±10
		77	−71.16			
		78	−71.78			
		79	−69.39			
33	As				6.6	
		69	−63.13			
		70	−64.338			
		71	−67.894			
		72	−68.230			
		73	−70.954			
		74	−70.8587			
		75	−73.0297	S, R	6.6	490±100
		76	−72.2862			
		77	−73.917			
		78	−72.76			
		79	−73.69			
		80	−71.76			
		81	−72.59			
34	Se				67.2	94±8
		71	−62.9			
		72	−67.6			
		73	−68.214			
		74	−72.213	P	0.58	160[1]
		75	−72.1640			

（续表）

Z	元　素	A	盈　余（兆电子伏）	类　型	丰　度	截　面（毫靶）
34	Se	76	−75.2546	S	6.06	100[1]
		77	−74.6014	S, R	5.09	340[1]
		78	−77.0268	S, R	15.8	60[1]
		79	−75.933			
		80	−77.7570	S, R	33.5	20±12
		81	−76.387			
		82	−77.587	R	6.18	36±15
		83	−75.440			
		84	−75.92			
35	Br				13.5	600±60
		73	−63.5			
		74	−65.2			
		75	−69.155			
		76	−70.2			
		77	−73.2369			
		78	−73.453			
		79	−76.0741	S, R	6.82	600±150
		80	−75.8853			
		81	−77.974	S, R	6.68	460±80
		82	−77.503			
		83	−79.018			
		84	−77.73			
		85	−78.67			
		86	−76.0			
		87	−74.2			
36	Kr				46.8	
		74	−62.1			
		75	−64.1			
		76	−69.2			
		77	−70.237			
		78	−74.147	P	0.166	250[1]　500
		79	−74.443			
		80	−77.896	S, P	1.06	140[1]　280
		81	−77.68			
		82	−80.591	S	5.41	80[1]　200
		83	−79.987	S, R	5.41	225[1]　670
		84	−82.4332	S, R	26.6	28[1]　60
		85	−81.4726			
		86	−83.2613	R	8.13	9[1]　20
		87	−80.700			
		88	−79.70			
		89	−76.560			
		90	−74.89			
		91	−71.5			
37	Rb				5.88	160±20
		79	−70.92			
		80	−72.1			
		81	−75.42			
		82	−76.194			
		83	−78.946			

（续表）

Z	元素	A	盈余（兆电子伏）	类型	丰度	截面（毫靶）
37	Rb	84	−79.753			
		85	−82.1596	S, R	4.16	215±20
		86	−82.7383			
		87	−84.5926	R	1.72	24±4
		88	−82.604			
		89	−81.710			
		90	−79.30			
		91	−78.00			
		92	−75.0			
		93	−73.1			
38	Sr				26.9	120±40
		81	−71.6			
		82	−75.6			
		83	−76.699			
		84	−80.6398	P	0.151	330[1]
		85	−81.096			
		86	−84.5094	S	2.65	74±7
		87	−84.8661	S	1.77	109±9
		88	−87.9076	S, R	22.2	6.9±2.5
		89	−86.196			
		90	−85.9279			
		91	−83.684			
		92	−82.92			
		93	−79.95			
		94	−78.74			
		95	−75.5			
39	Y				4.8	
		83	−72.2			
		84	−73.690			
		85	−77.836			
		86	−79.236			
		87	−82.984			
		88	−84.289			
		89	−87.6856	S, R	4.8	21±4
		90	−86.4739			
		91	−86.349			
		92	−84.834			
		93	−84.254			
		94	−82.26			
		95	−81.236			
		96	−78.6			
		97	−76.8			
40	Zr				28	25±10
		85	−72.9			
		86	−77.9			
		87	−79.484			
		88	−83.61			
		89	−84.851			

（续表）

Z	元素	A	盈余（兆电子伏）	类型	丰度	截面（毫靶）
40	Zr	90	−88.7626	S, R	14.4	12±2
		91	−87.8935	S, R	3.14	68±8
		92	−88.4569	S, R	4.79	34±6
		93	−87.1437			
		94	−87.2631	S, R	4.87	20±2
		95	−85.666			
		96	−85.426	R	0.784	30±12
		97	−82.933			
		98	−81.273			
		99	−78.4			
		100	−77.1			
		101	−72.9			
41	Nb				1.4	
		87	−74.3			
		88	−76.4			
		89	−80.98			
		90	−82.652			
		91	−86.632			
		92	−86.453			
		93	−87.2071	S, R	1.4	285±30
		94	−86.3643			
		95	−86.7885			
		96	−85.609			
		97	−85.605			
		98	−83.51			
		99	−82.9			
		100	−80.2			
		101	−79.4			
		102	−76.2			
42	Mo				4.0	160±20
		88	−71.8			
		89	−75.01			
		90	−80.165			
		91	−82.188			
		92	−86.8084	P	0.634	50[1]
		93	−86.809			
		94	−88.4099	P	0.362	80[1]
		95	−87.7133	S, R	0.629	430±50
		96	−88.7959	S	0.661	90±10
		97	−87.5402	S, R	0.378	350±50
		98	−88.1109	S, R	0.951	150±40, 110
		99	−85.956			
		100	−86.1851	R	0.385	100±40
		101	−83.504			
		102	−83.6			
		103	−80.5			
		104	−80.2			

（续表）

Z	元　素	A	盈　余 (兆电子伏)	类　型	丰　度	截　面 (毫靶)
43	Tc					
		91	−76.6			
		92	−78.86			
		93	−83.623			
		94	−84.150			
		95	−86.012			
		96	−85.86			
		97	−87.195			
		98	−86.52			
		99	−87.328			800[1]
		100	−85.85			
		101	−86.325			
		102	−84.6			
		103	−84.90			
		104	−82.8			
		105	−82.53			
		106	−79.8			
44	Ru				1.9	(550)
		93	−77.4			
		94	−82.569			
		95	−83.450			
		96	−86.073	P	0.105	270±60
		97	−86.04			
		98	−88.223	P	0.0355	300[1]
		99	−87.6202	S, R	0.242	1,240[1]
		100	−89.2219	S	0.240	290[1]
		101	−87.9557	S, R	0.324	1,120[1]
		102	−89.1002	S, R	0.601	330±50
		103	−87.253			
		104	−88.094	R	0.353	120±60
		105	−85.930			
		106	−86.323			
		107	−83.71			
		108	−83.7			
45	Rh				0.4	
		95	−78.4			
		96	−79.630			
		97	−82.55			
		98	−83.166			
		99	−85.568			
		100	−85.592			
		101	−87.402			
		102	−86.778			
		103	−88.016	S, R	0.4	900±100
		104	−86.944			
		105	−87.847			
		106	−86.362			
		107	−86.86			
		108	−85.0			
		109	−85.1			
		110	−82.94			

（续表）

Z	元素	A	盈余 (兆电子伏)	类型	丰度	截面 (毫靶)
46	Pd				1.3	440±40
		97	−77.7			
		98	−81.4			
		99	−82.163			
		100	−85.2			
		101	−85.412			
		102	−87.927	P	0.0125	320[1]
		103	−87.463			
		104	−89.411	S	0.143	270[1]
		105	−88.413	S, R	0.289	1,130[1]
		106	−89.902	S, R	0.355	230[1]
		107	−88.373			
		108	−89.526	S, R	0.347	200±60
		109	−87.606			
		110	−88.340	R	0.154	170±70
		111	−86.02			
		112	−86.28			
47	Ag				0.45	920±100
		99	−76.13			
		100	−77.9			
		101	−81.0			
		102	−82.367			
		103	−84.78			
		104	−85.311			
		105	−87.078			
		106	−86.928			
		107	−88.408	S, R	0.231	1,150±150
		108	−87.605			
		109	−88.7215	S, R	0.219	620±50
		110	−87.4555			
		111	−88.224			
		112	−86.58			
		113	−87.035			
		114	−85.0			
		115	−84.91			
		116	−82.4			
48	Cd				1.48	340±50
		101	−75.5			
		102	−79.5			
		103	−80.4			
		104	−84.0			
		105	−84.28			
		106	−87.1302	P	0.0180	210[1]
		107	−86.991			
		108	−89.2480	P	0.0130	210[1]
		109	−88.539			
		110	−90.3464	S	0.124	210[1]
		111	−89.2516	S, R	0.189	840[1]
		112	−90.5769	S, R	0.356	210[1]
		113	−89.0449	S, R	0.181	840[1]

(续表)

Z	元　素	A	盈　余 (兆电子伏)	类　型	丰　度	截　面 (毫靶)
48	Cd	114	−90.0142	S, R	0.427	200±40
		115	−88.090			
		116	−88.7150	R	0.112	220±40
		117	−86.408			
		118	−86.704			
		119	−84.21			
49	In				0.189	760±80
		102	−69.7			
		103	−73.8			
		104	−75.5			
		105	−79.2			
		106	−80.390			
		107	−83.50			
		108	−84.10			
		109	−86.520			
		110	−86.42			
		111	−88.426			
		112	−87.989			
		113	−89.342	P, S	0.008	220±70
		114	−88.584			
		115	−89.541	S, R	0.181	800±100
		116	−88.248			
		117	−88.929			
		118	−87.45			
		119	−87.714			
		120	−85.5			
		121	−85.82			
		122	−83.2			
		123	−83.42			
		124	−80.8			
50	Sn				3.6	95±15
		103	−65.9			
		104	−70.9			
		105	−72.6			
		106	−77.1			
		107	−78.2			
		108	−82.0			
		109	−82.7			
		110	−85.824			
		111	−85.918			
		112	−88.648	P	0.0346	180[1]
		113	−88.317			
		114	−90.565	P	0.0238	130[1]
		115	−90.027	P, S	0.0126	550[1]
		116	−91.5218	S	0.515	100±15
		117	−90.3926	S, R	0.274	420±30
		118	−91.6483	S, R	0.865	63±5
		119	−90.0616	S, R	0.309	260±40
		120	−91.0943	S, R	1.18	50±15
		121	−89.2027			
		122	−89.9356	R	0.170	23±5(165)

（续表）

Z	元 素	A	盈 余 （兆电子伏）	类 型	丰 度	截 面 （毫靶）
50	Sn	123	−87.809			
		124	−88.229	R	0.214	23±4(180)
		125	−85.890			
		126	−86.013			
		127	−83.5			
		128	−83.40			
51	Sb				0.316	490±50
		105	−63.2			
		106	−65.7			
		107	−70.1			
		108	−72.2			
		109	−76.0			
		110	−77.6			
		111	−81.0			
		112	−81.85			
		113	−84.419			
		114	−84.87			
		115	−86.997			
		116	−87.02			
		117	−88.64			
		118	−87.953			
		119	−89.483			
		120	−88.414			
		121	−89.5899	S, R	0.181	740±100
		122	−88.3256			
		123	−89.2191	S, R	0.135	440±50
		124	−87.6142			
		125	−88.262			
		126	−86.33			
		127	−86.708			
		128	−84.70			
		129	−84.591			
		130	−82.3			
		131	−82.1			
		132	−79.6			
		133	−79.0			
52	Te				6.42	97±9(204)
		107	−60.0			
		108	−65.3			
		109	−67.4			
		110	−72.1			
		111	−73.6			
		112	−77.7			
		113	−78.5			
		114	−82.2			
		115	−82.46			
		116	−85.46			
		117	−85.15			
		118	−87.7			
		119	−87.189			

（续表）

Z	元　素	A	盈　余（兆电子伏）	类　型	丰　度	截　面（毫靶）
52	Te	120	−89.402	P	0.0057	400[1]
		121	−88.6			
		122	−90.3038	S	0.158	270±30
		123	−89.1620	S	0.056	820±30
		124	−90.5141	S	0.296	150±20
		125	−89.0273	S, R	0.449	430±30
		126	−90.0649	S, R	1.20	82±8
		127	−88.289			
		128	−88.9889	R	2.04	32.5±5
		129	−87.004			
		130	−87.3454	R	2.21	13.5±2.0
		131	−85.191			
		132	−85.193			
		133	−82.90			
		134	−82.6			
		135	−77.8			
53	I				1.09	
		113	−71.3			
		114	−73.5			
		115	−77.0			
		116	−78.2			
		117	−80.84			
		118	−81.6			
		119	−84.0			
		120	−84.1			
		121	−86.2			
		122	−86.16			
		123	−87.96			
		124	−87.354			
		125	−88.8793			
		126	−87.914			
		127	−88.9814	S, R	1.09	760±50
		128	−97.7351			
		129	−88.503			
		130	−86.888			
		131	−87.4432			
		132	−85.698			
		133	−85.86			
		134	−83.97			
		135	−83.776			
		136	−79.42			
		137	−76.8			
54	Xe				5.38	
		115	−69.5			
		116	−73.7			
		117	−74.8			
		118	−78.2			
		119	−79.0			
		120	−81.9			

（续表）

Z	元素	A	盈余（兆电子伏）	类型	丰度	截面（毫靶）
54	Xe	121	−82.4			
		122	−85.1			
		123	−85.29			
		124	−87.45	P	0.00678	1,200[1]
		125	−87.14			
		126	−89.165	P	0.00619	800[1]
		127	−88.317			
		128	−89.8601	S	0.117	300[1]
		129	−88.694	S, R	1.48	760[1]
		130	−89.8801	S	0.229	100[1]
		131	−88.4140	S, R	1.15	250[1]
		132	−89.2784	S, R	1.40	36[1]
		133	−87.660			
		134	−88.123	R	0.547	13[1]
		135	−86.502			
		136	−86.423	R	0.451	5[1]
		137	−82.213			
		138	−80.1			
		139	−75.98			
		140	−73.2			
55	Cs				0.387	
		123	−81.1			
		124	−81.6			
		125	−84.07			
		126	−84.2			
		127	−86.227			
		128	−85.953			
		129	−87.6			
		130	−86.857			
		131	−88.059			
		132	−87.179			
		133	−88.087	S, R	0.387	700±40
		134	−86.906			
		135	−87.659			
		136	−86.356			
		137	−86.561			
		138	−82.9			
		139	−80.78			
		140	−77.54			
		141	−74.9			
		142	−71.1			
56	Ba				4.8	61±5
		125	−79.6			
		126	−82.4			
		127	−82.7			
		128	−85.2			
		129	−85.2			
		130	−87.297	P	0.00485	2,000[1]
		131	−86.719			
		132	−88.451	P	0.00466	650[1]

（续表）

Z	元素	A	盈余（兆电子伏）	类型	丰度	截面（毫靶）
56	Ba					
		133	−87.572			
		134	−88.965	S	0.116	155[1]
		135	−87.868	S, R	0.316	315[1]
		136	−88.904	S	0.375	37[1]
		137	−87.734	S, R	0.543	76[1]
		138	−88.274	S, R	3.44	8±2.5
		139	−84.926			
		140	−83.241			
		141	−79.97			
		142	−77.77			
		143	−74.0			
		144	−71.8			
57	La				0.445	44±4
		127	−77.7			
		128	−78.4			
		129	−81.2			
		130	−81.6			
		131	−83.76			
		132	−83.74			
		133	−85.7			
		134	−85.255			
		135	−86.83			
		136	−86.03			
		137	−87.2			
		138	−86.480	P	0.00041	
		139	−87.186	S, R	0.445	44±4.48
		140	−84.276			
		141	−82.960			
		142	−79.970			
		143	−78.21			
		144	−74.9			
		145	−72.9			
		146	−69.4			
58	Ce				1.18	35±5
		131	−79.5			
		132	−82.3			
		133	−82.4			
		134	−84.7			
		135	−84.5			
		136	−86.462	P	0.00228	100[1]
		137	−86.0			
		138	−87.536	P	0.00295	30[1]
		139	−86.911			
		140	−88.042	S, R	1.04	3±3.12
		141	−85.399			
		142	−84.487	R	0.131	360±60(450)
		143	−81.593			
		144	−80.403			

（续表）

Z	元 素	A	盈 余 (兆电子伏)	类 型	丰 度	截 面 (毫靶)
58	Ce	145	−77.11			
		146	−75.74			
		147	−72.2			
		148	−70.7			
59	Pr				0.149	
		134	−78.6			
		135	−80.9			
		136	−81.3			
		137	−83.3			
		138	−83.099			
		139	−84.799			
		140	−84.654			
		141	−85.980	S, R	0.149	110±20
		142	−83.752			
		143	−83.038			
		144	−80.719			
		145	−79.599			
		146	−76.82			
		147	−75.43			
		148	−72.5			
		149	−71.38			
		150	−68.7			
60	Nd				0.78	
		136	−78.8			
		137	−79.3			
		138	−81.8			
		139	−82.0			
		140	−84.18			
		141	−84.175			
		142	−85.916	S	0.211	70[1]
		143	−83.970	S, R	0.0949	425[1]
		144	−83.716	S, R	0.186	100[1]
		145	−81.404	S, R	0.0647	600[1]
		146	−80.898	S, R	0.134	150[1]
		147	−78.129			
		148	−77.381	R	0.0447	210±80
		149	−74.377			
		150	−73.662	R	0.0438	240±150
		151	−70.899			
		152	−70.126			
61	Pm					
		139	−77.5			
		140	−78.3			
		141	−80.45			
		142	−81.10			
		143	−82.901			
		144	−81.34			
		145	−81.234			
		146	−79.421			

（续表）

Z	元素	A	盈余（兆电子伏）	类型	丰度	截面（毫靶）
61	Pm	147	−79.023			2,000[1]
		148	−76.852			
		149	−76.046			
		150	−73.53			
		151	−73.365			
		152	−71.35			
		153	−70.74			
		154	−68.4			
62	Sm				0.226	920±50
		141	−76.1			
		142	−79.05			
		143	−79.422			
		144	−81.904	P	0.00698	120±55
		145	−80.596			
		146	−80.947			
		147	−79.248	S, R	0.0349	1,150±190
		148	−79.317	S	0.0254	260±50
		149	−77.118	S, R	0.0313	1,620±280
		150	−77.033	S	0.0168	370±70
		151	−74.553			
		152	−74.749	R	0.0604	450±50
		153	−72.544			
		154	−72.451	R	0.0513	380±60
		155	−70.193			
		156	−69.359			
63	Eu				0.085	3,350±150
		143	−74.42			
		144	−75.577			
		145	−77.876			
		146	−77.075			
		147	−77.486			
		148	−76.217			
		149	−76.4			
		150	−74.719			
		151	−74.629	S, R	0.0406	3,600±500
		152	−72.863			
		153	−73.347	S, R	0.0444	2,700±300
		154	−71.713			
		155	−71.818			
		156	−70.072			
		157	−69.461			
		158	−67.25			
		159	−65.92			
		160	−63.5			
64	Gd				0.297	940±50
		144	−71.9			
		145	−72.9			
		146	−75.9			
		147	−75.158			

（续表）

Z	元 素	A	盈 余（兆电子伏）	类 型	丰 度	截 面（毫靶）
64	Gd	148	−76.207			
		149	−75.072			
		150	−75.728			
		151	−74.165			
		152	−74.691	P	0.000594	500[1]
		153	−73.106			
		154	−73.691	S	0.00639	520[1]
		155	−72.065	S, R	0.0437	2,280[1]
		156	−72.524	S, R	0.0608	470[1]
		157	−70.821	S, R	0.0466	2,070[1]
		158	−70.680	S, R	0.0739	540±70
		159	−68.553			
		160	−67.934	R	0.0650	100±30
		161	−65.494			
		162	−64.29			
65	Tb				0.055	
		146	−67.8			
		147	−70.6			
		148	−70.59			
		149	−71.375			
		150	−71.060			
		151	−71.557			
		152	−70.871			
		153	−71.3			
		154	−70.3			
		155	−71.220			
		156	−70.2			
		157	−70.757			
		158	−69.440			
		159	−69.503	S, R	0.055	2,200±200
		160	−67.813			
		161	−67.445			
		162	−65.69			
		163	−64.67			
		164	−62.59			
66	Dy				0.36	730±40
		148	−67.8			
		149	−67.5			
		150	−69.1			
		151	−68.552			
		152	−70.057			
		153	−69.090			
		154	−70.356			
		155	−69.121			
		156	−70.491	P	0.000189	870[1]
		157	−69.394			
		158	−70.384	P	0.000325	770[1]
		159	−69.138			
		160	−69.648	S	0.000826	650[1]

（续表）

Z	元　素	A	盈　余（兆电子伏）	类　型	丰　度	截　面（毫靶）
66	Dy	161	−68.027	S, R	0.0680	2,800±300
		162	−68.151	S, R	0.0919	470±50
		163	−66.351	S, R	0.0899	1,600±300
		164	−65.934	S, R	0.101	180±40
		165	−63.577			
		166	−62.563			
67	Ho				0.079	
		149	−61.6			
		150	−62.0			
		151	−63.5			
		152	−63.67			
		153	−64.832			
		154	−64.598			
		155	−65.8			
		156	−65.4			
		157	−66.9			
		158	−66.407			
		159	−67.4			
		160	−66.728			
		161	−67.21			
		162	−65.981			
		163	−66.342			
		164	−64.955			
		165	−64.873	S, R	0.079	1,250±150(2,000)
		166	−63.044			
		167	−62.298			
		168	−60.20			
		169	−58.75			
		170	−56.39			
68	Er				0.255	750±50
		150	−57.9			
		151	−58.2			
		152	−60.4			
		153	−60.2			
		154	−62.4			
		155	−62.01			
		156	−63.7			
		157	−63.0			
		158	−64.9			
		159	−64.3			
		160	−65.9			
		161	−65.161			
		162	−66.299	P	0.000306	900[1]
		163	−65.134			
		164	−65.918	P, S	0.00351	750[1]
		165	−64.501			
		166	−64.904	S, R	0.0752	560[1]
		167	−63.268	S, R	0.0516	2,000[1]
		168	−62.968	S, R	0.0609	400[1]
		169	−60.899			

（续表）

Z	元　　素	A	盈　　余 （兆电子伏）	类　　型	丰　　度	截　　面 （毫靶）
68	Er	170	−60.091	R	0.0335	250±30
		171	−57.700			
		172	−56.480			
		173	−53.42			
69	Tm				0.034	
		151	−50.9			
		152	−51.9			
		153	−53.9			
		154	−54.5			
		155	−56.3			
		156	−56.7			
		157	−58.2			
		158	−58.3			
		159	−60.1			
		160	−60.1			
		161	−61.64			
		162	−61.60			
		163	−62.717			
		164	−61.956			
		165	−62.936			
		166	−61.869			
		167	−62.521			
		168	−61.27			
		169	−61.251	S, R	0.034	1,500±200
		170	−59.773			
		171	−59.190			
		172	−57.369			
		173	−56.215			
		174	−53.87			
		175	−52.28			
		176	−49.34			
70	Yb				0.216	600±50
		153	−47.3			
		154	−50.0			
		155	−50.4			
		156	−53.1			
		157	−53.2			
		158	−55.3			
		159	−55.1			
		160	−57.3			
		161	−57.1			
		162	−59.3			
		163	−59.0			
		164	−60.9			
		165	−60.184			
		166	−61.609			
		167	−60.566			
		168	−61.549	P	0.000292	700[1]
		169	−60.344			
		170	−60.741	S	0.00654	510[1]

（续表）

Z	元素	A	盈余 (兆电子伏)	类型	丰度	截面 (毫靶)
70	Yb	171	−59.287	S, R	0.0309	1,320[1]
		172	−59.239	S, R	0.0471	380[1]
		173	−57.535	S, R	0.0348	990[1]
		174	−56.933	S, R	0.0688	275[1]
		175	−54.681			
		176	−53.485	R	0.0275	200±50
		177	−50.975			
		178	−49.5			
71	Lu				0.036	1,400±300(3,700)
		155	−42.7			
		156	−43.9			
		157	−46.3			
		158	−47.1			
		159	−48.9			
		160	−49.5			
		161	−51.6			
		162	−52.2			
		163	−54.2			
		164	−54.5			
		165	−56.2			
		166	−56.1			
		167	−57.50			
		168	−57.19			
		169	−58.074			
		170	−57.301			
		171	−57.9			
		172	−56.7			
		173	−56.845			
		174	−55.562			
		175	−55.149	S, R	0.0351	1,460±110
		176	−53.370	S	0.00108	2,250±200
		177	−52.371			
		178	−50.17			
		179	−49.10			
		180	−46.47			
72	Hf				0.21	600±50
		157	−39.0			
		158	−42.2			
		159	−42.7			
		160	−45.2			
		161	−45.5			
		162	−48.2			
		163	−48.6			
		164	−51.1			
		165	−51.1			
		166	−53.4			
		167	−53.2			
		168	−55.2			
		169	−54.70			
		170	−56.1			

（续表）

Z	元素	A	盈余（兆电子伏）	类型	丰度	截面（毫靶）
72	Hf	171	−55.3			
		172	−56.3			
		173	−55.2			
		174	−55.760	P	0.00038	800[1]
		175	−54.542			
		176	−54.559	S	0.0109	640±160
		177	−52.868	S, R	0.0389	110[1]
		178	−52.422	S, R	0.0570	370[1]
		179	−50.450	S, R	0.0289	960[1]
		180	−49.766	S, R	0.0740	290±80
		181	−47.389			
		182	−45.90			
		183	−43.219			
73	Ta				0.021	800±80
		163	−41.5			
		164	−42.5			
		165	−44.9			
		166	−45.6			
		167	−47.8			
		168	−48.2			
		169	−50.1			
		170	−50.1			
		171	−51.6			
		172	−51.3			
		173	−52.3			
		174	−51.8			
		175	−52.3			
		176	−51.46			
		177	−51.710			
		178	−50.51			
		179	−50.331			
		180	−48.840	P	0.00000258	
		181	−48.412	S, R	0.0210	800±80
		182	−46.403			
		183	−45.259			
		184	−42.637			
		185	−41.38			
		186	−38.58			
74	W				0.16	290±30
		165	−37.8			
		166	−40.6			
		167	−41.4			
		168	−44.0			
		169	−44.3			
		170	−46.6			
		171	−46.6			
		172	−48.5			
		173	−48.3			
		174	−49.9			

（续表）

Z	元　素	A	盈　余（兆电子伏）	类　型	丰　度	截　面（毫靶）
74	W	175	−49.3			
		176	−50.5			
		177	−49.7			
		178	−50.42			
		179	−49.2			
		180	−49.65	P	0.000216	270[1]
		181	−48.225			
		182	−48.208	S, R	0.0422	260±30
		183	−46.327	S, R	0.0230	550±50
		184	−45.667	S, R	0.0490	180±20
		185	−43.345			
		186	−42.475	R	0.0454	220±20
		187	−39.870			
		188	−38.634			
		189	−35.44			
75	Re				0.053	1,420±100(950)
		167	−33.7			
		168	−35.0			
		169	−37.5			
		170	−38.4			
		171	−40.7			
		172	−41.2			
		173	−43.2			
		174	−43.5			
		175	−45.0			
		176	−45.0			
		177	−46.1			
		178	−45.76			
		179	−46.5			
		180	−45.86			
		181	−46.4			
		182	−45.348			
		183	−45.771			
		184	−44.1			
		185	−43.774	S, R	0.0185	1,530±200(2,200)
		186	−41.881			
		187	−41.181	S, R	0.0341	1,570±100(780)
		188	−38.983			
		189	−37.942			
		190	−35.49			
		191	−34.5			
76	Os				0.75	300±40
		169	−29.6			
		170	−32.6			
		171	−33.5			
		172	−36.1			
		173	−36.7			
		174	−39.1			
		175	−39.3			

（续表）

Z	元素	A	盈余（兆电子伏）	类型	丰度	截面（毫靶）
76	Os	176	−41.4			
		177	−41.4			
		178	−43.0			
		179	−42.7			
		180	−44.0			
		181	−43.4			
		182	−44.2			
		183	−43.4			
		184	−44.158	P	0.000135	400[1]
		185	−42.759			
		186	−42.958	S	0.00968	330[1]
		187	−41.184	S	0.0088	900[1]
		188	−41.101	S, R	0.0998	275[1]
		189	−38.952	S, R	0.121	765[1]
		190	−38.674	S, R	0.198	230[1](750)
		191	−36.362			
		192	−35.850	R	0.308	(200)
		193	−33.367			
		194	−32.397			
		195	−29.9			
77	Ir				0.717	1,120±200
		171	−25.2			
		172	−26.6			
		173	−29.3			
		174	−30.4			
		175	−32.7			
		176	−33.6			
		177	−35.6			
		178	−36.0			
		179	−37.6			
		180	−37.9			
		181	−39.1			
		182	−39.0			
		183	−40.0			
		184	−39.44			
		185	−40.3			
		186	−39.127			
		187	−39.7			
		188	−38.268			
		189	−38.5			
		190	−36.62			
		191	−36.672	S, R	0.267	1,900±300
		192	−34.799			
		193	−34.499	S, R	0.450	600±80
		194	−32.494			
		195	−31.851			
		196	−29.46			
		197	−28.41			
		198	−25.51			

（续表）

Z	元　素	A	盈　余（兆电子伏）	类　型	丰　度	截　面（毫靶）
78	Pt				1.4	470±60
		173	−20.8			
		174	−24.0			
		175	−25.0			
		176	−27.9			
		177	−28.7			
		178	−31.1			
		179	−31.6			
		180	−33.7			
		181	−33.8			
		182	−35.6			
		183	−35.5			
		184	−36.9			
		185	−36.5			
		186	−37.5			
		187	−36.8			
		188	−37.728			
		189	−36.5			
		190	−37.293	P	0.000178	770[1]
		191	−35.672			
		192	−36.256	S	0.0109	490[1]
		193	−34.438			
		194	−34.733	S, R	0.461	310[1]
		195	−32.786	S, R	0.473	780[1]
		196	−32.635	S, R	0.354	160±40
		197	−30.414			
		198	−29.906	R	0.101	185±20
		199	−27.406			
		200	−26.6			
		201	−23.50			
79	Au				0.202	
		177	−20.6			
		178	−21.9			
		179	−24.3			
		180	−25.4			
		181	−27.4			
		182	−28.1			
		183	−29.7			
		184	−30.1			
		185	−31.5			
		186	−31.5			
		187	−32.7			
		188	−32.4			
		189	−33.5			
		190	−32.9			
		191	−33.8			
		192	−32.742			
		193	−33.4			
		194	−32.224			
		195	−32.557			
		196	−31.153			

（续表）

Z	元　素	A	盈　余（兆电子伏）	类　型	丰　度	截　面（毫靶）
79	Au	197	−31.161	S, R	0.202	600±50
		198	−29.602			
		199	−29.099			
		200	−27.31			
		201	−26.16			
		202	−23.85			
		203	−22.8			
		204	−20.19			
80	Hg				0.4	250±60
		179	−16.1			
		180	−19.3			
		181	−20.1			
		182	−22.7			
		183	−23.4			
		184	−25.6			
		185	−25.9			
		186	−28.0			
		187	−27.9			
		188	−29.5			
		189	−29.4			
		190	−30.9			
		191	−30.5			
		192	−31.8			
		193	−31.1			
		194	−32.174			
		195	−31.2			
		196	−31.837	P	0.000584	360[1]
		197	−30.746			
		198	−30.975	S	0.0408	250[1], 125
		199	−29.552	S, R	0.0674	630[1]
		200	−29.509	S, R	0.0925	175[1]
		201	−27.662	S, R	0.0529	450[1]
		202	−27.346	S, R	0.119	50±15
		203	−25.267			
		204	−24.686	R	0.0274	150±50
		205	−22.282			
		206	−20.937			
81	Tl				0.192	70±5
		187	−21.5			
		188	−21.9			
		189	−23.6			
		190	−23.9			
		191	−25.5			
		192	−25.5			
		193	−26.9			
		194	−26.7			
		195	−28.0			
		196	−27.4			
		197	−28.4			
		198	−27.51			

（续表）

Z	元　素	A	盈　余（兆电子伏）	类　型	丰　度	截　面（毫靶）
81	Tl	199	−28.1			
		200	−27.055			
		201	−27.25			
		202	−26.109			
		203	−25.758	S, R	0.0567	170±30
		204	−24.342			
		205	−23.811	S, R	0.135	48±10
		206	−22.244			
		207	−21.014			
		208	−16.749			
		209	−13.632			
		210	−9.224			
82	Pb				4	4.6±1.5
		189	−17.0			
		190	−19.2			
		191	−19.5			
		192	−21.5			
		193	−21.6			
		194	−23.5			
		195	−23.4			
		196	−25.0			
		197	−24.6			
		198	−26.0			
		199	−25.4			
		200	−26.4			
		201	−25.5			
		202	−26.059			
		203	−24.776			
		204	−25.105	S	0.0788	43±5
		205	−23.768			
		206	−23.777	S, R	0.753	9.6±3.0
		207	−22.446	S, R	0.824	8.7±3.0
		208	−21.743	S, R	2.34	0.33±0.07
		209	−17.609			
		210	−14.720			
		211	−10.463			
		212	−7.544			
		213	−3.1			
		214	−0.147			
83	Bi				0.143	
		191	−12.4			
		192	−12.9			
		193	−15.0			
		194	−15.4			
		195	−17.3			
		196	−17.4			
		197	−19.1			
		198	−19.1			
		199	−20.5			
		200	−20.4			
		201	−21.5			

（续表）

Z	元　素	A	盈　余（兆电子伏）	类　型	丰　度	截　面（毫靶）
83	Bi	202	−20.9			
		203	−21.59			
		204	−20.7			
		205	−21.064			
		206	−20.125			
		207	−20.041			
		208	−18.875			
		209	−18.257	S, R	0.143	12.1±4.0
		210	−14.783			
		211	−11.839			
		212	− 8.117			
		213	− 5.226			
		214	− 1.183			
		215	1.73			
		216	6.0			
84	Po					
		193	− 7.4			
		194	− 9.8			
		195	−10.3			
		196	−12.5			
		197	−12.8			
		198	−14.7			
		199	−14.9			
		200	−16.6			
		201	−16.4			
		202	−17.9			
		203	−17.4			
		204	−18.5			
		205	−17.7			
		206	−18.308			
		207	−17.132			
		208	−17.464			
		209	−16.364			
		210	−15.944			
		211	−12.429			
		212	−10.364			
		213	− 6.647			
		214	− 4.460			
		215	− 0.514			
		216	1.786			
		217	6.0			
		218	8.390			
85	At					
		196	− 3.3			
		197	− 5.5			
		198	− 6.1			
		199	− 8.1			
		200	− 8.4			
		201	−10.2			
		202	−10.4			

（续表）

Z	元素	A	盈余 （兆电子伏）	类型	丰度	截面 （毫靶）
85	At	203	−11.9			
		204	−11.9			
		205	−13.0			
		206	−12.6			
		207	−13.29			
		208	−12.5			
		209	−12.882			
		210	−12.069			
		211	−11.637			
		212	− 8.624			
		213	− 6.578			
		214	− 3.409			
		215	− 1.254			
		216	2.260			
		217	4.398			
		218	8.117			
		219	10.54			
		220	14.2			
86	Rn	200	− 3.0			
		201	− 3.5			
		202	− 5.6			
		203	− 5.8			
		204	− 7.7			
		205	− 7.6			
		206	− 9.1			
		207	− 8.8			
		208	− 9.8			
		209	− 9.1			
		210	− 9.723			
		211	− 8.741			
		212	− 8.648			
		213	− 5.696			
		214	− 4.310			
		215	− 1.165			
		216	0.262			
		217	3.666			
		218	5.232			
		219	8.856			
		220	10.616			
		221	14.4			
		222	16.402			
87	Fr	203	1.6			
		204	1.1			
		205	− 0.8			
		206	− 1.1			
		207	− 2.6			
		208	− 2.7			
		209	− 3.8			

（续表）

Z	元素	A	盈余（兆电子伏）	类型	丰度	截面（毫靶）
87	Fr	210	−3.5			
		211	−4.20			
		212	−3.6			
		213	−3.554			
		214	−1.056			
		215	0.331			
		216	2.976			
		217	4.318			
		218	7.013			
		219	8.614			
		220	11.483			
		221	13.280			
		222	16.364			
		223	18.406			
		224	21.7			
88	Ra	206	4.3			
		207	3.9			
		208	2.0			
		209	2.0			
		210	0.5			
		211	0.7			
		212	−0.3			
		213	0.2			
		214	−0.026			
		215	2.547			
		216	3.257			
		217	5.890			
		218	6.662			
		219	9.392			
		220	10.279			
		221	12.974			
		222	14.336			
		223	17.257			
		224	18.828			
		225	22.011			
		226	23.694			
		227	27.201			
		228	28.962			
		229	32.7			
		230	34.6			
89	Ac	209	9.4			
		210	8.9			
		211	7.5			
		212	7.3			
		213	6.1			
		214	6.3			
		215	5.97			
		216	8.0			

（续表）

Z	元　素	A	盈　余 （兆电子伏）	类　型	丰　度	截　面 （毫靶）
89	Ac	217	8.7			
		218	10.746			
		291	11.582			
		220	13.748			
		221	14.529			
		222	16.569			
		223	17.821			
		224	20.231			
		225	21.639			
		226	24.327			
		227	25.871			
		228	28.907			
		229	30.7			
		230	33.8			
		231	35.93			
		232	39.2			
90	Th				0.058	
		213	12.2			
		214	10.7			
		215	10.8			
		216	10.2			
		217	12.0			
		218	12.3			
		219	14.4			
		220	14.7			
		221	16.943			
		222	17.215			
		223	19.271			
		224	20.008			
		225	22.319			
		226	23.212			
		227	25.827			
		228	26.770			
		229	29.604			
		230	30.886			
		231	33.829			
		232	35.467	R	0.058	500±100
		233	38.752			
		234	40.645			
91	Pa					
		222	21.87			
		223	22.352			
		224	23.799			
		225	24.331			
		226	25.980			
		227	26.827			
		228	28.883			
		229	29.899			
		230	32.190			
		231	33.443	R		

（续表）

Z	元　素	A	盈　余 (兆电子伏)	类　型	丰　度	截　面 (毫靶)
91	Pa	232	35.953			
		233	37.508			
		234	40.382			
		235	42.33			
		236	45.56			
		237	47.71			
		238	51.30			
92	U				0.0262	
		227	28.9			
		228	29.236			
		229	31.216			
		230	31.628			
		231	33.80			
		232	34.608			
		233	36.937			330±40
		234	38.168			610[1]
		235	40.934	R	0.0063	860±80
		236	42.460			(680)
		237	45.407			
		238	47.335	R	0.0199	415±50
		239	50.604			
		240	52.742			
93	Np	229	33.768			
		230	35.203			
		231	35.65			
		232	37.3			
		233	38.0			
		234	39.976			
		235	41.057			
		236	43.437			
		237	44.889			
		238	47.481			
		239	49.326			
		240	52.23			
		241	54.33			
		242	57.5			
94	Pu	232	38.36			
		233	40.057			
		234	40.363			
		235	42.19			
		236	42.900			
		237	45.113			
		238	46.186			
		239	48.602			580±60
		240	50.140			600±100
		241	52.972			
		242	54.742			

（续表）

Z	元 素	A	盈 余（兆电子伏）	类 型	丰 度	截 面（毫靶）
94	Pu	243	57.777			
		244	59.831			
		245	63.182			
		246	65.32			
95	Am	234	44.4			
		235	44.7			
		236	46.0			
		237	46.7			
		238	48.5			
		239	49.406			
		240	51.5			
		241	52.951			
		242	55.494			
		243	57.189			
		244	59.898			
		245	61.922			
		246	64.94			
		247	67.2			
		248	70.5			
96	Cm	236	48.0			
		237	49.2			
		238	49.419			
		239	51.1			
		240	51.721			
		241	53.723			
		242	54.827			
		243	57.196			
		244	58.469			
		245	61.020			
		246	62.641			
		247	65.556			
		248	67.417			
		249	70.776			
		250	73.1			
97	Bk	238	54.2			
		239	54.3			
		240	55.7			
		241	56.1			
		242	57.8			
		243	58.702			
		244	60.7			
		245	61.840			
		246	64.2			
		247	65.500			
		248	68.0			
		249	69.868			

（续表）

Z	元　素	A	盈　余（兆电子伏）	类　型	丰　度	截　面（毫靶）
97	Bk	250 251 252	72.970 75.3 78.6			
98	Cf	240 241 242 243 244 245 246 247 248 249 250 251 252 253 254	58.1 59.2 59.353 60.9 61.474 63.403 64.121 66.2 67.264 69.742 71.195 74.153 76.059 79.337 81.4			
99	Es	244 245 246 247 248 249 250 251 252 253 254 255 256	66.0 66.4 68.0 68.578 70.3 71.146 73.2 74.517 77.2 79.038 82.021 84.1 87.3			
100	Fm	246 247 248 249 250 251 252 253 254 255 256 257	70.151 71.6 71.900 73.5 74.094 76.0 76.842 79.373 80.934 83.821 85.518 88.628			
101	Md	249 250 251 252 253 254 255 256 257	77.3 78.7 79.1 80.6 81.3 83.4 84.9 87.5 89.1			
102	No	251 252 253 254 255 256 257	82.8 82.871 84.3 84.754 86.9 87.82 90.249			
103	Lr	256 257	91.8 92.7			

$$Q = E_{出射} - E_{入射} = c^2(M_a + M_x - M_b - M_y - M_d)$$
$$= {}^*931.5016(A_a + A_x - A_b - A_y - A_d)\text{兆电子伏}, \tag{4-16}$$

这里 $E_{入射}$ 及 $E_{出射}$ 是入射诸粒子及出射诸粒子的质心系动能，M_i 是粒子 i 的质量，c 为光速，A_i 是粒子 i 的原子质量，单位是原子质量单位。只要在反应中核子数是守恒的，我们也可写出：

$$Q = \Delta M_b + \Delta M_y + \Delta M_d - \Delta M_a - \Delta M_x, \tag{4-17}$$

式中 ΔM_i 表示粒子 i 的质量盈余，单位是能量单位。当核反应中包括一个正电子的发射时，通常在 (4–16) 式或 (4–17) 式中的 Q 值上加上湮没能量 $2mc^2 = {}^*1.022\,0068$ 兆电子伏 $= {}^*1.6374482 \times 10^{-6}$ 尔格。

原子核的结合能 E_B 对每个核子的平均值具有一个狭窄的范围，当 $A > 10$ 时，7.4 兆电子伏 $\leqslant E_B/A \leqslant 8.8$ 兆电子伏(Aston, 1927)。然而，某些核与其他核比较起来极为稳定(Elsasser, 1953)，而那些具有 Z 或 N 为"幻数"的核则特别稳定。这些幻数为 (Mayer, 1948)：

2, 8, 14, 20, 28, 50, 82 或 126。

威札克(Weizsäcker, 1935)首先推导出当给定 A 和 Z 值时的原子质量的半经验公式。他的质量定律是：

$$M_{AZ} = M_N A - (M_N - M_H)Z - E_B(A, Z)/c^2, \tag{4-18}$$

式中中子质量 $M_N = {}^*1.008665012$ 原子质量单位，氢原子的质量 $M_H = {}^*1.007825050$ 原子质量单位，1 个原子质量单位 $= {}^*931.5016$ 兆电子伏，原子核结合能 $E_B(A, Z)$ 为：

$$-E_B(A, Z) = -a_1 A + a_2 A^{2/3} + a_3(Z^2 A^{-1/3}) + 0.25 a_4 (A - 2Z)^2 A^{-1}。$$

格林 (Green, 1954) 所给出的这些常数的数值是 $a_1 = 16.9177$ 兆电子伏，$a_2 = 19.120$ 兆电子伏，$a_3 = 0.76278$ 兆电子伏以及 $a_4 = 101.777$ 兆电子伏。结合能表达式中经常要加上一个 $\pm 132A^{-1}$ 兆电子伏的附加项，其中 ± 号的 + 与 − 分别对应于 $N = A - Z$ 及 Z 两者都为奇数还是偶数的情况。现代在推导质量定律方面试图从已知原子核的质量外推以预言尚未测量过的原子核的质量及结合能。韦普斯特拉等(Wapstra 和 Gove, 1971)给出了已测定的原子质量，这些质量值列于表 38。在估计原子及分子质量的理论值方面也已作过相当多的研究工作(参看 Myers 和 Swiatecki, 1966; Garvey 等, 1969; Truran 等, 1970; Kodama, 1971)。利用半经验质量公式并考虑到壳层效应，在(4–18)式中用到的原子核结合能 $E_B(A, Z)$ 为(Myers 和 Swiatecki, 1966)：

$$-E_B(A, Z) = -c_1 A + c_2 A^{2/3} + c_3(Z^2 A^{-1/3}) - c_4 Z^2 A^{-1}$$
$$+ [4E^3/(9F^2)] - [8E^3/(27F^2)], \tag{4-19}$$

式中

$$c_1 = 15.677\left[1 - 1.79\left(\frac{N-Z}{A}\right)^2\right]\text{兆电子伏},$$

$$c_2 = 18.56\left[1 - 1.79\left(\frac{N-Z}{A}\right)^2\right]\text{兆电子伏},$$

$$c_3 = 0.717\ \text{兆电子伏},$$

$$c_4 = 1.21129\ \text{兆电子伏},$$

$$E = \frac{2}{5} c_2 A^{2/3}(1 - x)\alpha_0^2,$$

$$F = \frac{4}{105} c_2 A^{2/3}(1 + 2x)\alpha_0^3,$$

$$x=c_3Z^2/(2c_2A),$$

以及

$$\alpha_0^2=0.3645\,A^{-2/3}。$$

迈尔斯(Myers, 1970)给出了关于(4-19)式蕴含的某些物理意义的最近的研究,而各种原子的质量值可以根据加维(Garvey)定律以及他的质量表查出(参看 Garvey 等(1969))。

4.1.4 α 衰变及其他天然核反应

随着贝克勒耳(Becquerel, 1896)发现铀盐发射粒子以后,卢瑟福(Rutherford, 1899)证明存在着两种这样的放射性粒子,即 β 及 α 粒子,而它们又分别具有较大及较小的贯穿本领。随后,卢瑟福等(Rutherford 和 Soddy, 1902, 1903)证明当发射一个 α 粒子时,质量数 A 减少 4 而原子数 Z 减少 2。由此可见,在一个原子核内部两个质子与两个中子聚集在一起形成一个 α 粒子,它便是带电荷 $Z_\alpha=2$、质量 $M_\alpha=4.002603$ 原子质量单位的一个 ^4He 原子核。卢瑟福等(Rutherford 和 Soddy, 1902, 1903)还指出当一个原子核发射一个 β 粒子时,质量 A 保持不变而电荷 Z 改变 1。这意味着 β 粒子很可能是电子或正电子,后来证明这是正确的。事实上,一个原子核在不同的热核条件下可以发射 α、β^+、β^-、n、p、氘核 D、氚核 T 以及 He^3。原子核还可以俘获这类粒子。β 衰变理论与电子俘获在第 4.3 节弱相互作用部分讨论,而 α 衰变理论如下。

在纽约州斯克内克塔迪市的通用电气公司教育联络部的核素图[1)]中给出许多元素的 α 蜕变能量及半衰期。这张图也给出其他衰变方式的能量及寿命,在解释元素的蜕变中的流动图时同样是有用的工具。各种核过程的产物在核素图上的相对位置在图 23 中示出。核数据的另一个有用的来源是莱德勒等(Lederer *et al.*, 1967)发表的同位素表。核素图表明在地球上发现的发生天然 α 衰变的核素总数有三十种。这些核素是三种蜕变链的元素,它们开始于元素 $^{90}Th^{232}$、$^{92}U^{238}$ 及 $^{92}U^{235}$,终止于 $Z\geqslant 82$ 的元素,半衰期分别为 1.39×10^{10} 年, 4.51×10^9 年及 7.13×10^8 年。

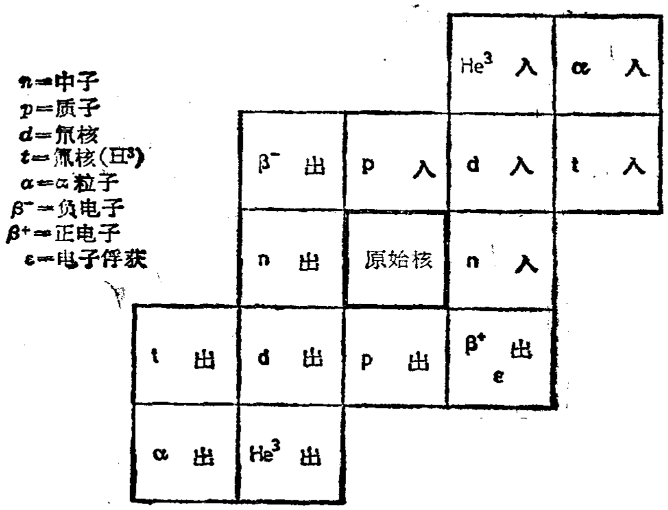


图 23 在核素图上各种核过程产物的相对位置

α 衰变能 E 定义为 α 粒子及反冲核的动能之和,它由下式给出:

$$E=[M(Z,\ A)-M(Z-2,\ A-4)-M_\alpha]c^2=E_\alpha[1+M_\alpha/M(Z-2,\ A-4)],\tag{4-20}$$

式中 $M(Z,\ A)$ 表示原子核$(Z,\ A)$的质量, E_α 及 M_α 分别是 α 粒子的动能及质量,同时已略去了电子结合能的质量当量。因为有时原子核经 α 衰变到达一个激发态,然后再辐射一个 γ 射线光子,所以(4-20)式给出的是 E 的最大值。E 的典型值的范围是 4~9 兆电子伏。

虽然衰变能 E 小于原子核的库仑势垒的能量, α 粒子还是将以每秒有限的几率 λ_α 逸出原子核。通常半衰期 $\tau_{1/2}$ 或平均寿命 τ 是以下式量度的:

1) 可参阅原子能出版社, 1977 年 8 月出版的《核素常用数据表》。——译者注

$$\lambda_\alpha=\frac{1}{\tau}=\frac{\ln 2}{\tau_{1/2}},\tag{4-21}$$

式中 $\ln 2={}^*0.6931472$。设在时间为零时能够发生 α 衰变的原子核数目是 N_0，则在时间 t 的原子核数目 N 由下式给出：

$$N(t)=N_0\exp[-\lambda_\alpha t],\tag{4-22}$$

或

$$\frac{dN(t)}{dt}=-\lambda_\alpha N(t)。$$

盖莫夫等 (Gamow, 1928; 以及 Gurney 和 Condon, 1928) 首先推导得出 λ_α 的理论公式。他们假定 α 粒子及原子核的势能 $V(r)$ 当 $r<R$ 时是由 $V(r)=-V_0$ 给出，而当 $r>R$ 时是由 $V(r)=2(Z-2)e^2/r$ 给出。这里 r 是原子核的中心与 α 粒子的间距，核半径 R 定义为核力成为主要力的最大距离。有关电子及中子散射的一些实验表明

$$R\approx 1.2\times 10^{-13}A^{1/3}\ \text{厘米}。\tag{4-23}$$

当把 $V(r)$ 用于薛定谔波动方程 ((2-126)式)，并在 $r=R$ 处满足连续性条件，则能证明 (Preston, 1962)：

$$\lambda_\alpha=\frac{2V}{R}\frac{\tan\alpha_0}{f}\exp\left[\frac{-8(Z-2)e^2}{\hbar}\left(\frac{M}{2E}\right)^{1/2}(\alpha_0-\sin\alpha_0\cos\alpha_0)\right]$$
$$\approx\frac{V}{2R}\{\exp[2.97(Z-2)^{1/2}R^{1/2}-3.95(Z-2)E^{-1/2}]\}。\tag{4-24}$$

上面数值近似式中的衰变能 E 的单位是兆电子伏，R 的单位是费密 (1 费密 $=10^{-13}$ 厘米)，折合质量 M 由下式给出：

$$M=\frac{M_\alpha M_{Z-2}}{M_\alpha+M_{Z-2}},$$

式中 M_{Z-2} 表示产核的质量，α 粒子与原子核的最终相对速度由下式给出：

$$v=v_\alpha-v_{Z-2}\approx V_\alpha[1+M_\alpha/M_{Z-2}],\tag{4-25}$$

式中 v_α 及 v_{Z-2} 分别是 α 粒子及反冲原子核的速度。

$$\alpha_0=\cos^{-1}\left[\frac{4(Z-2)e^2}{VR}\left(\frac{1}{2ME}\right)^{1/2}\right]^{-1/2}\approx\cos^{-1}\left[\frac{2(Z-2)e^2}{ER}\right]^{-1/2}$$

以及

$$f=\csc^2(KR)-\cot(KR)/KR,$$

式中

$$K\cot(KR)=-\frac{MV}{\hbar}\tan\alpha_0,$$

以及能态的能量 $E\approx 2(Z-2)e^2/R$。实验表明，对于偶 Z 核以及可用 $R=1.57\pm0.015\times10^{-13}A^{1/3}$ 厘米的 A 值，在 $E+V_0=0.52\pm0.01$ 兆电子伏及 $KR=2.986\pm0.005$ 情况下，(4-24)式能很好成立。

4.2. 热核反应率

4.2.1. 截面的定义及倒易定理

任何核反应的截面 σ 定义为每秒有效核反应数除以每秒每单位面积入射粒子数。反应 $1+2\to3+4$ 的截面 σ_{12} 与逆反应 $3+4\to1+2$ 的截面 σ_{34} 的关系为 (Blatt 和 Weisskopf, 1952 以及 Fowler, Caughlan 和 Zimmerman, 1967 的修正)：

$$\frac{\sigma_{34}}{\sigma_{12}}=\frac{(1+\delta_{34})g_1g_2A_1A_2E_{12}}{(1+\delta_{12})g_3g_4A_3A_4E_{34}},\tag{4-26}$$

当 $1=2$，上式中的克罗内克 δ 函数 δ_{12} 为 1；当 $1\neq2$ 则 δ_{12} 为零，原子核 i 的统计权重由

$g_i=2I_i+1$ 给出，其中 I_i 是原子核的自旋，A_i 是质量数，E_{12} 及 E_{34} 是在质心系中核反应式两边的动能。在极高温时，原子核可能处于激发态，它们与基态达到热平衡，在这种情况下，g_i 以核配分函数 $G_i=\sum_j g_{ij}\exp(-E_j/kT)$ 来代替，其中 E_j 是第 j 能态的激发能。典型带电粒子及中子的截面的简略曲线示于图 24，图中还示出麦克斯韦-玻耳兹曼分布函数以及 $^{13}C(p, \gamma)^{14}N$ 热核反应的实验截面。

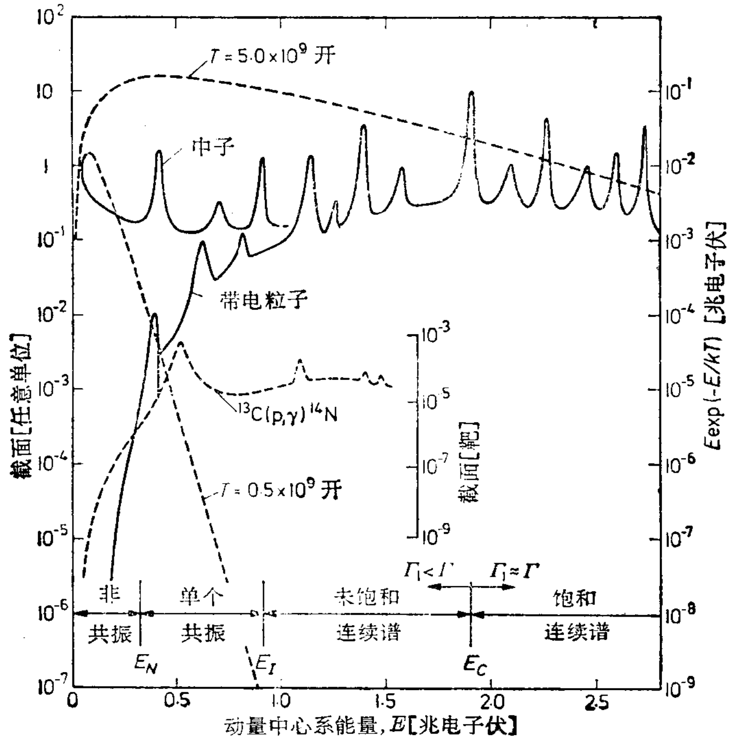


图 24 典型带电粒子截面及中子截面作为动量中心系的能量 E 的函数及麦克斯韦-玻耳兹曼分布函数（虚线）简图。图中还示出 $^{13}C(p, \gamma)^{14}N$ 反应的截面实测值（单位是靶），其中 E 是质子实验能量。前一曲线取自瓦戈纳（Wagoner, 1969）的文章，而后者取自西格雷夫（Seagrave, 1952）的文章

4.2.2. 非共振中子俘获截面

当一个原子核 (Z, A) 俘获一个中子 n 后，它就成为同一元素的同位素 $(Z, A+1)$，按照下列反应过程，能够辐射一个光子 γ：

$$(Z, A)+n\rightarrow(Z, A+1)+\gamma。\tag{4-27}$$

在恒星内部的正常条件下，一个中子与一个原子核之间的相对速度 v 由麦克斯韦-玻耳兹曼分布所确定。所以在粒子速度为麦克斯韦-玻耳兹曼分布时，有效截面 $\langle\sigma\rangle$ 由下式给出：

$$\langle\sigma\rangle=\frac{\langle\sigma v\rangle}{v_T}=\frac{\int_0^\infty \sigma v\varphi(v)dv}{v_T},\tag{4-28}$$

式中麦克斯韦加权函数 $\varphi(v)$ 由下式给出：

$$\varphi(v)=\frac{4}{\pi^{1/2}}\left(\frac{v}{v_T}\right)^2\exp\left[-\left(\frac{v}{v_T}\right)^2\right]\frac{dv}{v_T},\tag{4-29}$$

最可几速度 v_T 由下式给出:

$$v_T=\left(\frac{2kT}{M}\right)^{1/2}\approx{}^*1.283977\times10^4T^{1/2}\text{ 厘米·秒}^{-1},\tag{4-30}$$

式中 T 是气体温度, 折合中子质量 $M=M_nM_A/(M_n+M_A)\approx M_n={}^*1.6749543\times10^{-24}$ 克。这里 M_n 及 M_A 分别是中子及原子核的质量。

对于比铁族原子核更重的核的重元素, 在最可几能量 $kT={}^*8.61735\times10^{-5}T$ 电子伏时,平均中子俘获截面 $\langle\sigma\rangle$:

$$\text{在 } v_T=({}^*1.648597\times10^8T)^{1/2}\text{ 厘米·秒}^{-1}\text{ 测定}\quad\langle\sigma\rangle=\sigma_T。\tag{4-31}$$

表 38 列出在 30 千电子伏或 $T={}^*3.481350\times10^8$ 开或 $v_T={}^*2.395693\times10^8$ 厘米·秒$^{-1}$ 测定的截面值。在其他温度下的值可以用下列关系 $\langle\sigma\rangle\propto v_T^{-1}\propto T^{1/2}$ 算出。在有些情况下, 所给出的是热中子截面 $\sigma_{热}$。这些截面是在 $T=293$ 开或 $v_T={}^*2.197815$ 公里·秒$^{-1}$ 及 $kT={}^*0.0252488$ 电子伏测定的。

4.2.3. 非共振带电粒子截面

在低能量时, 非共振带电粒子相互作用是由库仑势垒穿透因素所支配的, 盖莫夫等 (Gamow, 1928; 以及 Gurney 和 Condon, 1928, 1929) 首先讨论了这些因素。析出这种能量相关性的因子,并把截面 $\sigma(E)$ 用下式表出是方便的:

$$\sigma(E)=\frac{S(E)}{E}\exp[-(E_G/E)^{1/2}],\tag{4-32}$$

式中质心系的动能 E 由下式给出:

$$E=\frac{Mv^2}{2}=\frac{M_1E_{L2}}{M_1+M_2},\tag{4-33}$$

相互作用粒子 1 及 2 的折合质量为 $M=M_1M_2/(M_1+M_2)$, M_1 及 M_2 分别是粒子 1 及 2 的质量, v 是粒子的相对速度, E_{L2} 是粒子 2 的实验室能量。

盖莫夫能量 E_G 由下式给出:

$$E_G=(2\pi\alpha Z_1Z_2)^2(Mc^2/2)=[0.98948Z_1Z_2A^{1/2}]^2\text{ 兆电子伏}。\tag{4-34}$$

这里精细结构常数 $\alpha=e^2/(\hbar c)={}^*(137.03604)^{-1}$, Z_1 及 Z_2 分别是以质子电荷为单位的粒子 1 及 2 的电荷,折合质量数 $A=A_1A_2/(A_1+A_2)$。

远离核共振时,截面因子 $S(E)$ 是动量中心系能量 E 的缓变函数, 而且可方便地用幂级数展开式表达为:

$$S(E)=S(0)\left[1+\frac{S'(0)}{S(0)}E+\frac{1}{2}\frac{S''(0)}{S(0)}E^2\right],\tag{4-35}$$

式中撇表示对 E 的微分。对于恒星中较重要的一些热核反应,这个表达式中常数的实验测量值将在第 4.4 节给出。附加的值是福勒等 (Fowler, Caughlan 和 Zimmerman 1967, 1974) 给出的。当反应通过共振的两翼进行时, 可以利用在较高能量时测定的共振求出 $S(E)$ (参看 (4-49)式)。

4.2.4. 中子及带电粒子的共振截面——布赖特-维格纳形状

对于能量为 E_R 的单一共振,核反应 $1+2\to3+4+Q$ 的截面 $\sigma(E)$ 由下式求得(Breit 和 Wigner, 1936):

$$\sigma(E)=\pi\lambda\!\!\!^{-2}\frac{\omega\Gamma_{12}\Gamma_{34}}{(E-E_R)^2+(\Gamma^2/4)}=\frac{0.657}{AE}\frac{\omega\Gamma_{12}\Gamma_{34}}{(E-E_R)^2+(\Gamma^2/4)}\text{ 靶}。\tag{4-36}$$

在上列数值近似中粒子 1 及 2 的动量中心系能量 E 的单位是兆电子伏，约化的德布罗意波长 $\lambda\!\!\!^{-}=\hbar/(Mv)$，其中 M 是粒子 1 及 2 的折合质量，v 是它们的相对速度。统计因子 $\omega=(2J+1)/[(2J_1+1)(2J_2+1)]$，其中 J 是共振态的角动量，J_1 及 J_2 分别是粒子 1 及 2 的角动量。共振态的总宽度 Γ 由 $\Gamma=\hbar/\tau=\Gamma_{12}+\Gamma_{34}+\cdots$ 给出，其中 τ 是共振态的有效寿命。分宽度 Γ_{12} 是粒子 1 与 2 再发射的宽度，Γ_{34} 是粒子 3 及 4 的发射宽度。计算分宽度值的详尽公式将在第 4.2.7 节给出。

4.2.5. 反应率、平均寿命及产能

具有相对速度为 v 的两个原子核 1 和 2 之间的反应率 r_{12} 由下式给出：

$$r_{12}=\frac{N_1N_2}{(1+\delta_{12})}\int_0^\infty v\sigma(v)\varphi(v)d^3v=\frac{N_1N_2\langle\sigma v\rangle}{(1+\delta_{12})}\ \text{反应次数}\cdot\text{厘米}^{-3}\cdot\text{秒}^{-1}$$

$$=\frac{N_1N_2}{(1+\delta_{12})}\int_0^\infty\left(\frac{2E}{M}\right)^{1/2}\sigma(E)\psi(E)dE\ \text{反应次数}\cdot\text{厘米}^{-3}\cdot\text{秒}^{-1},\qquad(4\text{-}37)$$

式中 $d^3v=4\pi v^2dv$，在质心系中动能是 $E=Mv^2/2$，折合质量 $M=M_1M_2/(M_1+M_2)$，其中 M_1 及 M_2 分别是原子核 1 及 2 的质量，$\sigma(v)$ 或 $\sigma(E)$ 是反应截面，N_1 及 N_2 是原子核 1 及 2 的数密度，$\varphi(v)dv=\psi(E)dE$ 是相对速度谱，若 1=2 克罗内克 δ 函数 δ_{12} 为 1；若 $1\neq2$ 则 δ_{12} 为零。对于质量密度为 ρ 的气体，核素 i 的数密度 N_i 常常用下列关系式以其质量分数 X_i 来表示：

$$N_i=\rho N_A\frac{X_i}{A_i}\ \text{厘米}^{-3},\qquad(4\text{-}38)$$

式中阿伏伽德罗数 $N_A=$*6.022045×10²³ 摩尔⁻¹，A_i 是原子 i 的质量，单位用原子质量单位。

对于非简并、非相对论性气体，相对速度谱是麦克斯韦分布并由下式给出：

$$\varphi(v)dv=\left(\frac{M}{2\pi kT}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{Mv^2}{2kT}\right)4\pi v^2dv\qquad(4\text{-}39)$$

或

$$\psi(E)dE=\frac{2E}{\sqrt{\pi}\,kT}\exp\left(-\frac{E}{kT}\right)\frac{dE}{(kTE)^{1/2}},$$

式中 T 为气体温度，M 为折合质量，v 为相对速度，E 为在质心系中的动能。

原子核 1 当与原子核 2 相互作用时，它的平均寿命 $\tau_2(1)$ 由下列关系式给出：

$$\lambda_2(1)=\frac{1}{\tau_2(1)}=N_2\langle\sigma v\rangle=\rho N_A\frac{X_2}{A_2}\langle\sigma v\rangle\ \text{秒}^{-1},\qquad(4\text{-}40)$$

式中 $\lambda_2(1)$ 是当原子核 1 与 2 相互作用时的衰变率。对于正向反应 $1+2\to3+4+Q$，产能 ε_{12} 由下式给出：

$$\varepsilon_{12}=r_{12}Q/\rho\ \text{尔格}\cdot\text{克}^{-1}\cdot\text{秒}^{-1},\qquad(4\text{-}41)$$

式中 r_{12} 是反应率，Q 是能量释放，ρ 是气体质量密度。

4.2.6. 非共振反应率

由(4-28)式、(4-30)式、(4-31)式及(4-37)式可知，对于非共振中子俘获反应，反应率 r_{1n} 为：

$$r_{1n}=N_1N_n\sigma_T\left(\frac{2kT}{M}\right)^{1/2}=N_1N_n\langle\sigma v\rangle,\qquad(4\text{-}42)$$

式中 N_1 及 N_n 分别是原子核及中子的数密度，σ_T 是在温度 T（在表 38 中给定为 $kT=30$ 千电子伏）的中子俘获截面，折合质量 $M=M_1M_n/(M_n+M_1)\approx M_n=$*1.6749543×10⁻²⁴ 克。

中子俘获反应的有效能量及能量分散量级为 $kT={}^{*}0.0861735\,T_9$ 兆电子伏，式中 T_9 是 $T/10^9$，T 的单位为开。

由(4–32)式、(4–33)式、(4–34)式、(4–35)式及(4–37)式可知，对于在非简并、非相对论性气体中的非共振带电粒子反应来说，反应率 r_{12} 为 (Burbidge, Burbidge, Fowler 和 Hoyle(B^2FH), 1957; Fowler, Caughlan 和 Zimmerman, 1974)：

$$r_{12}=\frac{N_1N_2\langle\sigma v\rangle}{(1+\delta_{12})}=\frac{N_1N_2}{(1+\delta_{12})}\left(\frac{8}{\pi M}\right)^{1/2}\frac{1}{(kT)^{3/2}}\int S(E)\exp\left[-\left(\frac{E_G}{E}\right)^{1/2}-\frac{E}{kT}\right]dE$$
$$=\frac{N_1N_2}{(1+\delta_{12})}\left(\frac{2}{M}\right)^{1/2}\frac{\Delta E_0}{(kT)^{3/2}}S_{eff}\exp\left[-\frac{3E_0}{kT}-\left(\frac{T}{T_0}\right)^2\right], \tag{4–43}$$

式中 N_1 及 N_2 是原子核 1 及 2 的数密度，若 1=2 克罗内克 δ 函数 δ_{12} 为 1；若 $1\neq2$ 则 δ_{12} 为零，折合质量 $M=M_1M_2/(M_1+M_2)$，T 是温度，若核截面不再按照(4–34)式给出的伽莫夫穿透因子变化时，就出现截止温度 T_0(Fowler, Caughlan 和 Zimmerman, 1974)。当有效能量 E_0 大于 E_G(E_G 值由(4–34)式给出)或当共振或连续谱开始时，就可能出现这种情况。

(4–43) 式中的积分在下式给出的有效热能 E_0 处出现它的峰值 (Fowler 和 Hoyle, 1964)：

$$E_0=[\pi\alpha Z_1Z_2kT(Mc^2/2)^{1/2}]^{2/3}=0.1220(Z_1^2Z_2^2A)^{1/3}T_9^{2/3}\ \text{兆电子伏}, \tag{4–44}$$

式中精细结构常数 $\alpha=e^2/\hbar c={}^{*}(137.03604)^{-1}$，$M$ 是折合质量，Z_1 及 Z_2 分别是原子核 1 及 2 的电荷，以质子电荷单位为单位，$A=A_1A_2/(A_1+A_2)$是折合原子质量，$T_9=T/10^9$，其中 T 是温度。(4–43)式的积分的峰在最大值的 $1/e$ 处得出全宽度：

$$\Delta E_0=4(E_0kT/3)^{1/2}=0.2368(Z_1^2Z_2^2A)^{1/6}T_9^{5/6}\ \text{兆电子伏}, \tag{4–45}$$

这是热能的有效范围的宽度(具有能量近于 E_0 和覆盖能量范围为 ΔE_0 的原子核主要对总的热核反应率有贡献)。截面因子 $S(E)$ 的有效值 $S_{有效}$ 由下式给出：

$$S_{有效}=S(0)\left[1+\frac{5kT}{36E_0}+\frac{S'(0)}{S(0)}\left(E_0+\frac{35}{36}kT\right)+\frac{1}{2}\frac{S''(0)}{S(0)}\left(E_0^2+\frac{89}{36}E_0kT\right)\right]\text{兆电子伏·靶}, \tag{4–46}$$

式中撇表示对在质心系中的动能 E 的微分。综合(4–38)式、(4–43)式、(4–44)式及(4–46)式，可以给出有用的结果：

$$N_A\langle\sigma v\rangle=C_1T_9^{-2/3}\exp[-C_2T_9^{-1/3}-(T_9/T_0)^2]\{1+C_3T_9^{1/3}+C_4T_9^{2/3}+C_5T_9+C_6T_9^{4/3}+C_7T_9^{5/3}\}\ \text{厘米}^3\cdot\text{秒}^{-1}\cdot(\text{摩尔})^{-1}, \tag{4–47}$$

式中

$$C_1=7.8324\times10^9(Z_1^2Z_2^2A)^{1/6}\frac{S(0)}{A^{1/2}},$$

$$C_2=4.2475(Z_1^2Z_2^2A)^{1/3},$$

$$C_3=9.810\times10^{-2}(Z_1^2Z_2^2A)^{-1/3},$$

$$C_4=0.1220\,\frac{S'(0)}{S(0)}(Z_1^2Z_2^2A)^{1/3},$$

$$C_5=8.377\times10^{-2}\frac{S'(0)}{S(0)},$$

$$C_6=7.442\times10^{-3}\frac{S''(0)}{S(0)}(Z_1^2Z_2^2A)^{2/3},$$

以及

$$C_7=1.299\times10^{-2}\frac{S''(0)}{S(0)}(Z_1^2Z_2^2A)^{1/3}。$$

温度 $T_9=T/10^9$，其中 T 是温度，单位为开，T_0 是有效截止温度；Z_1 及 Z_2 分别是原子核 1 及 2 的电荷，单位是质子电荷单位；折合原子质量 $A=A_1A_2/(A_1+A_2)$，其单位为原子质量单位；量 $S(0)$、$S'(0)$ 及 $S''(0)$ 取相应的单位兆电子伏·靶、靶及靶·兆电子伏$^{-1}$。原子质量可以由表 38 给出的常数以及(4-11)式定出。福勒等(Fowler, Caughlan 和 Zimmerman, 1967, 1974；以及 Barnes, 1971)给出了许多热核反应的 $S(0)$、$S'(0)$、$S''(0)$ 的实验测定值。在第 4.4 节中对于恒星中较重要的热核反应给出了(4-47)式中常数的数值。

4.2.7. 共振反应率

由(4-36)式、(4-37)式及(4-39)式可知，在非相对论性、非简并气体中，共振反应的反应率 r_{12} 由下式给出：

$$r_{12}=\frac{N_1N_2}{(1+\delta_{12})}\langle\sigma v\rangle=\frac{N_1N_2}{(1+\delta_{12})}\int_0^\infty\frac{0.657}{A\,E}\,\frac{\omega\Gamma_{12}\Gamma_{34}}{(E-E_R)^2+(\Gamma^2/4)}$$
$$\times\left[\frac{2E}{M}\right]^{1/2}\left[\frac{2E}{\sqrt{\pi}\,kT}\exp\left(-\frac{E}{kT}\right)\frac{1}{(kTE)^{1/2}}\right]dE, \qquad (4\text{-}48)$$

式中 N_1 及 N_2 分别是粒子 1 及 2 的数密度；E 是在质心系中的动能；折合原子质量 $A=A_1A_2/(A_1+A_2)$，折合质量 $M=M_1M_2/(M_1+M_2)$；E_R 是共振能量；T 是气体温度；统计因子 $\omega=(2J+1)/[(2J_1+1)(2J_2+1)]$，其中 J 是共振态的角动量，J_1 及 J_2 分别是粒子 1 及 2 的角动量，Γ 是共振态的宽度，分宽度 Γ_{12} 是 1 与 2 的再发射的宽度，Γ_{34} 是 3 与 4 发射的宽度；数字常数 0.657 是当能量 E 以兆电子伏为单位、截面以靶为单位的情况。

当(4-44)式给出的有效热能 E_0 远小于共振能量 E_r 时，则布赖特-维格纳共振截面可以在它的两翼中求得以定出截面因子：

$$S(E)=\frac{0.657}{A}\,\frac{\omega\Gamma_{12}(E)\Gamma_{34}}{(E-E_r)^2+(r^2/4)}\exp[0.98948Z_1Z_2A^{1/2}E^{-1/2}], \qquad (4\text{-}49)$$

式中 $S(E)$ 的单位是兆电子伏·靶，E 的单位是兆电子伏。(4-49)式可以利用在高能时的共振测定求出，然后可利用(4-35)式、(4-43)式及(4-46)式的非共振公式而得到在低能时的反应率。

当恒星有效能量范围(对中子相互作用来说，有效能量范围是 kT 的量级；对带电粒子相互作用来说，这个量级由(4-45)式的 ΔE_0 给出，中心能量 E_0 由(4-44)式给出)包括共振能量时，则必须用(4-48)式。只要共振宽度 Γ 远小于相互作用粒子能量的有效分散值(当包含中子时，小于 kT；当为两个带电粒子时，小于 ΔE_0)，(4-48)式就可以积分而得到有用的结果：

$$N_A\langle\sigma v\rangle=C_8T_9^{-3/2}\exp(-C_9/T_9)\,\text{厘米}^3\cdot\text{秒}^{-1}(\text{克}\cdot\text{摩尔})^{-1}, \qquad (4\text{-}50)$$

式中

$$C_8=1.53986\times10^{11}A^{-3/2}(\omega\gamma),$$
$$C_9=11.605E_R,$$

温度 $T_9=T/10^9$，其中温度 T 的单位是开，折合原子质量 A 的单位是原子质量单位，因子 $(\omega\gamma)=\omega\Gamma_{12}\Gamma_{34}/\Gamma$ 的单位是兆电子伏，共振能量 E_R 的单位是兆电子伏。原子质量可以根据表 38 给出的常数以及(4-11)式来定出。福勒等(Fowler, Caughlan 和 Zimmerman, 1967, 1974)给出 $(\omega\gamma)$ 及 E_R 的实验室测定值。在第 4.4 节中给出对于恒星中许多较重要的热核反应的常数 C_8 及 C_9 的值。当发生几种共振时，净反应率由迭加确定：

$$N_A\langle\sigma v\rangle=\sum_n C_{8n}T_9^{-3/2}\exp(-C_{9n}/T_9), \qquad (4\text{-}51)$$

式中常数 C_{8n} 及 C_{9n} 是由(4-50)式对第 n 个共振给出的适当的常数。

当位于盖莫夫峰内的共振密度变得足够大时，我们能够把(4-51)式中的求和用积分 dE/D 来代替，其中 D 是在盖莫夫峰内的平均能级距离。这主要发生在比镁更重的元素以及能量超过几兆电子伏的情况。因此我们得出(Hayashi, Hoshi 和 Sugimoto, 1962)：

$$r_{12}=\rho\frac{X_1}{A_1}N_2N_A\langle\sigma v\rangle$$

$$=\frac{(2\pi)^{3/2}\hbar^2N_1N_2}{(MkT)^{3/2}}\frac{\omega}{D}\int_0^\infty\frac{\langle\Gamma_1(E)\rangle\langle\Gamma_2(E)\rangle}{\langle\Gamma(E)\rangle}\exp\left(-\frac{E}{kT}\right)dE, \tag{4-52}$$

式中 $M=A$(1 原子质量单位)是相互作用原子核的折合质量，$A=A_1A_2/(A_1+A_2)$ 是折合原子质量数；ω($(2J+1)/[(2I_1+1)(2I_2+1)]$的平均)是平均自旋因子，其中 J 是角动量的共振值，I_1 及 I_2 是核自旋；Γ_1、Γ_2 及 Γ 分别表示吸收宽度、发射宽度及总宽度；$\langle\ \rangle$ 表示平均值。考虑到在有关的温度范围内，发射宽度通常是远大于吸收宽度的，所以(4-52)式化成：

$$\langle\sigma v\rangle=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{2\pi\hbar^2}{MkT}\right)^{3/2}\frac{\Delta E_0}{\hbar}\frac{\omega\Gamma_1(E_0)}{D}\exp\left(-\frac{E_0}{kT}\right) \tag{4-53}$$

$$\approx\alpha T_9^{-2/3}\exp(-\beta T_9^{-1/3})\text{厘米}^3\cdot\text{秒}^{-1}, \tag{4-54}$$

式中 M 是相互作用原子核的折合质量，有效热能 E_0 由(4-44)式给出，热能的有效范围 ΔE_0 由(4-45)式给出，以及

$$\alpha=1.78\times10^{-12}(Z_1^5Z_2^5A^{-11})^{1/6}\frac{\theta^2}{DR^{3/2}}\exp[1.05(Z_1Z_2AR)^{1/2}],$$

$$\beta=4.25(Z_1^2Z_2^2A)^{1/3}, \tag{4-55}$$

平均能级距离 D 以兆电子伏为单位。当 $A\gtrsim20$ 时，我们得 $\omega\approx1$ 及 $D\approx0.1$ 兆电子伏。约化宽度 θ 与 D 的关系为：

$$\theta^2=\frac{2\lambda_0M}{3\pi\hbar^2}RD, \tag{4-56}$$

式中 $\lambda_0\approx10^{-13}$ 厘米是原子核内的核子的特征波长，相互作用半径 R 由下式给出：

$$R\approx1.4\times10^{-13}[A_1^{1/3}+A_2^{1/3}]\text{厘米。} \tag{4-57}$$

分宽度 Γ 可以用下述表达式求出：

$$\Gamma=\frac{3\hbar v}{R}\theta_l^2P_l, \tag{4-58}$$

式中 R 是相互作用半径，$v=(2E/M)^{1/2}$ 是粒子的相对速度；对于具有相对角动量 l 的粒子，约化宽度 θ_l^2 通常处在 $0.01\leqslant\theta_l^2\leqslant1.0$ 的范围内；穿透因子 P_l 由下式给出：

$$P_l=[F_l^2(R)+G_l^2(R)]^{-1}, \tag{4-59}$$

式中 $F_l(R)$ 及 $G_l(R)$ 是处在相互作用半径 R 处的库仑场中的带电粒子的薛定谔波动方程的正则解及非正则解。弗勒伯格等(Fröberg, 1955; Hull 和 Breit, 1959)讨论并列表给出了库仑波函数 $F_l(R)$ 及 $G_l(R)$。穿透因子的近似值可应用温侧-克喇末-布里渊(WKB)方法(Wentzel, 1926; Kramers, 1926; Brilloin, 1926)解薛定谔方程得出(参看 Bethe, 1937; van Horn 和 Salpeter, 1967)。若库仑势垒能 E_c 由下式给出：

$$E_c=\frac{Z_1Z_2e^2}{R}\approx1.4\frac{Z_1Z_2}{R}\text{兆电子伏}, \tag{4-60}$$

式中 R 的单位是费密($R\approx1.4A^{1/3}$ 费密)，则穿透因子的 WKB 解为：

$$P_l \approx \left(\frac{E_c}{E}\right)^{1/2} \exp[-W_1] = \left(\frac{E_c}{E}\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{2\pi Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v} + 4\left(\frac{E_c}{\hbar^2/2MR^2}\right)^{1/2} - 2l(l+1)\left(\frac{\hbar^2/2MR^2}{E_c}\right)^{1/2}\right]$$

$$\approx \left(\frac{E_c}{E}\right)^{1/2} \exp\left[-(E_G/E)^{1/2} + 1.05(ARZ_1Z_2)^{1/2} - 7.62\left(l+\frac{1}{2}\right)^2 (ARZ_1Z_2)^{-1/2}\right], \tag{4-61}$$

式中动量中心系能量 $E \ll E_c$，盖莫夫能量 E_G 由(4-34)式给出；M 是相互作用原子核的折合质量，所有能量的单位都是兆电子伏，R 的单位是费密。将(4-61)式代入(4-58)式，我们得到：

$$r \approx 6.0\theta_l^2\left(\frac{\hbar^2}{2MR^2}E_c\right)^{1/2} \exp(-W_e) \approx 33.0\theta_l^2\left(\frac{Z_1Z_2}{AR^3}\right)^{1/2} \exp(-W_l)\ \text{兆电子伏}, \tag{4-62}$$

式中 R 的单位也是费密。

在高温时，能量高到足以在共振能量的量级以上，低能核态可能受到激发。对于初始核的受激态热分布的特殊情况，以及通过复合核的共振所进行的反应，我们得到的关系式为(Bahcall 和 Fowler, 1969)：

$$N_A\langle\sigma v\rangle_e = \sum_n \frac{G_1^g}{G_1} N_A\langle\sigma v\rangle_g \left[1 + \sum_{e\neq 0} \frac{\Gamma_{12}^e}{\Gamma_{12}^g}\right], \tag{4-63}$$

式中求和是对 n 个共振进行的；$N_A\langle\sigma v\rangle_g$ 是假定所有靶原子核都处于它们的基态 g 的反应率，并由(4-50)给出；Γ_{12}^e 是通过再发射入射粒子 2 而核 1 仍留在激发态 e 的共振衰变的分宽度；Γ_{12}^g 是衰变到达靶原子核基态的宽度，并且因为势垒穿透因子的作用，对于相同的共振来说 Γ_{12}^g 大于 Γ_{12}^e；而核配分函数 G_1 及 G_1^g 由下式给出：

$$G_1 = \sum_{e=0}^{n} G_1^e,$$

式中

$$G_1^e = (2J_1^e + 1)\exp\left(-\frac{E_1^e}{kT}\right)$$

及

$$G_1^g = 2J_1^g + 1,$$

求和是对 n 个受激态 $e=0、1、2\cdots、n$ 进行的，J_1^e 是靶原子核 1 的自旋，E_1^e 是所讨论的受激态的激发能量。巴卡尔等(Bahcall 和 Fowler, 1970)已计算得出质量数 $A \leqslant 40$ 而处于低受激态的原子核的核配分函数随温度变化的关系。米肖等(Michaud 和 Fowler, 1970; 以及 Arnould, 1972)已进一步讨论了受激态对热核反应的影响。当有效热能 E_0 大于库仑势垒能 E_c，并且出射粒子是一个光子 γ 或者如果穿透因子在感兴趣的范围内变化不很大，则附加的反应率项由下式给出(Wagoner, 1969)：

$$N_A\langle\sigma v\rangle = C_{10}\exp(-C_{11}/T_9), \tag{4-64}$$

式中常数 C_{10} 可由实验测定，$C_{11} = 11.605E_e$，其中 E_c 由(4-60)式给出。

4.2.8. 逆反应率及光致衰变

对于反应 $1+2 \rightarrow 3+4+Q$，我们有倒易关系式：

$$N_A\langle 34\rangle = C_{12}[\exp(-C_{13}/T_9)]N_A\langle 12\rangle, \tag{4-65}$$

式中 $\langle 12\rangle$ 及 $\langle 34\rangle$ 分别表示正向及反向反应的 $\langle\sigma v\rangle$，常数 C_{12} 及 C_{13} 由下式给出(Blatt 和 Weisskopf, 1952; Fowler, Caughlan 和 Zimmerman, 1967)：

$$C_{12}=\frac{(1+\delta_{34})}{(1+\delta_{12})}\frac{g_1g_2}{g_3g_4}\left[\frac{A_1A_2}{A_3A_4}\right]^{3/2} \tag{4-66}$$

以及 $C_{13}=11.605Q_6$，若 $1=2$，上式中的克罗内克 δ 函数 δ_{12} 为 1，若 $1\neq2$，则 δ_{12} 为零；原子核 i 的统计权重 g_i 是 $g_i=(2I_i+1)$，其中 I_i 是核自旋；A_i 是 i 的原子质量，以原子质量单位为单位，Q_6 是正向反应释放出的能量，单位是兆电子伏。福勒等 (Fowler, Caughlan 和 Zimmerman, 1967；以及 Bahcall 和 Fowler, 1969) 给出了包括 5 种粒子的反应的类似倒易公式。在高温时，即 $T>10^9$ 开，某些核态可能被激发，用 $G_1G_2/(G_3G_4)$ 代替 $g_1g_2/(g_3g_4)$ 可将(4-66)式推广，其中 G_i 是第 i 个原子核的配分函数(Bahcall 和 Fowler, 1969)。巴卡尔等(Bahcall 和 Fowler, 1970)已计算得出了质量数 $A\leqslant40$ 处于低受激态的原子核的核配分函数随温度变化的函数。

对于辐射俘获反应 $1+2\rightarrow3+\gamma+Q$ 的特殊情况，反向光致衰变的寿命 $\tau_\gamma(3)$ 由下式给出(Fowler, Caughlan 和 Zimmerman, 1967)：

$$\lambda_\gamma(3)=\frac{1}{\tau_\gamma(3)}=C_{14}T_9^{3/2}[\exp(-C_{13}/T_9)]N_A\langle12\rangle\ \text{秒}^{-1}, \tag{4-67}$$

式中 $\langle12\rangle$ 是正向反应的 $\langle\sigma v\rangle$，常数 C_{13} 由(4-66)式给出，常数 C_{14} 由下式给出：

$$C_{14}=0.987\times10^{10}\frac{g_1g_2}{(1+\delta_{12})g_3}\left(\frac{A_1A_2}{A_3}\right)^{3/2}。 \tag{4-68}$$

第 4.4 节给出恒星中重要热核过程的常数 C_{12}、C_{13} 及 C_{14} 的值。

4.2.9. 电子屏蔽——弱屏蔽及强屏蔽

在稠密气体中，每一个原子核吸引邻近的电子并排斥邻近的原子核，因此形成一层屏蔽的电子云。这种电子屏蔽对反应率的作用依赖于密度-温度的组合。这里我们讨论弱屏蔽及强屏蔽效应，对于这些屏蔽来说，只要把实验室测量所确定的反应率 r_{12} 乘上一个屏蔽因子 f_{12} 就得到正确的反应率。在足够高的密度及低温时，反应率有显著的变化，这种情况将在下一节关于超密态核反应中加以讨论。

在低密度及高温时，原子核相当于经典电离气体，本底等离子体的效应可用德拜-许克尔(Debye-Hückel)理论计算得出。在略高的密度及略低的温度下，本底原子核进入库仑晶格中被冻结，但是反应核可以认为是自由的。不同的范围随着有效热能 E_0、每个粒子的热能 kT 以及每个原子核的静电能 E_e 而变化。非共振反应的有效热能由下式给出(参看(4-44)式)：

$$E_0=\frac{1}{3}kT\left(\frac{27\pi^2}{4}\frac{E^*}{kT}\right)^{1/3}\approx0.122(Z_1^2Z_2^2A)^{1/3}T_9^{2/3}\ \text{兆电子伏}, \tag{4-69}$$

式中 $T_9=T/10^9$，A 是反应原子核的折合原子量，$A=A_1A_2/(A_1+A_2)$，Z_1 及 Z_2 分别是两个反应原子核的质子数，它们的有效库仑能量由下式给出：

$$E^*=\frac{Z_1Z_2e^2}{r^*}=7.9462\times10^{-8}A(Z_1Z_2)^2\ \text{尔格}, \tag{4-70}$$

式中相互作用半径 r^* 由下式给出：

$$r^*=\frac{(A_1+A_2)}{2A_1A_2Z_1Z_2}\frac{\hbar^2}{e^2m_H}=\frac{29.030}{AZ_1Z_2}\ \text{费密}, \tag{4-71}$$

式中 A 是折合原子量的两倍，即 $A=2A_1A_2/(A_1+A_2)$；$m_H={}^*1.6735595\times10^{-24}$ 克。对于半径为 a_e 的维格纳-赛茨球 (Wigner-Seitz, 1934)，负电荷为 $-4\pi ea_e^3N_e/3$，每个原子核的静电相互作用能量由下式给出：

$$E_c=\frac{9}{10}\frac{Z^2e^2}{a_s}=1.8278\lambda E^*, \tag{4-72}$$

式中 N_e 是电子密度；以及

$$\lambda=r^*\left(\frac{N_e}{2Z_1}\right)^{1/3}=\frac{A_1+A_2}{2A_1A_2Z_1Z_2}\left[\frac{1}{Z_1\mu_e}\frac{\rho}{1.3574\times10^{11}\text{克·厘米}^{-3}}\right]^{1/3}, \tag{4-73}$$

这里 ρ 是气体质量密度；平均电子分子量 μ_e 由下式给出：

$$\mu_e^{-1}=\sum_i X_i\frac{Z_i}{A_i}\left[1+\frac{Z_i m}{A_i m_H}\right]^{-1}, \tag{4-74}$$

式中 X_i、Z_i 及 A_i 分别是 i 种原子核的质量分数、质子数及原子量，m 是电子质量以及 m_H $=$*1.6735595×10^{-24} 克。弱屏蔽及强屏蔽条件由下式给出：

$$\begin{aligned}&E_c\ll kT \quad 及 \quad E_0\gg E_c \qquad (弱屏蔽);\\&E_c\gg kT \quad 及 \quad E_0\gg E_c \qquad (强屏蔽)。\end{aligned} \tag{4-75}$$

非共振反应率的弱屏蔽相乘改正因子由下式给出 (Salpeter, 1954; Schatzman, 1948, 1958; Salpeter 和 van Horn, 1969)：

$$f_{12}=\exp\left[\sqrt{3}\frac{Z_2}{Z_1}\left(\frac{\mu_e}{Z_1}\right)^{1/2}\xi\Gamma_{21}^{3/2}\right] \tag{4-76}$$

$$\approx\exp[0.188Z_1Z_2\xi\rho^{1/2}T_6^{-3/2}], \tag{4-77}$$

式中 ρ 是气体质量密度，$T_6=T/10^6$，因子 ξ 由下式给出：

$$\xi^2=\sum_i X_i\frac{Z_i^2}{A_i}\left[1+\frac{Z_i}{A_i}\frac{m}{m_H}\right]^{-1}+\frac{f'}{f}\frac{1}{\mu_e} \tag{4-78}$$

$$\approx\sum_i\frac{X_i}{A_i}[Z_i^2+Z_i], \tag{4-79}$$

式中 f'/f 是费密-狄拉克分布函数 f 对其自变量的对数导数，对于非简并气体 f'/f 为 1，对于完全简并的电子气 f'/f 为零。对于电荷为 Z 的原子核，库仑能与热能的无量纲比值 Γ_Z 由下式给出：

$$\Gamma_Z=Z^{5/3}\frac{e^2}{kT}\left(\frac{4\pi N_e}{3}\right)^{1/3}\approx Z^{5/3}\frac{5.7562\times10^8\text{开}}{T}\left(\frac{1}{\mu_e}\frac{\rho}{6.203\times10^{13}\text{克·厘米}^{-3}}\right)^{1/3}。 \tag{4-80}$$

对于强屏蔽，非共振反应率的相乘改正因子由下式给出 (Salpeter, 1954; Schatzman, 1948, 1958; Wolf, 1965; Salpeter 和 van Horn, 1969)：

$$f_{12}=\exp[U_{s0}+U_{s1}] \tag{4-81}$$

$$\approx\exp\left\{0.205[(Z_1+Z_2)^{5/3}-Z_1^{5/3}-Z_2^{5/3}]\left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)^{1/3}T_6^{-1}\right\}, \tag{4-82}$$

式中 $T_6=T/10^6$；

$$U_{s0}=0.9[\Gamma_{Z_1+Z_2}-\Gamma_{Z_1}-\Gamma_{Z_2}], \tag{4-83}$$

其中 $\Gamma_{Z_1+Z_2}$、Γ_{Z_1} 及 Γ_{Z_2} 是将(4-80)式中的 Z 分别以 (Z_1+Z_2)、Z_1 及 Z_2 代替而得出；而

$$\exp[U_{s1}]=\frac{(1+0.3\Gamma_{Z_1+Z_2}+0.266\Gamma_{Z_1+Z_2}^{3/2})}{(1+0.3\Gamma_{Z_1}+0.266\Gamma_{Z_1}^{3/2})(1+0.3\Gamma_{Z_2}+0.266\Gamma_{Z_2}^{3/2})}。 \tag{4-84}$$

范霍恩等(van Horn 和 Salpeter, 1969)还讨论了共振反应的屏蔽改正，并对三级 α 反应给出明确的改正公式。他们也给出与弱屏蔽及强屏蔽情况有关的内插公式。德威特等 (de Witt, Graboske 和 Cooper, 1973; 以及 Graboske, de Witt, Groosman 和 Cooper, 1973) 给出了在等离子体屏蔽核反应中任意电荷条件下的广义屏蔽函数。

4.2.10. 超密态核反应

在足够高的密度及低温度时，本底核及反应核两者都束缚在库仑晶格中而反应成为超密态的。超密态反应是其反应率对温度相对不灵敏而对密度很灵敏的一种反应。当由(4-69)式给出的有效热能 E_0 远小于由(4-72)式给出的每个原子核的静电能 E_c 时，超密态条件就成立。即对于超密态核反应

$$E_0 \ll E_c$$

及

$$\beta = 0.032234\lambda \left[AZ_1^2Z_2^2 \frac{7.6696\times10^{10}\text{ 开}}{T} \right]^{2/3} \gg 1, \tag{4-85}$$

这里密度参量 λ 由下式给出：

$$\lambda = \frac{1}{2AZ_1Z_2}\left(\frac{1}{Z_1\mu_e}\frac{\rho}{1.3574\times10^{11}\text{ 克·厘米}^{-3}}\right)^{1/3}, \tag{4-86}$$

折合原子量 $A=A_1A_2/(A_1+A_2)$，ρ 是质量密度，μ_e 是由(4-74)式给出的平均电子分子量，Z_1 及 Z_2 是两个反应原子核中各自的质子数。

怀尔德哈克等(Wildhack, 1940; Zeldovich, 1958; Cameron, 1959; Wolf, 1965; 以及 Salpeter 和 van Horn, 1969) 已考虑过超密态核反应。萨皮得等 (Salpeter 和 van Horn 1969) 给出"零温度"反应率为：

$$r_{12} = \begin{pmatrix}3.90\\4.76\end{pmatrix}\times10^{46}\frac{\rho}{\mu_A}A^2Z^4S\lambda^{7/4}\exp\left[-\begin{pmatrix}2.638\\2.516\end{pmatrix}\lambda^{-1/2}\right]\text{反应次数·厘米}^{-3}\text{·秒}^{-1}, \tag{4-87}$$

这里在圆括号中上面及下面的数相应于对势函数的两种不同的近似，质量密度 ρ 的单位是克·厘米$^{-3}$，截面因子 S 的单位是兆电子伏·靶。平均分子量 μ_A 由下式给出：

$$\mu_A^{-1} = \sum_i \frac{X_i}{A_i}\left[1+\frac{Z_i}{A_i}\frac{m}{m_H}\right]^{-1}, \tag{4-88}$$

式中 X_i、Z_i 及 A_i 分别是 i 种原子核的质量分数、质子数及原子量，m 是电子质量以及 m_H =*1.6735595×10^{-24} 克。截面因子 S 由(4-35)式及(4-49)式定义，密度因子 λ 由(4-86)式给出。由(4-86)式及(4-87)式可知，反应率是质量密度 ρ 的灵敏函数，并且按如下方式变化：$r_{12}\propto\rho^{19/12}\exp[-C\rho^{-1/6}]$，其中 C 是常数。由(4-41)式可知，能量产生 ε_{12} 由下式给出：

$$\varepsilon_{12} = r_{12}Q/(2\rho)\text{ 尔格·克}^{-1}\text{·秒}^{-1}, \tag{4-89}$$

式中 r_{12} 由(4-87)式给出，Q 是每次反应释出的能量。

卡梅伦(Cameron, 1959)对下列反应中超密态核反应率随温度及密度两者变化的函数给出了近似数值表达式：

$$\left.\begin{aligned}
3He^4 &\longrightarrow C^{12};\\
C^{12}+He^4 &\longrightarrow O^{16}+\gamma;\\
N^{14}+He^4 &\longrightarrow F^{18}+\gamma;\\
&\qquad\quad\downarrow\\
&\qquad O^{18}+\beta^{+}+\nu_e;\\
O^{16}+He^4 &\longrightarrow Ne^{20}+\gamma,
\end{aligned}\right\} \tag{4-90}$$

还给出了重离子 C^{12}、O^{16}、Ne^{24}、Mg^{32}、Si^{38}、S^{44}、A^{50} 和 Ca^{56} 与它们本身的反应的近似表达式。他断言在恒星演化的晚期阶段氦的超密态核反应可能会引起恒星爆发。

萨皮得等(Salpeter 和 van Horn, 1969)也给出当 $E_0 \approx E_c$ 时对强屏蔽情况的超密态核改正，并给出温度改正的超密态核反应率 $r_{12}(T)$。

$$\begin{aligned}\frac{r_{12}(T)}{r_{12}}-1=&\begin{pmatrix}0.0430\\0.0485\end{pmatrix}\lambda^{-1/2}\left[1+\begin{pmatrix}1.2624\\2.9314\end{pmatrix}\exp\left(-8.7833\,\beta^{3/2}\right)\right]^{-1/2}\\&\times\exp\left\{-7.272\beta^{3/2}+\lambda^{-1/2}\begin{pmatrix}1.2231\\1.4331\end{pmatrix}\exp\left(-8.7833\,\beta^{3/2}\right)\right.\\&\left.\times\left[1-\begin{pmatrix}0.6310\\1.4654\end{pmatrix}\exp\left(-8.7833\,\beta^{3/2}\right)\right]\right\},\end{aligned}\tag{4-91}$$

式中 r_{12} 由(4-87)式给出，λ 及 β 分别由(4-86)式及(4-85)式给出。

4.3. 弱相互作用过程

4.3.1. 电子中微子、μ 中微子、μ 子、π 介子及弱相互作用理论

泡利(Pauli, 1930) 首先指出只有当质子 p 和中子 n 有弱相互作用才能解释放射性 β 衰变

$$\begin{aligned}&n\to p+\beta^-+\bar{\nu}_e;\\&p\to n+\beta^++\nu_e,\end{aligned}\tag{4-92}$$

其中 β^- 称为负电子，β^+ 称为正电子，ν_e 是电子中微子，$\bar{\nu}_e$ 是反电子中微子。表 37 列出负电子及正电子的性质，而表 39 列出电子中微子以及本节引入的其他粒子的性质。

强相互作用是用来说明使质子与中子结合在一起的相互作用核力的，它被认为是由于称为 π 介子的另一种基本粒子引起的 (Yukawa, 1935, 1937; Oppenheimer 和 Serber, 1937)。就象光子是电磁场量子化的结果那样，π 介子是解释核力场的量子化的结果。强相互作用由下式给出：

$$\left.\begin{aligned}&p\to n+\pi^+;\\&n\to p+\pi^-;\\&p\to p+\pi^0;\\&n\to n+\pi^0,\end{aligned}\right\}\tag{4-93}$$

其中 π^+ 及 π^- 是带电 π 介子，并引入了中性 π 介子 π^0(Yukawa, 1938) 以解释核力的电荷独立性。

在汤川的理论论证以前，已经观测到被称为宇宙线的地球外的高能粒子 (Hess, 1911, 1912; Kolhörster, 1913)。据信汤川理论中的大质量 π 介子可能是宇宙线的一种成分，而且不久发现了这样一种成分(Anderson 和 Neddermeyer, 1936)。对这种宇宙线成分的截面及寿命的详尽考察(Neddermeyer 和 Anderson, 1937; Street 和 Stevenson, 1937; Nishina, Takeuchi 和 Ichimiya, 1937; Rossi, 1939)表明这种粒子不同于核 π 介子。所以宇宙线介子被称为 μ 子或 μ 介子，并且引入了两种介子的一种理论(Sakata 和 Inoue, 1946; Marshak 和 Bethe, 1947)。根据这个理论，核 π 介子与宇宙线 μ 子是由下列衰变反应相互联系着的：

$$\left.\begin{aligned}&\pi^+\to\mu^++\nu_\mu;\\&\pi^-\to\mu^-+\bar{\nu}_\mu;\\&\pi^0\to\gamma+\gamma,\end{aligned}\right\}\tag{4-94}$$

其中 ν_μ 是 μ 中微子，$\bar{\nu}_\mu$ 是反 μ 中微子，γ 表示 γ 射线光子。后来还发现 π 介子不仅是

表 39 电子、中微子、μ 中微子、μ 子及 π 介子的特性[1]

粒子	符号	自旋	静质量 (兆电子伏)	磁矩 ($e\hbar/2m_{\mu}c$)	平均寿命 (秒)	衰变模式	相对比率	Q (兆电子伏)
电子中微子	ν_e, $\bar{\nu}_e$	1/2	<0.00006	0	∞			
μ 中微子	ν_μ, $\bar{\nu}_\mu$	1/2	<1.2	0	∞			
μ 子	μ^+, μ^-	1/2	105.6594(4)	1.00116616(31)	2.1994(6) $E-6$	$\mu^\pm \to \nu_e/\bar{\nu}_e + \bar{\nu}_\mu/\nu_\mu + e^\pm$	~100%	105
						$\mu^\pm \to e^\pm + \gamma + \gamma$	<1.6 E-5	105
						$\mu^\pm \to 2e^\pm + e^\mp$	<6 E-9	104
						$\mu^\pm \to e^\pm + \gamma$	<2.2 E-8	105
π 介子	π^+, π^-	0	139.576(11)	0	2.6024(24) $E-8$	$\pi^\pm \to \mu^\pm + \nu_\mu/\bar{\nu}_\mu$	~100%	34
						$\pi^\pm \to e^\pm + \nu_e/\bar{\nu}_e$	1.24(3) E-4	139
						$\pi^\pm \to \mu^\pm + \gamma + \nu_\mu/\bar{\nu}_\mu$	1.24(25) E-4	34
						$\pi^\pm \to e^\pm + \pi^0 + \nu_e/\bar{\nu}_e$	1.02(7) E-8	4
						$\pi^\pm \to e^\pm + \gamma + \nu_e/\bar{\nu}_e$	3.0(5) E-8	139
	π^0	0	134.972(12)	0	0.84(10) $E-16$	$\pi^0 \to \gamma + \gamma$	98.84(4)%	135
						$\pi^0 \to \gamma + e^+ + e^-$	1.16(4)%	134
						$\pi^0 \to 2e^+ + 2e^-$	3.47 E-5	133
						$\pi^0 \to \gamma + \gamma + \gamma$	<5 E-6	135

[1] 在每一引用值后面圆括号内的值代表所引用值最后两位数字的标准误差。表中的参数值取自罗森菲尔德等 (Rosenfeld 等, 1968; Söding 等, 1972) 的文章。$\mu^\pm$ 及 $\pi^\pm$ 两者都带 $\pm e$ 的电荷, 其中 e 是电子的电荷。衰变方式的表示法 $\pi^\pm \to \mu^\pm + \nu_\mu/\bar{\nu}_\mu$ 意指 $\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$ 及 $\pi^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu$。

一种宇宙线成分 (Lattes, Occhialini 和 Powell, 1947) 而且也是粒子加速器轰击的产物 (Gardner 和 Lattes, 1948)。把(4–94)式代入(4–93)式, 我们得到下列反应:

$$n \to p + \mu^- + \bar{\nu}_\mu;$$
$$p \to n + \mu^+ + \nu_\mu, \tag{4-95}$$

这些反应类似于(4–92)式的电子中微子反应。除了(4–95)式给出的相互作用以外, μ 子按照下列反应衰变:

$$\mu^- \to \beta^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu;$$
$$\mu^+ \to \beta^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu, \tag{4-96}$$

平均寿命 $\tau \approx 2.199 \times 10^{-6}$ 秒。

μ 中微子 ν_μ 除了它与 μ 子而不是与电子 e 反应以外, 它具有与电子中微子 ν_e 相同的物理性质。事实上, 通过下面给出的相互作用截面的反应已经探测到了这两种中微子 (Reines 和 Cowan, 1953):

对于 $\bar{\nu}_e + p \to e^+ + n$ 的反应,

在 1 兆电子伏,

$$\sigma \approx 10^{-44} \text{ 厘米}^2; \tag{4-97}$$

对于 $\bar{\nu}_\mu + p \to n + \mu^+$ 及 $\nu_\mu + n \to p + \mu^-$ 反应 (Danby 等, 1962),

在 1 京电子伏,

$$\sigma \approx 10^{-38} \text{ 厘米}^2。 \tag{4-98}$$

这些数据与可用于两种中微子相互作用的普适耦合常数 g 是一致的。相互作用截面 σ 由下式给出:

$$\sigma \approx \frac{g^2 E_\nu^2}{\hbar^4 c^4} \approx 10^{-44} \left(\frac{E_\nu}{mc^2}\right)^2 \text{ 厘米}^2, \tag{4-99}$$

式中 E_ν 是质心系中微子能量，费密常数 g 由下式给出：

$$g=1.4102\pm0.0012\times10^{-49}\text{ 尔格·厘米}^3。\tag{4-100}$$

费密(Fermi, 1934)首先意识到 β 衰变((4-92)式)是由不同于核相互作用的弱相互作用引起的；并假定相互作用矩阵元 v_{fi} 如下：

$$v_{fi}=(\overline{\psi}_n O\psi_p)(\overline{\psi}_e O_L\psi_{\nu_e}),\tag{4-101}$$

式中波函数 ψ 的下标 n、p、e 或 ν_e 表示中子 n、质子 p、电子 β^- 或 e^- 或 e 以及中微子 ν_e，O 及 O_L 分别表示作用到核子(质子及中子)及轻子(电子及电子中微子)波函数上的算符。从波函数为 ψ_i 的初态跃迁到波函数为 ψ_f 的终态的跃迁几率 W，由含时微扰理论的黄金定则给出：

$$W=\frac{2\pi}{\hbar}v_{fi}^*v_{fi}\rho(E_f)=\frac{2\pi}{\hbar}\left|\int\psi_f^*H_{\text{相互}}\psi_i d\tau\right|^2\rho(E_f)=\frac{2\pi}{\hbar}\left|\langle\psi_f|H_{\text{相互}}|\psi_i\rangle\right|^2\rho(E_f),\tag{4-102}$$

式中 v_{fi} 是相互作用矩阵元，$H_{\text{相互}}$ 是在初态和终态之间可以有矩阵元的相互作用哈密顿函数，$\rho(E_f)$ 是能量范围在 E_f 至 E_f+dE_f 内的终态的总数。

在费密时代，人们不知道算符 O 的确切形式是什么；但是知道它必定是量度相互作用强度的耦合常数与五种可能的狄拉克矩阵组合的某种混合(参看 Preston, 1962)。而且知道事实上质子、中子、电子、π 介子及中微子按照下式给出的组合而相互作用(Wheeler, 1947; Tiomno 和 Wheeler, 1949)：

$$(p,\ n)\leftrightarrow(\mu,\ \nu_\mu)\leftrightarrow(e,\ \nu_e)\leftrightarrow(p,\ n)。\tag{4-103}$$

费曼-盖尔曼(Feynman 和 Gell-Mann, 1958)假定存在一种普适弱相互作用，(4-103)式给出的任一对粒子按这种弱相互作用可以与其他对的粒子以及本身发生相互作用。这样的自弱相互作用取下式给出的弱相互作用哈密顿函数：

$$H_{\text{相互}}=\sqrt{2}\,g_V J^* J,\tag{4-104}$$

式中弱相互作用流 J 由下式给出：

$$J=\overline{\psi}_n(V-A)\psi_p+\overline{\psi}_e(V-A)\psi_{\nu_e}+\overline{\psi}_\mu(V-A)\psi_{\nu_\mu},\tag{4-105}$$

波函数 ψ 有一个下标表示相应的粒子，矢量 J^* 是 J 的厄密共轭。这里算符 $(V-A)$ 反映在弱相互作用中只存在矢量 V 及轴矢量 A 算符的实验结论；就象费曼及盖尔曼的假说那样它们出现在混合 $(V-A)$ 中。矢量耦合常数 C_V 根据 ^{26}Al 的 β 衰变测定，其值为(Freeman 等, 1972)：

$$g_V=C_V=1.4102\pm0.0012\times10^{-49}\text{ 尔格·厘米}^3。\tag{4-106}$$

轴矢量耦合常数 C_A 与 C_V 之比根据中子半衰期测定。克里斯坦森等(Christensen 等, 1967)测出中子半衰期为 10.61±0.16 分钟，结果是：

$$\frac{C_A}{C_V}=\frac{g_A}{g_V}=1.239\pm0.011。\tag{4-107}$$

这个比值根据下式给出的中子的 $(ft)_n$ 值得出：

$$(ft)_n=\frac{2\pi^3(\ln 2)\hbar^7}{m^5c^4[C_V^2|\mathscr{M}_V|^2+C_A^2|\mathscr{M}_A|^2]}=\frac{1.230627\times10^{-94}}{[C_V^2+3C_A^2]}\text{ 秒}^{-1}。\tag{4-108}$$

流-流相互作用导致由下式给出的 β 衰变中的相互作用哈密顿函数 H_β 及电子-中微子自相互作用哈密顿函数 H_W：

$$H_\beta=\frac{g_V}{\sqrt{2}}[\overline{\psi}_\nu\gamma_\alpha(1+\gamma_5)\psi_e][\overline{\psi}_n\gamma_\alpha(C_V-C_A\gamma_5)\psi_p]\quad[\text{对}(p,\ n)(e,\ \nu)],\tag{4-109}$$

及

$$H_W=\sqrt{2}\,g_V\left[\bar{\psi}_e\gamma_\mu\frac{(1+\gamma_5)}{\sqrt{2}}\nu_\nu\right]\left[\bar{\psi}_\nu\gamma^\mu\frac{(1+\gamma_5)}{\sqrt{2}}\psi_e\right]\quad[\text{对},\ (e,\ \nu)(e,\ \nu)],\ (4\text{-}110)$$

这里算符$(V-A)$已用狄拉克矩阵组合γ表示，符号具有柯诺宾斯基(Konopinski, 1966)及普雷斯顿(Preston, 1962)的书中描述的意义。(4-110)式通常重新整理给出如下：

$$H_W=g_V[\bar{\psi}_e\gamma_\mu\psi_e]\left[\bar{\psi}_\nu\gamma^\mu\frac{(1+\gamma_5)}{\sqrt{2}}\psi_\nu\right]-g_V[\bar{\psi}_e\gamma_5\gamma_\mu\psi_e]\left[\bar{\psi}_\nu\gamma^\mu\frac{(1+\gamma_5)}{\sqrt{2}}\psi_\nu\right]。\quad(4\text{-}111)$$

4.3.2. β衰变

如泡利(Pauli, 1930)所提出的，如果涉及β衰变的反应满足能量及动量守恒定律，则一定出现称为电子中微子ν_e的粒子。负的β(即β^-)衰变的核反应为：

$$(Z-1,\ A)\rightarrow(Z,\ A)+\beta^-+\bar{\nu}_e,\quad(4\text{-}112)$$

其中$(Z,\ A)$表示荷电为Z及质量数为A的原子核，β^-粒子是电子，$\bar{\nu}_e$表示反电子中微子。若

$$M_{原子}(Z-1,\ A)>M_{原子}(Z,\ A),\quad(4\text{-}113)$$

或等价地 $\quad M(Z-1,\ A)>M(Z,\ A)+m_e,$

则只发生β^-衰变，其中$M_{原子}(Z,\ A)$表示原子的质量，$M(Z,\ A)$表示原子核的质量，电子质量$m_e=$*5.4858026×10⁻⁴原子质量单位$=$*0.51100340兆电子伏$/c^2$。β^-粒子通常以几千电子伏至15兆电子伏的能量范围射出。

β^+衰变的核反应为：

$$(Z+1,\ A)\rightarrow(Z,\ A)+\beta^++\nu_e,\quad(4\text{-}114)$$

其中β^+是正电子，ν_e是电子中微子。若

$$M_{原子}(Z+1,\ A)>M_{原子}(Z,\ A)+2m_e,\quad(4\text{-}115)$$

或等价地 $\quad M(Z+1,\ A)>M(Z,\ A)+m_e,$

则只发生β^+衰变。通常发现对于一个给定的奇数A，在β衰变情况只有一个原子核是稳定的，而对于一个给定的偶数A，在β衰变情况只有两个原子核是稳定的。

由(4-102)式、(4-104)式及(4-105)式可知，对原子核$(Z,\ A)$的一次β^-衰变来说，每单位时间的跃迁几率W由下式给出：

$$W=\frac{4\pi g_V^2}{\hbar}|\mathscr{M}|^2\rho(E_f),\quad(4\text{-}116)$$

式中核矩阵元$\mathscr{M}$由下式给出：

$$\mathscr{M}=\int(\bar{\psi}_{Z,A}(V-A)\psi_{Z+1,A})(\bar{\psi}_e(V-A)\psi_{\nu_e})d\tau\approx\int\bar{\psi}_{Z,A}(V-A)\psi_{Z+1,A}d\tau,\quad(4\text{-}117)$$

这里积分是对原子核的体积进行的，电子及中微子波函数取波动解，当自变量很小时，波函数对(4-117)式的积分只贡献一个接近1的常数因子。对于核β衰变的容许跃迁，核矩阵元$\mathscr{M}$满足下列方程：

$$|\mathscr{M}|^2=|\mathscr{M}_F|^2+\frac{g_A^2}{g_V^2}|\mathscr{M}_{GT}|^2,\quad(4\text{-}118)$$

式中$\mathscr{M}_F$及$\mathscr{M}_{GT}$分别表示费密跃迁及盖莫夫-特勒跃迁的矩阵元。例如，对于中子衰变，$|\mathscr{M}_F|=|\mathscr{M}_V|=1$及$|\mathscr{M}_{GT}|=|\mathscr{M}_A|=\sqrt{3}$，其中我们已对矢量及轴矢量核矩阵元计入下

标 V 和 A。费密跃迁相当于矢量相互作用并具有选择定则 $\Delta J=0$，宇称不改变；而盖莫夫-特勒跃迁相当于轴矢相互作用并具有选择定则 $\Delta J=\pm1,\ 0$，没有 $0\to0$ 跃迁，宇称不改变。这里 J 是原子核的总角动量。

当产核 $(Z+1,\ A)$ 可以假定是处于单态时，只有电子及中微子对状态的能量密度 $\rho(E_f)$ 有贡献。若 p_e 及 p_{ν_e} 分别表示电子及电子中微子的动量，W_0 表示 β 衰变释放的最大能量，则由(4-116)式可知：

$$W=\frac{g_V^2|\mathscr{M}|^2}{2\pi^3\hbar^7c^3}(W_0-E)^2p_e^2\,dp_e, \tag{4-119}$$

其中能量在 E_f 与 E_f+dE_f 之间的终态数 $\rho(E_f)$ 为：

$$\rho(E_f)=\frac{(E_f-E)^2p_e^2dp_e}{4\pi^4\hbar^6c^3}。$$

(4-119)式的积分是对直到最大值(相应于 β 衰变可得到的最大电子能量) W_0 的所有动量进行积分，得出每单位时间总的跃迁几率 λ_β。这 β 衰变率由下式给出：

$$\lambda_\beta=\frac{\ln 2}{t}=\frac{f\ln 2}{ft}=\frac{1}{2\pi^3}\int_1^{W_0}pE(W_0-E)^2F(Z,\ E)dE, \tag{4-120}$$

式中波函数是归一化的，因此 $2\pi|\mathscr{M}|^2$ 是每单位时间每单位能量发生的跃迁几率，所以也无需态密度因子，$\ln 2=$*0.6931472，t 是 β 衰变的半衰期，柯诺宾斯基(Konopinski, 1966)和普雷斯顿(Preston, 1962)已详尽给出费密函数 $F(Z,\ E)$，其近似值为：

$$F(Z,\ E)\approx2\pi\eta[1-\exp(1-2\pi\eta)]^{-1}, \tag{4-121}$$

式中
$$\eta=\frac{Ze^2}{\hbar v}\approx\alpha Z\left(\frac{mc^2}{3kT}\right)^{1/2},$$

精细结构常数 $\alpha=e^2/(\hbar c)=$*$7.2973506(60)\times10^{-3}$，$T$ 是气体温度，Z 是核电荷，v 是发射出的电子的速度。量 f 由下式给出：

$$f=f(Z,\ W_0)=\int_1^{W_0}F(Z,\ E)pE(W_0-E)^2dE, \tag{4-122}$$

费恩伯格等(Feenberg 和 Trigg, 1950; Fiengold, 1951; Dismuke 等, 1952; Major 和 Biedenharn, 1954; 以及 Ajzenberg-Selove, 1960)已在宽广的范围内把 $F(Z,\ E)$ 及 $f(Z,\ W_0)$ 列成了表。对于容许跃迁(宇称不改变和 $\Delta J=0,\ \pm1$)，乘积 ft 由下列关系式明确确定：

$$ft=\frac{2\pi^3\hbar^7\ln 2}{m^5c^4}[g_V^2|\mathscr{M}_V|^2+g_A^2|\mathscr{M}_A|^2]^{-1}$$
$$=\text{*}1.230618\times10^{-94}[g_V^2|\mathscr{M}_V|^2+g_A^2|\mathscr{M}_A|^2]^{-1}\ 秒。 \tag{4-123}$$

ft 测定值的范围是从 $10^{4.5}$ 至 $10^{6.0}$ 秒，所以利用列表给出的 f 值并假定 $ft=10^{5.5}$ 秒，常常可以估计出 λ_β。

如同霍伊尔(Hoyle, 1946)首先提出的，由于正常衰变终态电子进入的电子相空间中的动量状态已被占据，所以恒星内部的 β 衰变可能是抑制的(称为“不相容原理抑制”)。对于容许衰变(宇称不改变和 $\Delta J=0,\ \pm1$)和对于最基本的禁戒衰变(宇称有变化及 $\Delta J=0,\ \pm1$)，恒星的 β 衰变率 λ_S 与地球上的值 λ_β 有关系式(Peterson 和 Bahcall, 1963)：

$$\lambda_S=\lambda_\beta(1-\delta), \tag{4-124}$$

式中不相容原理抑制因子 δ 由下式给出：

$$\delta=\frac{\int S d\lambda}{\int d\lambda}, \tag{4-125}$$

其中(参看(4-120)式)

$$d\lambda=\frac{p}{2\pi^3}(E+mc^2)(W_0-E)^2F(Z,\ E)dE\propto(E+mc^2)^2(W_0-E)^2dE,$$

E 为电子的相对论性能量，W_0 为衰变的终态能量，占有相应于能量 E 至 $E+dE$ 的电子能态的几率 S 由下式给出：

$$S=\left[1+\exp\left(\frac{E}{kT}-\frac{E_F}{kT}\right)\right]^{-1},$$

式中 E_F 是费密能量。我们得下列近似关系式：

$$\begin{aligned}&\delta\approx 0 &&(\text{对非简并气体}),\\ &\delta\approx\left[1-\exp\left(-\frac{E_F}{kT}\right)\right]\approx 1 &&(\text{对简并气体及 } W_0\ll E_F)。\end{aligned} \tag{4-126}$$

彼得森等(Peterson 和 Bahcall, 1963)给出了 $W_0\gg E_F$ 的简并情况下的 δ 冗长的近似关系式，其中 $0\lesssim\delta\lesssim 1$。

如同霍伊尔等(Hoyle, 1946; 以及 Cameron, 1959)所指出的，在高温恒星内部，来自核类的热占有激发态的衰变，使 β 衰变寿命显著地缩短。这些激发态反应的衰变率 λ_e 由下式给出(Cameron, 1959)：

$$\lambda_e=\frac{1}{P(T)}\sum_i\sum_j\lambda_S(2J_i+1)\exp\left(-\frac{E_i}{kT}\right), \tag{4-127}$$

式中 λ_S 是在母态 i 与子态 j 之间恒星的 β 衰变率，$E_i(J_i)$ 是母态 i 的激发能(自旋)，J_i 是态 i 的核自旋。假定态 i 是按照玻耳兹曼分布而被填充的，核配分函数 $P(T)$ 由下式给出：

$$P(T)=\sum_i(2J_i+1)\exp\left(-\frac{E_i}{kT}\right)。 \tag{4-128}$$

常常取配分函数等于基态的统计权重 $2I+1$，其中 I 是基态的核自旋。例如，对于一个两能级原子核来说，若基态自旋为 J_1、衰变率为 $\lambda_\beta(1)$，而激发态自旋为 J_2、衰变率为 $\lambda_\beta(2)$，则总的 β 衰变率 λ_β 由下式给出：

$$\lambda_\beta=\frac{2J_1+1}{G}\lambda_\beta(1)+\frac{2J_2+1}{G}\lambda_\beta(2)\exp\left(-\frac{E^*}{kT}\right), \tag{4-129}$$

式中

$$G=(2J_1+1)+(2J_2+1)\exp\left(-\frac{E^*}{kT}\right),$$

E^* 是激发态的激发能。发生这种 β 衰变的能量判据为：

$$M(Z-1,\ A)>M(Z,\ A)+m_e+E^*/c^2, \tag{4-130}$$

式中 $M(Z,\ A)$ 是基态原子核的质量。因为激发态是由于在统计平衡条件下物质与辐射(光子)之间的能量交换所引起的，所以卡梅伦(Cameron, 1959)称这种来自热激发态的 β 衰变为“光致 β”衰变。为了计算激发态 β 衰变率，对所研究的原子核必须已知能级的分布及参数，大部分这种数据可从美国橡树岭国家实验室的核数据卡或者从同位素表(Lederer 等, 1967)所给出的原子核能级中找到。另外，能级参数可以利用吉尔伯特等(Gilbert 和 Cameron, 1965)所给出的核能级密度公式估计。汉森等(Hansen, 1968; 以及 Wagoner, 1969)对激发核及未激发核两者都给出了 β 衰变率。

当由于所有有利激发态的大的激发能导致不利于激发态的 β 衰变时，另外的“光致 β”

过程可能变得重要。在这种过程中，可以按照下列反应式在虚β衰变中吸收一个光子γ：

$$\gamma+(Z,\ A)\rightarrow(Z+1,\ A)+e^-+\bar{\nu}_e, \tag{4-131}$$

服从能量判据：

$$\Delta=M(Z+1,\ A)+m_e-M(Z,\ A)\geqslant 0, \tag{4-132}$$

这里Δ是原子质量差，$M(Z,\ A)$是原子核$(Z,\ A)$的核质量，m_e是电子质量。这一由光子所诱发的β衰变的衰变率λ_p由下式给出(Shaw, Clayton 和 Michel, 1965)：

$$\begin{aligned}\lambda_p&=\frac{2\ln 2}{\pi}\ \frac{\alpha}{ft}\left(\frac{kT}{mc^2}\right)^{9/2}\exp\left[-\frac{\Delta}{kT}\right]\quad(\text{当 } kT<0.3\,mc^2 \text{ 及 } \Delta<0.2\,mc^2);\\ \lambda_p&=\frac{\alpha}{\pi}\left[5.78\left(\frac{kT}{mc^2}\right)^5\ln\left(\frac{kT}{mc^2}\right)+3.10\left(\frac{kT}{mc^2}\right)^5+\cdots\right]\quad(\text{当 } kT\gg mc^2,\ \Delta),\end{aligned} \tag{4-133}$$

式中$\alpha=2\pi e^2/(hc)=*(137.03604)^{-1}$是精细结构常数，$ft$值表征联系能态$(Z,\ A)$与$(Z+1,\ A)$的核矩阵元，$T$为气体温度，$\Delta$为质量差。

当恒星的热能变得大于电子静质量能时，即$T\gtrsim 10^9$开，电子-正电子偶的产生便开始了。只要自由正电子有可观的密度，甚至在地球上稳定的原子核也可能发生β转变。虽然这种过程对天体物理学来说可能是不重要的，我们在此给出每单位时间的几率λ，即一个原子核$(Z,\ A)$将俘获一个动能为$W=(E-1)mc^2$的正电子以形成一个原子核$(Z+1,\ A)$的几率。根据里夫斯等(Reeves 和 Stewart, 1965)的研究，

$$\lambda=\sum_i A_i\lambda_i, \tag{4-134}$$ [1]

式中自旋为J_j的能级j的比占有数A_j为：

$$A_j=\frac{(2J_j+1)\exp[-E_j/kT]}{\sum_i(2J_i+1)\exp[-E_i/kT]},$$

式中E_i为第i能级的激发能，求和是对原子核的所有能级进行的，以及

$$\lambda_i=\frac{N^+\ln 2}{4\pi ft}\left(\frac{h}{mc}\right)^3\int_{E_m}^{\infty}(W-W_m)^2F(Z,\ W)N(E)dE\Big/\int_1^{\infty}N(E)dE,$$

式中W_m是反应的阈能，$W=(E-1)mc^2$是正电子的动能，正电子密度N^+由下式给出：

$$N^+=\{[(N_0^2/4)+4I^2/h^6]^{1/2}-N_0/2\}。$$

剩余电子密度$N_0=\rho/(2M)$，其中ρ是气体质量密度，M是核质量，$I=4\pi(mc)^3Z^{-1}K_2(Z)$，其中$Z=M_ec^2/(kT)$以及K_2是第二类修正贝塞耳函数。正电子的能谱由下式给出：

$$N(E)dE=\frac{8\pi(mc/h)^3E(E^2-1)^{1/2}dE}{(2I/N^+h^3)[\exp(mc^2E/kT)+1]}。 \tag{4-135}$$

4.3.3. 电子俘获

β^+衰变不稳定的原子核$(Z,\ A)$，其β^+衰变可以被俘获电子过程(即从周围电子中俘获一个电子的过程)所代替(Yukawa, 1935; Möller, 1937)。电子俘获的核反应是：

$$(Z+1,\ A)+e^-\rightarrow(Z,\ A)+\nu_e, \tag{4-136}$$

式中符号e^-是用来表示在电子俘获反应中的电子。若

$$M_{原子}(Z+1,\ A)>M_{原子}(Z,\ A) \tag{4-137}$$

或等价地

$$M(Z+1,\ A)+m_e>M(Z,\ A),$$

将只发生电子俘获。式中$M_{原子}(Z,\ A)$表示原子$(Z,\ A)$的原子质量，$M(Z,\ A)$表示原子核$(Z,\ A)$的质量。可以证明(Feenberg 和 Trigg, 1950)：正电子发射在地球上的衰变率λ_{β^+}与

1 λ_i的值过高估计了一个等于2的因子(参见(4-157)式的角注2)。

俘获 K 壳层的电子在地球上的衰变率 λ_K 的关系是产核的原子数 Z 及最大能量释放 Q 的函数。对于大的 Z 及小的 Q，发生电子俘获的几率变得比 β^+ 发射更大，而对于小的 Z 及大的 Q，则发生正电子发射的几率大。费恩伯格等(Feenberg 和 Trigg, 1950; 以及 Preston, 1962)已给出比值 $\lambda_K/\lambda_{\beta^+}$ 的精确值。梅杰等(Major 和 Biedenharn, 1954)还列表给出电子俘获的 f 值。如同巴考尔(Bahcall, 1962)已指出的，恒星内部的原子是高度电离的，因而不易俘获束缚轨道上的电子。不过，在地球上那些能俘获束缚轨道电子而衰变的原子核，在恒星上能够俘获连续谱轨道上的自由电子而衰变[1]。

那些在地球上以容许的及禁戒的正电子发射而衰变的原子核，在恒星中发生俘获连续谱电子的衰变率 λ_{ce} 由下式给出(Bahcall, 1964)：

$$\lambda_{ce}=\frac{K\ln 2}{ft}, \tag{4-138}$$

式中 ft 是地球上的测量值，$\ln 2=$ *0.6913472，恒星相空间函数 K 由下式给出：

$$K=\int_{p_0}^{\infty}p^2q^2F(Z,\ W)\left[1-\exp\left(-\frac{\mu}{kT}+\frac{W}{kT}\right)^{-1}dp,\right. \tag{4-139}$$

式中 W 是电子的总的相对论性能量，μ 是化学势，$\mu\approx E_F$，其中 E_F 是费密能量，p 是电子动量，$F(Z,\ W)$ 是费密函数。若始态及终态核质量之差为 W_0，则动量的阈值 p_0 由下式给出：

$$\begin{aligned}&\text{若 } W_0\gtrsim -mc^2,\ p_0=0 &&\text{(放能俘获)};\\ &\text{若 } W_0\lesssim -mc^2,\ p_0=\frac{1}{c}(W_0^2-m^2c^4)^{1/2} &&\text{(收能俘获)。}\end{aligned} \tag{4-140}$$

对于非相对论性电子能量，费密函数 $F(Z,\ W)$ 由下式给出：

$$F(Z,\ W)=2\pi\eta[1-\exp(-2\pi\eta)]^{-1},$$

式中

$$\eta=\frac{\alpha ZW}{p}=\frac{\alpha Zc}{v}\approx\alpha Z\left(\frac{mc^2}{3kT}\right)^{1/2},$$

$\alpha=2\pi e^2/(hc)=$ *$(137.03604)^{-1}$，v 是被俘获电子的速度，我们假定 $\alpha^2Z^2\ll 1$。如同福勒和霍伊尔(Fowler 和 Hoyle, 1964)已指出的，$F(Z,\ W)$ 是 p 的缓变函数，假定一个合适的平均值 $\langle F\rangle$ (他们两人所给出)就能够把它提到积分号外面。汉森(Hansen, 1968)已用计算机求出了 K 的最终表达式并给出几种原子核的 λ_{ce} 值。

对于简并气体及非简并气体两者，以及 β 跃迁阈能 W_0，

$$\text{若 } W_0+1\ll\langle E\rangle,\quad K\approx\pi^2N_e\langle F\rangle(W_0+1)^2, \tag{4-141}$$

这里 N_e 是电子密度，$\langle F\rangle$ 是在 $W=1+\langle E\rangle$ 时求出的费密函数，其中平均能量 $\langle E\rangle\approx kT$ (对非简并气体)及 $\langle E\rangle\approx E_F$ (对简并气体；E_F 即费密能量)。对于非相对论性电子及极端相对论性电子，

$$\begin{aligned}&E_F=(3\pi^2)^{2/3}\frac{\hbar^2}{2m}N_e^{2/3} &&\text{(非相对论性的)};\\ &E_F=(3\pi^2)^{1/3}\hbar cN_e^{1/3} &&\text{(相对论性的)。}\end{aligned} \tag{4-142}$$

对于玻耳兹曼统计法适用的非简并气体，巴考尔(Bahcall, 1962)给出：

$$\text{若 } \eta\ll 1;\ \alpha^2Z^2\ll 1;\ kT\ll mc^2 \text{ 及 } W_0\ll kT,\quad K\approx\pi^2W_0^2N_e。 \tag{4-143}$$

对于简并气体，巴考尔等(Bahcall, 1962; 以及 Tsuruta 和 Cameron, 1965)给出：

若 $W_0>-mc^2$(放能的)及 $\eta_F\ll 1$，

1) 原文此段末句有错，已改正。——校者注

$$K\approx\langle F\rangle\left[\frac{1}{5}P_F^5+\frac{1}{3}P_F^3(1+W_0^2)+\frac{1}{4}W_0\{2P_FE_F^3-P_FE_F-\ln(P_F+E_F)\}\right];\tag{4-144}$$

若 $W_0<-mc^2$(收能的)及 $\eta_F\ll1$,

$$K\approx\langle F\rangle\left\{\frac{1}{5}(P_F^5-P_0^5)+\frac{1}{3}(P_F^3-P_0^3)(1+W_0^2)-\frac{1}{4}|W_0|[2(P_FE_F^3-P_0|W_0|^3)-(P_FE_F-P_0|W_0|)-\ln(P_F+E_F)+\ln(P_0+|W_0|)]\right\}。\tag{4-145}$$

而对于极端简并性,我们得到较简单的表达式:

若 $W_0>-mc^2$(放能的)及 $\eta_F\gg1$,

$$K\approx\frac{2\pi\alpha Z}{5}\left[\left(E_F^5+\frac{5}{2}W_0E_F^4+\frac{5}{3}W_0^2E_F^3\right)-\left(1+\frac{5}{2}W_0+\frac{5}{3}W_0^2\right)\right];$$

若 $W_0<-mc^2$(收能的)及 $\eta_F\gg1$, (4-146)

$$K\approx\frac{2\pi\alpha Z}{5}\left[(E_F-|W_0|)^5+\frac{5}{2}|W_0|(E_F-|W_0|)^4+\frac{5}{3}|W_0^2|^2(E_F-|W_0|)^3\right],$$

这里能量 E_F 及 W_0 以 mc^2 的单位表示,以及

若 $Z>(2\pi\alpha)^{-1}\approx23$, $\langle F\rangle=2\pi\alpha Z$;

若 $Z<(2\pi\alpha)^{-1}\approx23$, $\langle F\rangle=1$,

α 为精细结构常数,费密动量 $P_F=c^{-1}(E_F^2-m^2c^4)^{1/2}$,其中 E_F 是费密能量,$P_0=c^{-1}(W_0^2-m^2c^4)^{1/2}$,其中 W_0 是 β 跃迁的阈能。

芬齐等(Finzi 和 Wolf, 1967)已指出,具有富镁核心或富钙壳层的正在收缩中的白矮星可能导致 I 型超新星。他们指出,收缩是由于 Mg^{24} 及 Ca^{40} 的电子俘获反应引起的,并且给出了反应寿命的公式。

4.3.4. 乌卡过程[1)]

一个原子核(Z, A)通过下列 β 衰变反应可以产生中微子 ν_e:

$$(Z, A)\to(Z+1, A)+e^-+\bar{\nu}_e;$$
$$(Z, A)\to(Z-1, A)+e^++\nu_e,\tag{4-147}$$

或者由下列电子俘获反应也可以产生中微子 ν_e:

$$(Z+1, A)+e^-\to(Z, A)+\nu_e。\tag{4-148}$$

在寻常的乌卡过程中,一个原子核俘获电子 e^- 以及 β^- 衰变这两个过程交替地发生,在这种过程中该原子核将按下列反应发射一个中微子 ν_e 及一个反中微子 $\bar{\nu}_e$(Gamow 和 Schönberg, 1941):

$$e^-+(Z, A)\to e^-+(Z, A)+\nu_e+\bar{\nu}_e。\tag{4-149}$$

在简并气体中只有奇质量数的原子核能够参与寻常的乌卡过程。这是因为具有偶质量数的原子核在俘获一个电子后对于电子俘获就有较低的阈值的缘故。所以在简并气体中只能存在偶电荷数的偶质量数原子核,一般说来,这些原子核对电子俘获及 β 衰变两者都是稳定的。如同盖莫夫等(Gamow 和 Schönberg, 1941)所指出的,乌卡过程的中微子偶发射会影

1) 主要发生在铁族元素中的一系列核反应,反应过程中伴随中微子的很高的形成率。由于中微子很快地和看不见地携走能量,就象巴西里约热内卢的乌卡(Urca)赌场很快地和看不见地携走钱财一样,所以称为乌卡过程。——译者注

响恒星的演化率，而在这种情况感兴趣的是中微子所引起的能量损耗率。假定原子核处于统计平衡状态而中微子及反中微子是通过 β^- 衰变及电子俘获连续地产生的，则利用前两节给出的衰变率可以计算中微子光度（参看 Bahcall, 1962, 1964; Peterson 和 Bahcall, 1963; Tsuruta 和 Cameron, 1965）。

鹤田等（Tsuruta 和 Cameron, 1965）考虑了简并气体中核统计平衡的条件，并得到处于激发能级 i 的每个原子核的平均中微子能量产生率如下：

$$P_\nu=\lambda_i\omega_i=\frac{\ln 2 f_i}{(ft)_i}\omega_i。\tag{4-150}$$

对于电子俘获，若 $W_0\gg -mc^2$，则

$$\omega_i=\frac{5}{6}(E_F+W_0)\left[\frac{(1-y^6)-\frac{12}{5}x(1-y^5)+\frac{3}{2}x^2(1-y^4)}{(1-y^5)-\frac{5}{2}x(1-y^4)+\frac{5}{3}x^2(1-y^3)}\right]\tag{4-151}$$

及

$$x=W_0/(E_F+W_0),$$
$$y=(1+W_0)/(E_F+W_0);$$

若 $W_0\ll -mc^2$，则

$$\omega_i=\frac{5}{6}(E_F-|W_0|)\left[\frac{1+\frac{12}{5}x+\frac{3}{2}x^2}{1+\frac{5}{2}x+\frac{5}{3}x^2}\right],\tag{4-152}$$

式中

$$x=|W_0|/(E_F-|W_0|)。$$

对于电子发射（β 衰变），

$$\omega_i=\frac{D_2(W_0,\ W_0)}{D_1(W_0,\ W_0)}\left[1-\frac{D_2(E_F,\ W_0)}{D_2(W_0,\ W_0)}\right]\Big/\left[1-\frac{D_1(E_F,\ W_0)}{D_1(W_0,\ W_0)}\right],\tag{4-153}$$

式中

$$D_1(x,\ y)=\frac{1}{5}(x^5-1)-\frac{1}{2}(x^4-1)y+\frac{1}{3}(x^3-1)y^2$$

及

$$D_2(x,\ y)=-\frac{1}{6}(x^6-1)+\frac{3}{5}(x^5-1)y-\frac{3}{4}(x^4-1)y^2+\frac{1}{3}(x^3-1)y^3,$$

W_0 是 β 跃迁的阈能，E_F 是 (4-142) 式给出的电子费密能量，W_0 及 E_F 是假定以 mc^2 的单位表示的。

在电子简并条件下，只有在电子费密能量接近核 $(Z+1,\ A)$ 的电子俘获阈值时，并且只有当费密面处的粒子的分布受热而变成连续的，当存在振动或是当原子核有对流的宏观输运等原因而使相空间可以利用时，寻常的乌卡过程才是显著的。由于这种种限制，只有在恒星核心中的一个壳层内，给定的一对原子核的乌卡过程才能有效地进行。鹤田等（Tsuruta 和 Cameron, 1970）给出了由于恒星内部的乌卡壳层所引起的热能及振动能损耗的完整讨论。由于乌卡壳层的存在，在有限温度下，中微子能量损耗率由下式给出：

$$L_\nu=4\pi r_s^2X\left[\left|\frac{dE_F}{dr}\right|\right]^{-1}(F_1\xi_0^5+F_2T^5),\tag{4-154}$$

式中 r_s 是乌卡壳层的半径，X 是所研究的原子核偶的质量分数表示的丰度，E_F 是费密能量，

$$\left|\frac{dE_F}{dr}\right|\approx 4\times10^{-8}\ \text{兆电子伏·厘米}^{-1},$$

T 是温度，径向振荡的相对振幅是 $\xi_0=\Delta r/r_0$，其中 Δr 是偏离平衡半径 r_0 的位移。鹤田等

(Tsuruta 和 Cameron, 1970)已对 132 对的原子核的 F_1 和 F_2 列了表。F_1 和 F_2 表征给定的一对原子核的特性，并且是由 ft 值、阈值及电荷所确定的。鹤田 (Tsuruta) 和卡梅伦 (Cameron)指出，在出现乌卡壳层的恒星内部，在高达 2×10^9 开左右的温度范围中，乌卡中微子能量损耗比起其他的中微子能量损耗来占主要地位。布鲁恩等 (Bruenn, 1972; 及 Paczyński, 1972)讨论了在简并恒星核心中乌卡壳层对碳点燃的作用。

比纳耶夫(Pinaev, 1964)首先指出，当热能 kT 变得大于电子静能 mc^2 时，就会产生电子-正电子偶，而下列正电子俘获反应同样成为重要的：

$$(Z-1,\ A)+e^+\rightarrow(Z,\ A)+\bar{\nu}_e。\tag{4-155}$$

在平衡条件下，当包括(4-147)式、(4-148)式及(4-155)式给出的反应时，中微子能量损耗由下式给出(Pinaev, 1964)：

若 $kT\ll mc^2,\ kT\ll Q$,

$$P_\nu\approx\frac{4\times10^{18}}{Aft}\rho\left[\frac{Q+mc^2}{mc^2}\right]^2\left(\frac{kT}{mc^2}\right)^4\exp\left(-\frac{Q+mc^2}{kT}\right)\text{尔格·厘米}^{-3}\text{·秒}^{-1};\tag{4-156}$$

若 $kT\gg mc^2,\ kT\gg Q$,

$$P_\nu\approx\frac{0.8\times10^{20}}{Aft}\rho\left(\frac{kT}{mc^2}\right)^6\text{尔格·厘米}^{-3}\text{·秒}^{-1},\tag{4-157}$$ [1]

这里的 ft 是实验值，Q 是阈能。博德特等(Beaudet, Salpeter 和 Silvestro, 1972)已给出 β 稳定核及 β 不稳定核两者俘获正电子和电子以及正常的电子和正电子的 β 衰变效应的更详尽的公式。他们还给出了所有这些跃迁作为质量密度和温度的函数的简单拟合公式；并且计算了在平衡条件下许多种通常的稳定偶-偶核的总乌卡能量损耗率。

当有丰富的自由质子 p 及中子 n 时，相应的乌卡反应是：

$$\left.\begin{aligned}&p+e^-\rightarrow n+\nu_e;\\&n+e^+\rightarrow p+\bar{\nu}_e;\\&n\rightarrow p+e^-+\bar{\nu}_e。\end{aligned}\right\}\tag{4-158}$$

汉森(Hansen, 1968)把比纳耶夫(Pinaev, 1964)的结果推广到考虑了电子简并、部分电子简并及电子-正电子偶形成的情况。对质子俘获电子，汉森得到的俘获率为：

若 $T_9\gtrsim10$ 和 $\mu\gtrsim kT$,

$$\lambda=4.7\times10^{-4}\left(\frac{u^5}{5}+8\times10^{-3}u^3T_9^2+3.2\times10^{-3}T_9^5\right)\text{秒}^{-1}/\text{质子};\tag{4-159}$$

中微子光度为：

$$L_\nu=3.1\times10^{-10}\left(\frac{u^6}{6}+6\times10^{-2}u^4T_9^2+3.2\times10^{-3}T_9^6\right)\text{尔格·秒/质子},\tag{4-160}$$

这里 $T_9=T/10^9$，μ 是化学势，以及

$$\begin{aligned}u&=\frac{\mu}{mc^2}=\text{小于}\ 10^{-2}\left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)^{1/3}\ \text{[2]}\\ \text{或}\quad u&=\frac{\mu}{mc^2}=6\times10^{-6}\left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)T_9^{-2}。\end{aligned}\tag{4-161}$$

对于中子俘获正电子：若 $T_9\gtrsim5$,

---

1) 在比纳耶夫(Pinaev, 1964)的文章以及那个时候的许多文章中用了电子和正电子俘获截面的过高估计值。这个错误已有伊姆舍尼克等(Imshennik *et al.*, Astron. Zh., **44**, 768, 1977)指出。本书给出的 P_ν 值比正确值大1倍。——译者注

2) 原文误为 $(\rho/\mu_e)^{1/2}$，已改正。——译者注

$$\lambda=10^{-6}T_9^5\exp\left[-5.8\frac{(u+1)}{T_9}\right]\text{秒}^{-1}/\text{中子} \tag{4-162}$$

及

$$L_\nu=7\times10^{-13}T_9^6\exp\left[-5.8\frac{(u+1)}{T_9}\right]\text{尔格}\cdot\text{秒}^{-1}/\text{中子}。 \tag{4-163}$$

对于无相互作用的气体模型，零温度中子星将有(Bahcall 和 Wolf, 1965)：若 $\rho\lesssim2\rho_{\text{核}}$,

$$N_n\approx2\times10^{38}\left(\frac{\rho}{\rho_{\text{核}}}\right)\text{厘米}^{-3} \tag{4-164}$$

及

$$N_e=N_p\approx2\times10^{36}\left(\frac{\rho}{\rho_{\text{核}}}\right)^2\text{厘米}^{-3}, \tag{4-165}$$

这里 N_n、N_e 及 N_p 分别表示中子、电子及质子的数密度，ρ 是气体质量密度，核物质密度 $\rho_{\text{核}}\approx3.7\times10^{14}$ 克·厘米$^{-3}$。阿内特(Arnett, 1967)把比纳耶夫的分析应用到(4-158)式所给出的反应，得出了总的中微子发射率 Q_ν:

$$Q_\nu=8.1\times10^{16}X_n\left(\frac{T_9}{6}\right)^6\text{尔格}\cdot\text{克}^{-1}\cdot\text{秒}^{-1}, \tag{4-166}$$ [1]

式中 $T_9=T/10^9$，而 X_n 与质子的数密度 N_p 及中子的数密度 N_n 的关系为：

$$X_n=\frac{(N_p+N_n)}{6\times10^{23}\rho}。 \tag{4-167}$$

法西奥-卡纽托(Fassio-Canuto, 1969)已给出强磁场中的 β 衰变率，卡纽托等(Canuto 和 Chou, 1971)讨论过强度为 H 的强磁场中乌卡能量损耗率，其结果以下列参数给出：

$$\theta=\frac{H}{H_g}=\frac{e\hbar H}{m^2c^3}=\frac{H}{4.414\times10^{13}\text{高斯}}。 \tag{4-168}$$

他们给出在统计平衡及电中性条件下，中微子光度 L_H、β 衰变率及电子俘获反应率的详尽公式。这些公式的解析近似计算表明，当考虑中子-质子气体及 $\theta\gg1$ 时，从非简并气体来的中微子光度 L_H 可以高达没有磁场时中微子光度 L_0 的 100 倍。不过，对于简并中子-质子气体来说，当 $\theta\gtrsim1$ 时，$L_H\approx10^{-2}L_0$。当考虑简并核气体时发现，当 $\theta\approx1$ 及 $T\lesssim10^9$ 开时，乌卡能量损耗率的减低因子达到 10^{-3}。

中子星的内部具有大量自由中子，并与少量质子及电子达到平衡。在这些条件下，中子能够发生散射并参与修正的乌卡反应(Chiu 和 Salpeter, 1964)：

$$n+n\to n+p+e^-+\bar{\nu}_e \tag{4-169}$$

及

$$n+p+e^-\to n+n+\nu_e。 \tag{4-170}$$

若电子费密能大于 μ 子静能 $m_\mu c^2$，按照修正的乌卡反应，也将形成 μ 子中微子：

$$n+n\to n+p+\mu^-+\bar{\nu}_\mu \tag{4-171}$$

及

$$n+p+\mu^-\to n+n+\nu_\mu。 \tag{4-172}$$

若在中子物质中还存在准自由 π 介子，就出现附加的乌卡型反应：

$$\begin{aligned}&\pi^-+n\to n+e^-+\bar{\nu}_e;\\&n+e^-\to n+\pi^-+\nu_e,\end{aligned} \tag{4-173}$$

$$\begin{aligned}&\pi^-+n\to n+\mu^-+\bar{\nu}_\mu;\\&n+\mu^-\to n+\pi^-+\nu_\mu。\end{aligned} \tag{4-174}$$

巴考尔等(Bahcall 和 Wolf, 1965)假定中子气体不是超流体，并用独立粒子模型得到了中

1 (4-166)式的数字系数是过高估计了(参见(4-157)式的注)，正确值等于 3.6×10^{16}。

微子光度：

对(4-169)式及(4-170)式给出的修正的乌卡反应，

$$L_\nu=6\times10^{38}\left(\frac{M}{M_\odot}\right)\left(\frac{\rho_{核}}{\rho}\right)^{1/3}T_9^8\text{ 尔格·秒}^{-1};\qquad(4\text{-}175)$$

对(4-171)式及(4-172)式给出的修正的乌卡反应，

$$L_\nu=6\times10^{38}\left[1-2.25\left(\frac{\rho_{核}}{\rho}\right)^{4/3}\right]^{1/2}\left(\frac{M}{M_\odot}\right)\left(\frac{\rho_{核}}{\rho}\right)^{1/3}T_9^8\text{ 尔格·秒}^{-1}\quad(\text{当 }\rho>1.8\rho_{核}),\qquad(4\text{-}176)$$

$$L_\nu=0\quad(\text{当 }\rho<1.8\rho_{核});$$

对于(4-173)式及(4-174)式给出的 π 介子反应，

$$L_\nu=10^{46}T_9^6\left(\frac{N_\pi}{N_b}\right)\left(\frac{M}{M_\odot}\right)\text{尔格·秒}^{-1},\qquad(4\text{-}177)$$

这里 M 是中子星质量，$M_\odot$ 是太阳质量，ρ 是中子星质量密度，核物质密度 $\rho_{核}\approx3.7\times10^{14}$ 克·厘米$^{-3}$，T_9 是恒星核心的温度，单位是 10^9 开，N_π/N_b 是准自由 π 介子的数密度与重子的数密度之比。为了比较起见，对于有效表面温度 T_e 的中子星，其光子光度 L_γ 由下式给出：

$$L_\gamma=7\times10^{36}T_{e7}^4R_{10}^2\text{ 尔格·秒}^{-1},\qquad(4\text{-}178)$$

式中 $T_{e7}=T_e/10^7$，R_{10} 是以 10 公里为单位的恒星半径。巴考尔等(Bahcall 和 Wolf, 1965)还考虑处于统计平衡状态的中子星由于热能损耗而确定的冷却时间。芬齐(Finzi, 1965)指出 I 型超新星的指数光变曲线可能是由于乌卡过程对中子星振动能的耗散。当中子星振动时，平衡条件不再满足，每单位质量的振动能的耗散率 dw/dt 由下式给出(Finzi 和 Wolf, 1968)：

$$\frac{dw}{dt}=KQ_\nu。\qquad(4\text{-}179)$$

上式中由(4-169)式及(4-170)式所给出的修正的乌卡过程所引起的中微子发射率为：

$$Q_\nu=3\times10^5\left(\frac{\rho_{核}}{\rho}\right)T_9^8\text{ 尔格·克}^{-1}\text{·秒}^{-1}。\qquad(4\text{-}180)$$

当化学势 μ 与热能 kT 的比值范围在 1～16 时，常数 K 的范围为 $10^{-1}\sim10^3$。

4.3.5. 中微子偶发射

正如庞蒂科沃(Pontecorvo, 1959)首先提出的，在恒星晚期，中微子偶发射可以迅速地加速恒星的演化。以各种中微子偶的发射过程(乌卡过程除外)为主的范围以及预言的太阳中微子能谱示于图 25。对恒星演化研究来说，感兴趣的是中微子光度，接着，我们给出福勒等(Fowler 和 Hoyle, 1964)所概述的主要中微子偶的发射过程。

4.3.5.1. 中微子韧致辐射及中微子同步加速辐射

正如庞蒂科沃(Pontecorvo, 1959)首先提出的，按照下列反应韧致辐射将引起中微子发射：

$$e^-+(Z,\ A)\to e^-+(Z,\ A)+\nu_e+\bar{\nu}_e,\qquad(4\text{-}181)$$

这里电子 e^- 与原子核 $(Z,\ A)$ 碰撞发射一个电子 e^- 与一个中微子 ν_e 与反中微子 $\bar{\nu}_e$ 偶。这种过程类似于寻常的光子韧致辐射，只是以中微子偶代替通常在非弹性电子散射中所发射的光子。甘德尔曼等(Gandelman 和 Pinaev, 1960)研究了非简并气体的自由-自由中微子

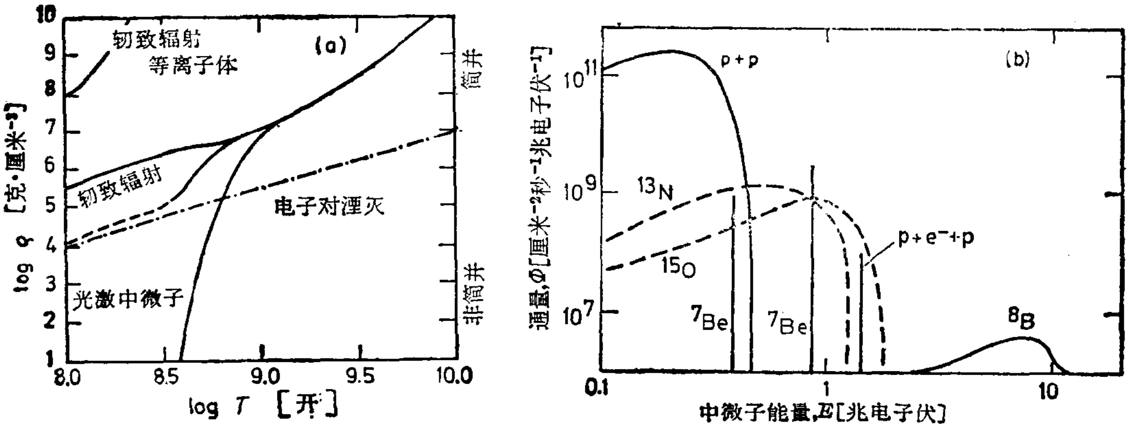


图 25 各种中微子偶发射过程的主要范围(a)，太阳中微子能谱(b)。ρ 及 T 分别表示气体密度及温度。假定核电荷 $Z=26$ 并忽略晶格改正，计算了中微子韧致辐射。太阳中微子能谱图中，实线表示质子-质子链，虚线表示碳-氮-氧循环。连续谱辐射源的中微子通量的单位是中微子数·厘米$^{-2}$·秒$^{-1}$·兆电子伏$^{-1}$，谱线辐射源的中微子通量的单位是中微子数·厘米$^{-2}$·秒$^{-1}$。图 (a) 取自费斯塔等 (Festa 和 Ruderman, 1969) 的文章，而图(b)取自巴考尔等(Bahcall 和 Sears, 1972) 的文章

韧致辐射，得到有效截面为：

$$\sigma=\sigma_0 Z^2\left(\frac{E_e}{mc^2}\right)^3, \tag{4-182}$$

式中 E_e 是入射电子的动能，而

$$\sigma_0=\frac{8r_0^2}{525\pi^3}\left[\frac{g}{mc^2}\left(\frac{\hbar}{mc}\right)^3\right]^2=3.52\times10^{-52}\text{ 厘米}^2, \tag{4-183}$$

这里 r_0 是经典电子半径，弱相互作用耦合常数 $g=^*1.4102\times10^{-49}$ 尔格·厘米^3。若假定电子具有麦克斯韦分布以及非简并气体是完全电离的，则电子中微子光度密度 P_ν 由下式给出：

$$P_\nu=2.75\times10^{-10}\frac{\rho^2}{\mu_e\nu}T^{4.5}\text{ 尔格·厘米}^{-3}\text{·秒}^{-1}, \tag{4-184}$$

式中 ρ 是气体质量密度，温度 T 的单位是千电子伏(1 千电子伏 $=^*1.160450\times10^7$ 开)，平均电子分子量 μ_e 及因子 ν 由下式给出：

$$\mu_e^{-1}=\sum_i\frac{X_iZ_i}{A_i}\quad\text{及}\quad \nu^{-1}=\sum_i X_i\frac{Z_i^2}{A_i}, \tag{4-185}$$

式中 X_i、Z_i 及 A_i 分别是 i 类原子核的质量分数、核电荷及原子量。当电子具有费密-狄拉克分布并且是近于简并情况时，

$$P_\nu\approx0.82\times10^{-7}\frac{\rho}{\nu}T^6\ln\left(0.89\frac{E_0}{T}\right)\text{尔格·厘米}^{-3}\text{·秒}^{-1}, \tag{4-186}$$

式中 T 的单位是千电子伏，以及

$$E_0=5.07\times10^{-5}mc^2\left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)^{2/3}。$$

费斯塔等(Festa 和 Ruderman, 1969)研究了相对论性简并电子气受原子核的库仑散射产生的中微子韧致辐射。对于无规的原子核气体，中微子发射率 Q_ν 由下式给出：

$$Q_\nu = 20g^2 \frac{Z^2 e^4}{\pi^5}(kT)^6 \left\{B_1 B_2 - (\beta^2-1) B_3 \left[\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\left(\beta - \beta\frac{(\beta^2+1)}{2}\ln\frac{\beta+1}{\beta-1}\right)\right]\right\} \text{尔格·原子核}^{-1}\text{·秒}^{-1} \quad (4\text{–}187)$$
$$\approx 0.76\frac{Z^2}{A}\left(\frac{T}{10^8\text{开}}\right)^6 \text{尔格·克}^{-1}\text{·秒}^{-1} \quad (\text{当}\ \rho\to\infty),$$

这里 $\beta = E_F/P_F$，其中 E_F 及 P_F 分别表示费密能量及费密动量，因子 B_1、B_2 及 B_3 由下式给出：

$$\left.\begin{aligned}
B_1 &= (1-\beta^2)\left[\frac{1}{2}\beta\ln\left(\frac{\beta+1}{\beta-1}\right)-1\right]+\frac{1}{3};\\
B_2 &= -4+2(1+\alpha^2)\ln\left(\frac{2+\alpha^2}{\alpha^2}\right);\\
B_3 &= \ln\left(\frac{2+\alpha^2}{\alpha^2}\right)-\frac{2}{2+\alpha^2},
\end{aligned}\right\}$$

式中 $\alpha^2=\beta/215$。当在零温度时原子排列成刚性晶格，在低 Z 值，Q_ν 减小；在 $Z=1$，Q_ν 减至零；在 $Z\gtrsim 25$，Q_ν 减为 $\gtrsim 0.4Q_\nu$。不过，当温度是有限值时，这种抑制作用是较小的。如同图 25 所示，在高密度及中等温度时，中微子轫致辐射所引起的中微子偶发射超过其他粒子偶发射过程。在高密度时，因为没有未填满电子的能态可利用，以及因为等离子体频率的增加，故其他过程是抑制的。在低温时，正常占优势的光致中微子发射率随 T^9 而减小，而中微子轫致辐射发射率随 T^6 减小，因而如图 25 所示，在中等密度–温度区，轫致辐射占优势。

比纳耶夫(Pinaev, 1964)已算出在复合到原子的 K 壳层时的中微子轫致辐射。复合到 K 壳层的总截面由下式给出：

$$\sigma = \sigma_0 Z^5 \frac{c}{v}(E_e+I), \quad (4\text{–}188)$$

式中
$$\sigma_0 = \frac{4\alpha^5}{15\pi^2}\,\frac{g^2 m^2}{\hbar^4} = {}^*0.7459614\times10^{-56}\ \text{厘米}^2,$$

电子的动能 E_e 及 I 是以 mc^2 为单位；v 为起始电子的速度；K 层电子的电离势为

$$I=\alpha^2 Z^2 mc^2/2,$$

其中 α 是精细结构常数。对具有麦克斯韦电子分布的非简并气体，自由–束缚中微子光度密度为：

$$P_\nu = 1.54\times10^{-8} Z^6 A^{-2}\rho^2 T^2(1-f)\ \text{尔格·厘米}^{-3}\text{·秒}^{-1}, \quad (4\text{–}189)$$

式中 Z 是核电荷，A 是原子量，ρ 是气体质量密度，T 是以千电子伏为单位的温度，而

$$f=\left[1+320\frac{AT^{3/2}}{Z\rho}\right]^{-1}。$$

对于简并电子气，自由–束缚中微子光度密度为：

$$P_\nu = 1.45\times10^{-13} Z^4\left(\frac{Z\rho}{A}\right)^{10/3}\exp\left(-\frac{E_F}{T}\right)\text{尔格·厘米}^{-3}\text{·秒}^{-1}。 \quad (4\text{–}190)$$

兰斯特里特(Landstreet, 1967)首先算出在强磁场中一个电子加速产生的中微子轫致辐射。当磁场强度为 H 时，中微子同步加速光度密度由下式给出 (Landstreet, 1967; Canuto, Chiu, Chou 及 Fassio–Canuto, 1970)：

$$\begin{aligned}
&\text{若}\ H_8\rho^{2/3}\lesssim 8\times10^6 T_7,\ P_\nu = 3\times10^{-44} H_8^6 T_7 \rho^4\ \text{尔格·厘米}^{-3}\text{·秒}^{-1};\\
&\text{若}\ H_8\rho^{2/3}\gtrsim 8\times10^6 T_7,\ P_\nu = 4\times10^{-7} T_7^{19/3}\rho^{4/9} H_8^{2/3}\ \text{尔格·厘米}^{-3}\text{·秒}^{-1}。
\end{aligned} \quad (4\text{–}191)$$

上式适用于在质量密度为 ρ 及温度为 T 的简并气体中的相对论性电子。这里 $H_8=H/10^8$

及 $T_7=T/10^7$。对于非简并的、非相对论性气体

$$P_\nu=2\times10^{-46}H_8^6N_e\ \text{尔格·厘米}^{-3}\cdot\text{秒}^{-1};\tag{4-192}$$

而对于简并的、非相对论性气体

$$P_\nu=1\times10^{-28}T_7H_8^6N_e^{1/3}\ \text{尔格·厘米}^{-3}\cdot\text{秒}^{-1},\tag{4-193}$$

式中 N_e 是电子数密度。卡纽托等 (Canuto, Chiu, Chou 和 Fassio-Canuto, 1970) 推导了相对论性电子气的中微子同步加速辐射的普遍表达式，还给出数值近似计算。这些数据在高密度时与兰斯特里特的公式符合，但在较低密度时不符合。

4.3.5.2. 电子偶湮没中微子

邱宏义等 (Chiu 和 Morrison, 1960; Chiu, 1961; 以及 Chiu 和 Stabler, 1961) 研究了下列反应:

$$e^-+e^+\rightarrow\nu_e+\bar{\nu}_e,\tag{4-194}$$

即由电子 e^- 与正电子 e^+ 湮没所产生的中微子发射。中微子光度密度 P_ν 由下式给出:

$$\left.\begin{aligned}
&P_\nu=4.896\times10^{18}T_9^3\exp\left(-\frac{11.86}{T_9}\right)\text{尔格·厘米}^{-3}\cdot\text{秒}^{-1}\\
&\qquad\text{(非简并的、非相对论性的)};\\
&P_\nu=4.45\times10^{15}T_9^9\ \text{尔格·厘米}^{-3}\cdot\text{秒}^{-1}\\
&\qquad\text{(非简并的、相对论性的)};\\
&P_\nu=2.404\times10^{13}\left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)T_9^{3/2}\exp\left[-\frac{(E_F+mc^2)}{kT}\right]\text{尔格·厘米}^{-3}\cdot\text{秒}^{-1}\\
&\qquad\text{(简并的、非相对论性的)};\\
&P_\nu=1.43\times10^{11}\rho T_9^4\left[1+\frac{5kT}{E_F}\right]\exp\left(-\frac{E_F}{kT}\right)\text{尔格·厘米}^{-3}\cdot\text{秒}^{-1}\\
&\qquad\text{(简并的、相对论性的)},
\end{aligned}\right\}\tag{4-195}$$

式中 ρ 是气体质量密度，气体温度 T 的单位是开，因子 $T_9=T/10^9$。若

$$\rho>2.4\times10^{-8}T^{3/2}\mu_e\ \text{克·厘米}^{-3},\tag{4-196}$$

气体是简并的；若

$$\rho>7.3\times10^6\mu_e\ \text{克·厘米}^{-3},\tag{4-197}$$

气体是相对论性的。每个电子的平均分子量是:

$$\mu_e^{-1}=\frac{N_e}{\rho N_A}=\sum\frac{X_ZZ}{A_Z},\tag{4-198}$$

式中 N_e 是电子密度，阿伏伽德罗数 $N_A=$*6.022045 摩尔$^{-1}$ [1)]，X_Z 是原子序数为 Z 的元素的质量分数，A 是元素质量数，$E_F=\varepsilon_F+mc^2$，其中完全简并气体的费密能量 ε_F 由下式给出:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_F&=mc^2\left\{\left[1.018\times10^{-4}\left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)^{2/3}+1\right]^{1/2}-1\right\}\\
&=0.509\times10^{-4}\left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)^{2/3}m_ec^2\quad\text{(非相对论性的)}\\
&=1.009\times10^{-2}\left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)^{1/3}m_ec^2\quad\text{(相对论性的)}。
\end{aligned}\tag{4-199}$$

这些方程给出一对湮没中微子发射率 Q_ν 为:

1) 原文误为(克·摩尔)$^{-1}$，原著后面凡用到 N_A 的单位均有误，均已改正，不再注明。——译者注

$$
\left.\begin{aligned}
&Q_\nu=\frac{4.8}{\rho}\left(\frac{T}{10^3}\right)^3\exp\left(-\frac{2mc^2}{kT}\right)\text{尔格·克}^{-1}\text{·秒}^{-1}\\
&\qquad(\text{当 } kT\ll mc^2,\ \text{非简并的});\\
&Q_\nu=\frac{4.3\times10^{24}}{\rho}\left(\frac{T}{10^{10}}\right)^9\text{尔格·克}^{-1}\text{·秒}^{-1}\\
&\qquad(\text{当 } kT\gg mc^2,\ \text{非简并的});\\
&Q_\nu=4.5\mu_e\left(\frac{T}{10^4}\right)^{3/2}\exp\left[-\frac{(E_F+2mc^2)}{kT}\right]\text{尔格·克}^{-1}\text{·秒}^{-1}\\
&\qquad(\text{当 } kT\ll mc^2、E_F\ll mc^2,\ \text{简并的});\\
&Q_\nu=\frac{0.14}{\mu_e}\left(\frac{T}{10^6}\right)^4\left(\frac{E_F}{mc^2}\right)^2\exp\left[-\frac{E_F}{kT}\right]\text{尔格·克}^{-1}\text{·秒}^{-1}\\
&\qquad(\text{当 } kT\gg mc^2,\ \text{简并的})。
\end{aligned}\right\}\tag{4-200}
$$

博德特等 (Beaudet、Petrosian 和 Salpeter, 1967) 对于电子偶湮没过程的中微子能量损耗率与下面讨论的光激中微子过程及等离子体中微子过程的中微子能量损耗率进行了比较。

4.3.5.3. 光激中微子过程

邱宏义等(Chiu 和 Stabler, 1961; 以及 Ritus, 1962) 首先研究了光激中微子反应:

$$\gamma+e^-\rightarrow e^-+\nu_e+\bar{\nu}_e,\tag{4-201}$$

即由一个光子 γ 与一个电子 e^- 碰撞所产生的中微子的发射。佩特罗欣等 (Petrosian· Beaudet 和 Salpeter, 1967) 研究了热等离子体中由于光激中微子过程所造成的中微子能量损耗率, 其中包括存在于黑体辐射中的正电子的贡献。他们得到如下的光激中微子光度密度:

$$
\left.\begin{aligned}
&P_\nu=0.976\times10^8T_9^8\left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)\text{尔格·厘米}^{-3}\text{·秒}^{-1}\\
&\qquad(\text{非简并的、非相对论性的});\\
&P_\nu=1.477\times10^{13}T_9^9[\log T_9-0.536]\text{尔格·厘米}^{-3}\text{·秒}^{-1}\\
&\qquad(\text{非简并的、相对论性的});\\
&P_\nu=0.976\times10^8T_9^8\left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)\left[\frac{(\rho/\mu_e)}{3.504\times10^5}\right]^{-2/3}\text{尔格·厘米}^{-3}\text{·秒}^{-1}\\
&\qquad(\text{简并的、非相对论性的});\\
&P_\nu=1.514\times10^{13}T_9^9\text{尔格·厘米}^{-3}\text{·秒}^{-1}\\
&\qquad(\text{简并的、相对论性的}),
\end{aligned}\right\}\tag{4-202}
$$

式中简并的及相对论性的判据的条件已在前节中给出, $T_9=T/10^9$, ρ 是气体质量密度, μ_e 是每个电子的平均分子量。对大多数应用来说, 可以用下列表达式计算光激中微子的光度密度(Petrosian, Beaudet 和 Salpeter, 1967):

$$
\begin{aligned}
P=&1.103\times10^{13}T_9^9\exp\left(-\frac{5.93}{T_9}\right)+0.976\times10^8T_9^8(1+4.2T_9)^{-1}\left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)\\
&\times\left[1+\frac{6.446\times10^{-6}\rho}{\mu_eT_9(1+4.2T_9)}\right]^{-1}\text{尔格·厘米}^{-3}\text{·秒}^{-1}。
\end{aligned}\tag{4-203}
$$

博德特等(Beaudet, Petrosian 和 Salpeter, 1967) 对于电子偶湮没、光激中微子及等离子体中微子等几种过程所造成的能量损耗进行了比较。

光激中微子发射率 Q_ν 的近似公式为:

$$\left.\begin{aligned}
&Q_\nu \approx \mu_e^{-1}\left(\frac{T}{10^8}\right)^8 \text{尔格·克}^{-1}\text{·秒}^{-1}\\
&\qquad\text{(当 } kT \ll mc^2\text{, 非简并的、非相对论性的);}\\
&Q_\nu \approx \frac{2.5\times10^{14}}{\mu_e}\left(\frac{T}{10^{10}}\right)^8\left[\log\left(\frac{T}{10^{10}}\right)+1.6\right]\text{尔格·克}^{-1}\text{·秒}^{-1}\\
&\qquad\text{(当 } kT \gg mc^2\text{, 非简并的、相对论性的);}\\
&Q_\nu \approx 1.5\times10^2\left(\frac{T}{10^8}\right)^9(\mu_e^2\rho)^{-1/3}\text{尔格·克}^{-1}\text{·秒}^{-1}\\
&\qquad\text{(当 } kT \ll mc^2\text{, 简并的、非相对论性的);}\\
&Q_\nu \approx \frac{6.3\times10^6}{\mu_e}\left[1+5\left(\frac{T}{10^9}\right)^2\right]\left(\frac{T}{10^9}\right)^7\left(\frac{mc^2}{E_F}\right)^3\text{尔格·克}^{-1}\text{·秒}^{-1}\\
&\qquad\text{(当 } kT \gg mc^2\text{, 简并的、相对论性的)。}
\end{aligned}\right\}\quad(4\text{–}204)$$

4.3.5.4. 等离子体中微子过程

当一个光子在电离气体中传播时就产生虚电子–空穴偶，并且它表现为犹如具有下式所表示的静质量 M 的粒子：

$$M=\frac{\hbar\omega_p}{c^2},\tag{4–205}$$

式中等离子体频率 ω_p 由下式给出：

$$\left.\begin{aligned}
&\omega_p^2=\frac{4\pi N_e e^2}{m}\quad\text{(非简并的);}\\
&\omega_p^2=\frac{4\pi N_e e^2}{m}\left[1+\left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2(3\pi^2N_e)^{2/3}\right]^{-1/2}\quad\text{(简并的)。}
\end{aligned}\right.\quad(4\text{–}206)$$

这样一个粒子称为等离子体子 Γ，按照下列反应 $\Gamma\to\nu_e+\bar{\nu}_e$，它会衰变并发射中微子。等离子体子 Γ 可按纵向及横向两种模式传播，引起由下式所给出的相应的中微子光度密度 $P_{l\nu}$ 及 $P_{t\nu}$ (Adams, Ruderman 和 Woo, 1963; Inman 和 Ruderman, 1964)：

$$P_{l\nu}=1.224\times10^{13}T_9^9x^9(e^x-1)^{-1}\text{尔格·厘米}^{-3}\text{·秒}^{-1},\tag{4–207}$$

$$\left.\begin{aligned}
P_{t\nu}&=3.214\times10^{14}T_9^9x^9F(x)\text{尔格·厘米}^{-3}\text{·秒}^{-1}\\
&\approx7.4\times10^{21}\left(\frac{\hbar\omega_p}{mc^2}\right)^6\left(\frac{mc^2}{kT}\right)^{-3}\text{尔格·厘米}^{-3}\text{·秒}^{-1}\quad(\text{当 } x\ll1)\\
&\approx3.85\times10^{21}\left(\frac{\hbar\omega_p}{mc^2}\right)^{7.5}\left(\frac{mc^2}{kT}\right)^{-1.5}\exp\left(-\frac{\hbar\omega_p}{kT}\right)\text{尔格·厘米}^{-3}\text{·秒}^{-1}\quad(\text{当 } x\gg1),
\end{aligned}\right.\quad(4\text{–}208)$$

式中

$$x=\frac{\hbar\omega_p}{kT}=\left\{\frac{4\pi e^2\rho\hbar^2}{m_p m\mu_e(kT)^2}\left[1+\left(\frac{3\pi^2\hbar^3\rho}{2m_p}\right)^{2/3}\right]^{1/2}\right\}^{1/2}$$
$$\approx\frac{3.345\times10^{-4}(\rho/\mu_e)^{1/2}}{T_9[1+1.0177\times10^{-4}(\rho/\mu_e)^{2/3}]^{1/4}}$$

及

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}[K_2(nx)/nx],$$

其中 $K_2(nx)$ 是第二类修正贝塞耳函数。这里已用了泽迪 (Zaidi, 1965) 所给出的改正，他证明亚当斯等(Adams, Ruderman 和 Woo, 1963) 所给出的纵向及横向光度密度的常数偏差因子分别为 3/8 及 1/4。博德特等 (Beaudet, Petrosian 及 Salpeter, 1967) 对电子偶湮没、光激中微子及等离子体中微子等过程所产生的中微子光度作了比较。他们得到关系式：

$$\frac{P_{l\nu}}{P_{t\nu}}=0.0158\left(\frac{\hbar\omega_p}{kT}\right)^2 \quad (\text{当 } \hbar\omega_p \ll kT)$$
$$=1.078 \quad (\text{当 } \hbar\omega_p \gg kT)。 \tag{4-209}$$

卡纽托等(Canuto, Chiuderi 和 Chou, 1970) 给出了在强磁场中等离子体中微子发射，所得结果用下列磁场参数归一化:

$$H_q=\frac{m^2c^3}{e\hbar}={}^*4.414046\times10^{13} \text{ 高斯。} \tag{4-210}$$

虽然除非磁场强度 $H\gtrsim10^{13}$ 高斯，横向中微子发射是不会显著地改变的，而纵向等离子体则以新的模式传播，并引起下式所给出的中微子光度密度 $P_{1\nu}$:

$$P_{1\nu}=14.8T\rho_6^{-2}\left(\frac{H}{H_q}\right)^6 \text{ 尔格·厘米}^{-3}\text{·秒}^{-1}, \tag{4-211}$$

式中 $T\geqslant10^9$ 开是温度值，$\rho_6=\rho/10^6$，其中 ρ 是气体质量密度。设 $P_{1\nu H}$ 及 $P_{1\nu 0}$ 分别表明存在磁场及没有磁场时的光度密度，若 $H=10^{11}$ 高斯及 $T\gtrsim10^9$ 开，当 $\rho>10^{11}$ 克·厘米$^{-3}$ 时，$P_{1\nu H}\gg10^{10}P_{1\nu 0}$；而当 $\rho<10^{11}$ 克·厘米$^{-3}$ 时，则 $P_{1\nu 0}\gg10^5P_{1\nu H}$。

4.3.5.5. 光致库仑中微子及光子-光子中微子

马廷扬等 (Matinyan 和 Tsilosani, 1962; 以及 Rosenberg, 1963) 讨论了在原子核(Z, A)的库仑场中光子 γ 按下列反应产生的中微子偶:

$$\gamma+(Z,\ A)\rightarrow(Z,\ A)+\nu_e+\bar{\nu}_e, \tag{4-212}$$

式中 ν_e 及 $\bar{\nu}_e$ 分别表示电子中微子及反电子中微子。罗森堡(Rosenberg, 1963)得到下式所给出的光致库仑中微子光度密度 P_ν，当密度为 10^5 克·厘米$^{-3}$ 及 $\nu^{-1}=\sum_i X_iZ_i^2/A_i=5$ 克$^{-1}$ 时，

$$P_\nu\approx2.3\times10^{14}\left(\frac{kT}{mc^2}\right)^{10} \text{ 尔格·厘米}^{-3}\text{·秒}^{-1}。 \tag{4-213}$$

邱宏义等 (Chiu 和 Morrison, 1960; Rosenberg, 1963; 以及 Van Hieu 和 Shabalin, 1963) 讨论了按照下列反应:

$$\gamma+\gamma\rightarrow\gamma+\nu_e+\bar{\nu}_e, \tag{4-214}$$

由两个光子之间的碰撞而使光子 γ 转化成中微子偶。范休等(Van Hieu 和 Shabalin, 1963)得到下式所给出的光子-光子中微子光度密度 P_ν:

$$P_\nu\approx1.7\times10^{-28}T^{17} \text{ 尔格·厘米}^{-3}\text{·秒}^{-1}, \tag{4-215}$$

式中 T 的单位是千电子伏(1 千电子伏 = *1.160450 × 10^7 开)。罗森堡(Rosenberg, 1963)给出当取 $\rho=10^5$ 克·厘米$^{-3}$ 及 $\nu^{-1}=5$ 克$^{-1}$ 时，上述过程的 P_ν:

$$P_\nu\approx\frac{0.46\times10^{14}}{\sum N_iZ_i^2}\left(\frac{kT}{mc^2}\right)^{10}\left(\frac{kT}{\hbar c}\right)^3 \text{ 尔格·厘米}^{-3}\text{·秒}^{-1}, \tag{4-216}$$

这里 $N_iZ_i^2=6\times10^{23}\rho\nu^{-1}$。

4.3.5.6. μ 子及 π 介子中微子过程

在温度超过 10^{11} 开(或 $kT\approx50$ 兆电子伏)时，恒星的辐射场能够产生 μ 子偶或 π 介子偶，随后它们能以下列反应湮没成中微子-反中微子偶:

$$\mu^-\rightarrow e^-+\bar{\nu}_e+\nu_\mu;$$
$$\mu^+\rightarrow e^++\nu_e+\bar{\nu}_\mu, \tag{4-217}$$

$$\pi^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu;$$
$$\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu。\tag{4-218}$$

根据阿内特(Arnett, 1967)所指出的，对高度演化的大质量恒星来说，这些过程可能是重要的冷却机制。μ 子衰变的能量损耗率 Q_μ 由下式给出：

$$Q_\mu = -\frac{2N_{偶}E_{平均}}{\rho\tau_\mu} \approx -9.9\times10^{38}\ \frac{\exp(-\beta)}{\rho\beta^{3/2}}\text{尔格·克}^{-1}\text{·秒}^{-1},\tag{4-219}$$

式中 ρ 是质量密度，平均衰变能 $E_{平均}\approx35$ 兆电子伏，平均寿命 $\tau_\mu = {}^*2.199\times10^{-6}$ 秒，

$$\beta = \frac{m_\mu c^2}{kT},$$

式中 $m_\mu c^2 = 105.6595$ 兆电子伏是 μ 子中微子静质量能[1)]。粒子-反粒子偶的数密度 $N_{偶}$ 是在假定它与 $kT \ll mc^2$ 的辐射场达到平衡并且粒子与反粒子具有相等浓度这些条件下得出的：

$$N_{偶} \approx \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi^{3/2}}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^3 \frac{\exp(-\beta)}{\beta^{3/2}}。\tag{4-220}$$

π 介子衰变的能量损耗 Q_π 由(4-219)式给出，取 $E_{平均}\approx34$ 兆电子伏及 $\tau_\pi \approx {}^*2.603\times10^{-8}$ 秒则得出：

$$Q_\pi \approx -9.6\times10^{40}\ \frac{\exp(-\beta)}{\rho\beta^{3/2}}\ \text{尔格·克}^{-1}\text{·秒}^{-1},\tag{4-221)[1]$$

式中

$$\beta = \frac{m_\pi c^2}{kT},$$

并且 $m_\pi c^2 = {}^*139.5688$ 兆电子伏是 π 介子的静质量能。汉森(Hansen, 1968)在假定 μ^+ 及 μ^- 浓度相等的情况下，估计了 μ 子中微子光度密度 L_μ。他得到当 $50\leqslant T_9\leqslant500$ 时，其中 $T_9 = T/10^9$，

$$L_\mu \approx 4\times10^{32}T_9^3[1+4.75\times10^{-3}T_9+6.5\times10^{-6}T_9^2] \cdot\exp\left[-\frac{2.45\times10^3}{T_9}\right]\text{尔格·厘米}^{-3}\text{·秒}^{-1}。\tag{4-222}$$

汉森(Hansen, 1968)还给出下列反应：

$$e^- + \mu^+ \to \nu_e + \bar{\nu}_\mu$$

所引起的 μ 子中微子光度的下限。

4.3.6. 中微子不透明度

电子及 μ 子中微子与物质相互作用截面的测定值为 10^{-44} 厘米² 的量级，并已在(4-97)式及(4-98)式中给出。对下式所给出的中微子-电子散射反应：

$$(\nu_e \text{ 或 } \bar{\nu}_e) + e^- \to (\nu_e' \text{ 或 } \bar{\nu}_e') + e^{-\prime}\tag{4-223}$$

及

$$(\nu_\mu \text{ 或 } \bar{\nu}_\mu) + e^- \to (\nu_\mu' \text{ 或 } \bar{\nu}_\mu') + e^{-\prime},\tag{4-224}$$

巴考尔(Bahcall, 1964)求出其截面正比于

$$\sigma_{0e} = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\hbar}{mc}\right)^{-4}\left(\frac{g^2}{m^2c^4}\right) \approx 1.7\times10^{-44}\ \text{厘米}^2\tag{4-225}$$

及

---

1) 原文漏"能"字。——译者注

1 此方程由 μ 子动量的变化得出，与反应时的 π 介子动量 (4-218) 式比较是负值。适当考虑此效应，(4-221) 式中的数值系数成为 8.4×10^{40}(G. V. Domogatsky, 预印本 No. 96, 莫斯科核研究所, 1973)。

$$\sigma_{0\mu}=\left(\frac{m_{\mu}}{m}\right)^{2}\sigma_{0e}\approx 7.3\times 10^{-40}\text{ 厘米}^{2}, \tag{4-226}$$

式中 $g=*1.4102\times 10^{-49}$ 尔格·厘米^3 是弱相互作用耦合常数，下标 e 及 μ 分别表示电子中微子及 μ 子中微子的散射。对于能量为 E_{ν} 的中微子，在非简并气体中，电子散射的截面为(Bahcall, 1964)：

$$\sigma=\frac{\sigma_0}{2}\left(\frac{E_{\nu}}{mc^2}\right)\quad(\text{当 }E_{\nu}\gg mc^2\text{ 及 }kT\ll mc^2); \tag{4-227}$$

$$\sigma=1.6\left(\frac{kT}{mc^2}\right)\sigma_0\left(\frac{E_{\nu}}{mc^2}\right)\quad(\text{当 }E_{\nu}\gg mc^2\text{ 及 }kT\gg mc^2); \tag{4-228}$$

$$\sigma=\sigma_0\left(\frac{E_{\nu}}{mc^2}\right)^2\quad(\text{当 }E_{\nu}\ll mc^2\text{ 及 }kT\ll mc^2) \tag{4-229}$$

及

$$\sigma=17\left(\frac{kT}{mc^2}\right)^2\sigma_0\left(\frac{E_{\nu}}{mc^2}\right)^2\quad(\text{当 }E_{\nu}\ll mc^2\text{ 及 }kT\gg mc^2), \tag{4-230}$$

式中电子的静质量能 $mc^2=*8.187241\times 10^{-7}$ 尔格 $=*0.5110034$ 兆电子伏，热能量 $kT=*0.861735\times 10^{-4}T$ 电子伏。(4-227) 式及 (4-228) 式用于反中微子-电子散射时应除以 3，而(4-229)式及(4-230)式对于中微子-电子及反中微子-电子散射都是正确的。

对于简并气体，中微子-电子散射截面由下式给出 (Bahcall, 1964 以及 Bahcall 和 Wolf, 1965 的改正)：

$$\sigma=\sigma_0\left(\frac{E_{\nu}}{mc^2}\right)^2\left(\frac{E_{\nu}}{E_F}\right)\quad(\text{当 }E_{\nu}\ll E_F) \tag{4-231}$$

及

$$\sigma=\sigma_0\left(\frac{E_{\nu}}{mc^2}\right)\left(\frac{E_F}{mc^2}\right)\quad(\text{当 }E_{\nu}\gg E_F), \tag{4-232}$$

这里 E_F 是电子的费密能量，上面两式用于反中微子-电子散射时应乘以 1/3。$E_{\nu}\approx 3kT$，费密能量由下式给出：

$$\begin{aligned}E_F&=mc^2\left\{\left[\left(\frac{\rho}{10^6\mu_e}\right)^{2/3}+1\right]^{1/2}-1\right\}\\&\approx mc^2\left(\frac{\rho}{10^6\mu_e}\right)^{1/3}=(3\pi^2)^{1/3}\hbar cN_e^{1/3}\quad(\text{当 }\rho\gg 10^6\mu_e);\end{aligned} \tag{4-233}$$

质量密度 ρ 与电子密度 N_e 的关系式为：

$$\rho=N_A^{-1}\mu_e N_e=10^6\mu_e x^3, \tag{4-234}$$

式中

$$x^3=3\pi^2N_e\left(\frac{\hbar}{mc}\right)^3,$$

$\mu_e\approx 2$ 是电子的分子量，$N_A=*6.022045\times 10^{23}$ 摩尔$^{-1}$ 是阿伏伽德罗数。对非相对论性情况，$\rho\ll 10^6\mu_e$，我们得到：

$$E_F\approx\frac{mc^2}{2}\left(\frac{\rho}{10^6\mu_e}\right)^{2/3}\approx(3\pi^2)^{2/3}\frac{\hbar^2}{2m}N_e^{2/3}。 \tag{4-235}$$

汉森(Hansen, 1968)定义化学势 μ 为下列两值的较小者：

$$\mu=10^{-2}mc^2\left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)^{1/3}$$

或

$$\mu=6\times 10^{-6}mc^2T_9^{-2}\left(\frac{\rho}{\mu_e}\right), \tag{4-236}$$

并得到电子-中微子散射截面：

$$\left.\begin{aligned}\sigma&=\frac{2}{3}\sigma_0 E_\nu T_9 \quad (\text{当 } \mu\ll kT);\\ \sigma&=\frac{\sigma_0}{2}E_\nu\left(\frac{\mu}{mc^2}\right) \quad (\text{当 } \mu\gg kT \text{ 及 } E_\nu\gg\mu);\\ \sigma&=\frac{\sigma_0}{4}\frac{E_\nu}{\mu}mc^2T_9\left[1+\frac{3E_\nu^2}{T_9}\right]\left[1+\frac{T_9}{E_\nu}\right] \quad (\text{当 } \mu\gg kT \text{ 及 } E_\nu\ll\mu),\end{aligned}\right\} \tag{4-237}$$

式中 E_ν 是中微子能量，单位是兆电子伏，$T_9=T/10^9$。若我们令 $\mu=E_F+mc^2\approx E_F$ 并注意当 $mc^2=$ *0.5110034 兆电子伏时，E_ν(单位为兆电子伏)$\approx E_\nu/(mc^2)$，(4-237) 式的结果很接近于上面所给出的那些结果。

巴考尔等(Bahcall 和 Frautschi, 1964)已给出中微子-核子散射所引起的不透明度，他们给出：

$$\sigma\lesssim 10^{-2}\sigma_{0e}\left(\frac{E_\nu}{mc^2}\right)^2, \tag{4-238}$$

上式适用于吸收反应：

$$\left.\begin{aligned}&\bar{\nu}_e+p\rightarrow n+e^+;\\ &\nu_e+n\rightarrow p+e^-,\end{aligned}\right. \tag{4-239}$$

式中 n 及 p 分别表示自由中子及质子，E_ν 是中微子能量，σ_{0e} 由 (4-227) ~ (4-230) 式给出。巴考尔等(Bahcall 和 Frautschi, 1964)还给出束缚核子吸收中微子的公式。

汉森(Hansen, 1968)假定入射中微子的分布与相同温度下的局部电子或核子的黑体能谱是一样的，他已推导出总散射率 Q 的表达式。对中微子-电子散射，他得出：

$$Q\approx 9.1\times10^{-35}N_eN_\nu T_9^2 \text{ 秒}^{-1}\cdot\text{厘米}^{-3} \quad (\text{当 } \mu\ll kT) \tag{4-240}$$

及

$$Q\approx 3.64\times10^{-34}\frac{N_eN_\nu}{(\mu/kT)}T_9^2 \text{ 秒}^{-1}\cdot\text{厘米}^{-3} \quad (\text{当 } \mu\gg kT), \tag{4-241}$$

这里 N_e 是电子数密度；$T_9=T/10^9$；化学势 μ 由 (4-236) 式给出，中微子数密度 N_ν 由下式给出：

$$N_\nu=7.65\times10^{27}T_9^3 \text{ 厘米}^{-3}。 \tag{4-242}$$

类似地，对于由质子 p 或中子 n 所引起的吸收，有

$$Q\approx 1.5\times10^{-6}N_pT_9^5 \text{ 秒}^{-1}\cdot\text{厘米}^{-3} \quad (\text{当 } T_9\gtrsim 10); \tag{4-243}$$

$$Q\approx 1.5\times10^{-6}N_nT_9^5\exp\left(-\frac{\mu}{kT}\right)\text{秒}^{-1}\cdot\text{厘米}^{-3} \quad (\text{当 } T_9\geqslant 5), \tag{4-244}$$

式中 N_p 及 N_n 分别是自由质子及中子的数密度。

4.3.7. 太阳中微子

氢燃烧质子-质子循环被认为是提供大部分太阳热核能的来源，这种循环还按照下列反应产生连续谱中微子(Bahcall, 1964, 1965)：

$$\left.\begin{aligned}H^1+H^1&\longrightarrow H^2+e^++\nu_e \quad &(0.420 \text{ 兆电子伏});\\ B^8&\longrightarrow Be^{8*}+e^++\nu_e \quad &(14.06 \text{ 兆电子伏});\\ N^{13}&\longrightarrow C^{13}+e^++\nu_e \quad &(1.20 \text{ 兆电子伏});\\ O^{15}&\longrightarrow N^{15}+e^++\nu_e \quad &(1.74 \text{ 兆电子伏}),\end{aligned}\right\} \tag{4-245}$$

这里圆括号中的数字是各个反应的中微子最大能量。除了(4-245)式的连续谱反应外，下列分立能量反应也会发射中微子：

$$\left.\begin{aligned} H^1+H^1+e^- &\longrightarrow H^2+\nu_e \quad (1.44\ \text{兆电子伏});\\ Be^7+e^- &\longrightarrow Li^7+\nu_e \quad (0.861\ \text{兆电子伏}—90\%,\\ &\qquad\qquad 0.383\ \text{兆电子伏}—10\%);\\ B^8+e^- &\longrightarrow Be^8+\nu_e \quad (15.08\ \text{兆电子伏});\\ N^{13}+e^- &\longrightarrow C^{13}+\nu_e \quad (2.22\ \text{兆电子伏});\\ O^{15}+e^- &\longrightarrow N^{15}+\nu_e \quad (2.76\ \text{兆电子伏}), \end{aligned}\right\} \tag{4-246}$$

在这里涉及 N^{13} 及 O^{15} 的碳-氮-氧双循环中的中微子产生反应，也被包括在内了。中微子检测实验所感兴趣的是到达地面的通量 φ，如图 25 所示。表 40 中给出了某些中微子通量。通常通量值是与模型有关的，伊贝 (Iben, 1969) 指出中微子通量与模型中所假定的太阳的化学组成有关。表 40 中给出的值是假定 $Z/X=0.019$，$L_\odot=3.81\times10^{33}$ 尔格·秒$^{-1}$，$M_\odot=1.989\times10^{33}$ 克以及太阳年龄为 4.7×10^9 年而得出的。

表 40 各种中微子源到达地面的太阳中微子通量[1]

中 微 子 源	通量(厘米$^{-2}$·秒$^{-1}$)
H^1+H^1	6.0×10^{10}
Be^7+e^-	4.5×10^9
N^{13}	3.3×10^8
O^{15}	2.7×10^8
$H^1+H^1+e^-$	1.5×10^8
B^8	5.4×10^5

[1] 取自巴考尔等(Bahcall 及 Ulrich, 1971)的文章。

现在的太阳中微子检测实验是根据下列反应 (Davis, Harmer 和 Hoffman, 1968) 进行的：

$$\nu_e+{}_{17}Cl^{37}\longrightarrow e^-+{}_{18}Ar^{37}-0.814\ \text{兆电子伏}。\tag{4-247}$$

实验给定了 i 个中微子源的吸收截面 σ_i(单位为厘米^2)与入射中微子通量 φ_i(单位为厘米$^{-2}$·秒$^{-1}$)的乘积之和的极限。现在的极限是：

$$\sum_i \varphi_i\sigma_i \lesssim 1\ \text{太阳中微子单位}，\tag{4-248}$$

其中 1 太阳中微子单位 $=10^{-36}$ 个太阳中微子吸收/靶原子·秒。在核能态之间由中微子所引起的容许跃迁的吸收截面由下式给出 (Bahcall, 1964)：

$$\sigma=\frac{2\pi^2(0.693)}{c(f\tau_{1/2})}\left(\frac{\hbar}{mc}\right)^3\left(\frac{W}{mc^2}\right)^2\frac{cp}{W}F(Z,\ W),\tag{4-249}$$

式中 p 及 W 分别是反应所产生的电子的动量及能量，量 $f\tau_{1/2}$ 是跃迁的 ft 值，$F(Z,\ W)$ 是计及库仑及核大小改正后的费密函数 (Konopinski, 1959; Preston, 1962)。Cl^{37} 的截面是：

$$\sigma=1.91\times10^{-46}\frac{cpW}{(mc^2)^2}\left(\frac{F}{2\pi\alpha Z}\right)\text{厘米}^2，\tag{4-250}$$

式中精细结构常数 $\alpha=$*1/137.03604，$W=W_\nu-0.814$ 兆电子伏 $+0.511$ 兆电子伏，入射中微子能量 $W_\nu>0.814$ 兆电子伏。表 41 给出这种截面值。当把巴考尔等 (Bahcall 和 Ulrich, 1971) 给出的中微子通量与这些截面结合一起考虑时，我们得出结论：入射中微子强度应为 5.6 太阳中微子单位，远高于 1 太阳中微子单位的检测极限。如果太阳的热核能是由碳-氮-氧循环供应的，入射中微子强度应为 35 太阳中微子单位。此外，不管使用怎样的恒星模型，对于质子-质子循环，预期应有约 1.5 太阳中微子单位的通量。一般采取的结论是，小于 0.5

太阳中微子单位的计数率是与观测到的太阳光度由热核反应所产生这一观点不一致的。福勒(Fowler, 1972)对这种分歧提出了一种可能的解释，他提出大约在 3×10^7 年以前太阳曾一度出现对流混合——我们现在看到的太阳表面发出的光的能量正是太阳在 3×10^7 年之前所产生的。我们现在看到的太阳中微子则是在大约 8 分钟以前产生的。

表 41 各种中微子源的 Cl^{37} 吸收截面[1]

中 微 子 源	Cl^{37} 吸收截面(厘米^2)
Be^7	2.9×10^{-46}
N^{13}	2.1×10^{-46}
O^{15}	7.8×10^{-46}
$H^1+H^1+e^-$	1.7×10^{-45}
B^8	1.35×10^{-42}

[1] 取自巴考尔等(Bahcall, 1964; 及 Bahcall 和 Sears, 1972)的文章。

4.4. 元素的核合成

4.4.1. 元素的丰度

最初研究太阳系元素丰度(Goldschmidt, 1937)以后，接着是按照详细地作出各种元素的数目分布随原子量变化的曲线图进行的(Suess 和 Urey, 1956)。后来伯比奇等(Burbidge, Burbidge, Fowler 和 Hoyle, 1957) 把这种丰度曲线作为讨论恒星中的基本核合成过程的

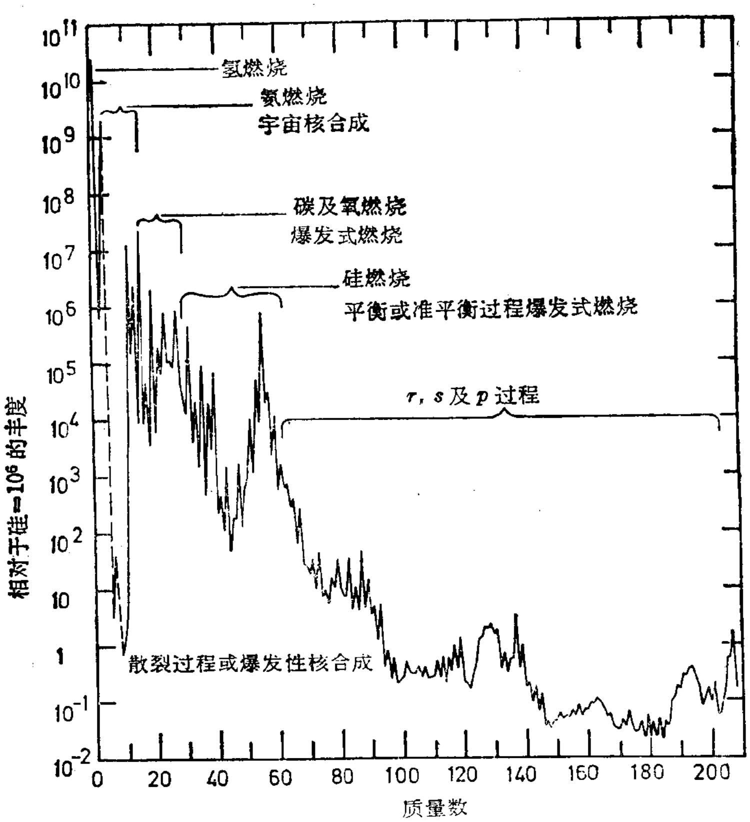


图 26 核素丰度随质量数变化的曲线。图中还示出各种恒星的原子核过程，这些过程可能产生图上相应的特征。丰度资料由表 38 给出

出发点。在表 38 中给出卡梅伦(Cameron, 1973)的丰度表以及形成大部分核素的过程。丰度曲线如图 26 所示。这些数据是根据 I 型碳质球粒陨星[1]（包含碳化合物而具有最少的石质或金属的球粒物质的陨星）的测定而得出的，可以认为这比修斯等(Suess 和 Urey)根据地球的、陨星的及太阳的丰度测定得出的曲线更好地代表实际情况。

4.4.2. 寻常恒星的核合成过程——能量产生阶段及反应率

元素丰度的研究导致对恒星的一系列核合成过程的描述，这些过程几乎与伯比奇等(Burbidge, Burbidge, Fowler 和 Hoyle, 1957) 所假设的过程相同。这些基本过程已示于图 26 的核素丰度曲线中，并且如下所述：

1) 氢燃烧（氢转化为氦），温度 $T>10^7$ 开，持续时间 $\approx 10^{10}$ 年。

2) 氦燃烧（氦转化为碳、氧等等），温度 $T\gtrsim 10^8$ 开，持续时间 $\approx 10^7$ 年。

3) 碳燃烧，温度 $T\gtrsim 6\times 10^8$ 开，以及氧燃烧，温度 $T\gtrsim 10^9$ 开($16\lesssim A\lesssim 28$ 核的生成)，持续时间 $\approx 10^5$ 年，除非核合成是爆炸式的，持续时间只有几秒钟。

4) 硅燃烧($28\lesssim A\lesssim 60$ 核的生成)，温度 $T>3\times 10^9$ 或 4×10^9 开，当为准平衡及 e 过程时，持续时间 ≈ 1 秒钟。

5) s 过程[2]($A\geqslant 60$ 核的生成)，温度 $T>10^8$ 开以及持续时间 $10^3\sim 10^7$ 年。

6) r 过程($A\geqslant 60$ 核的生成)，温度 $T>10^{10}$ 开以及持续时间 10～100 秒(不确定)。

7) p 过程（丰度低的富质子重原子核的生成），温度 $T>2\times 10^9\sim 3\times 10^9$ 开以及持续时间 10～100 秒。

氢及氦燃烧阶段决定了在赫罗图上所观测到的大部分演化程，林忠四郎等(Hayashi, Hoshi 和 Sugimoto, 1962; 以及 Tayler, 1966)已综述了热核反应与恒星演化的关系。考克斯等(Cox 和 Giuli, 1969; Schwarzschild, 1958; 以及 Sears 和 Brownlee, 1965)给出了在不同质量区内求这些反应率的详尽公式。在特鲁伦等(Truran, Cameron 和 Gilbert, 1966; Truran, 1972; Fowler, Caughlan 和 Zimmerman, 1967, 1974; Wagoner, 1969; 以及 Barnes, 1971) 的论文中可以找到恒星中许多重要的热核反应的反应率常数。这些作者相应地综述了许多原始文献，他们对实验资料的综述就是从这些文献中获得的。在下面给出前面提到过的核过程的反应率。许多这种过程的各个子反应将与相应的能量释出及反应率常数一起给出。因此正向反应的反应率可以根据下式确定(参看(4-47)式、(4-51)式、(4-64)式、(4-65)式及(4-67)式)：

$$\begin{aligned}N_A\langle 12\rangle = {} & C_1T_9^{-2/3}\exp[-C_2T_9^{-1/3}-(T_9/T_0)^2]\{1+C_3T_9^{1/3}+C_4T_9^{2/3}\\ & +C_5T_9+C_6T_9^{4/3}+C_7T_9^{5/3}\}+\Sigma\, C_8T_9^{-3/2}\exp(-C_9/T_9)\\ & +C_{10}\exp(-C_{11}/T_9)\ \text{厘米}^3\cdot\text{秒}^{-1}\cdot\text{摩尔}^{-1},\end{aligned}\tag{4-251}$$

以及根据下式确定反向反应率：

$$N_A\langle 34\rangle = C_{12}[\exp(-C_{13}/T_9)]N_A\langle 12\rangle\ \text{厘米}^3\cdot\text{秒}^{-1}\cdot\text{摩尔}^{-1}\tag{4-252}$$

或

$$\lambda_\gamma(3) = C_{14}T_9^{3/2}[\exp(-C_{13}/T_9)]N_A\langle 12\rangle\ \text{秒}^{-1},\tag{4-253}$$

这里阿伏伽德罗数 $N_A={}^*6.022045\times 10^{23}$ 摩尔$^{-1}$；$\langle 12\rangle$ 是正向的反应率 $\langle\sigma v\rangle$；$T_9=T/10^9$，

---

1) 球粒陨星(chondrite)一词，原文误为 chrondite。——译者注

2) s 及 r 过程的名称由来见本节末的说明。p 过程是富质子(proton-rich，第一字母为 p)重原子核合成的过程，e 过程指原子核合成与消耗相平衡(equilibrium，第一字母为 e)的过程。——译者注

T 是温度，单位是开；常数 $C_1 \sim C_{14}$ 在表中给出；$\langle 34 \rangle$ 是反向的反应率 $\langle \sigma v \rangle$；$\lambda_\gamma(3) = [\tau_\gamma(3)]^{-1}$ 是光致衰变的寿命的倒数。

氢燃烧：质子-质子循环 这种过程开始是质子-质子反应，这种反应已由威札克等(Weizsäcker, 1937; Bethe 和 Critchfield, 1938; Bethe, 1939; Salpeter, 1952; Fowler, 1959; Reeves, 1963; 以及 Bahcall 和 May, 1969) 讨论过。沙茨曼等(Schatzman, 1951; 以及 Fowler, 1958) 提出了接着发生的一系列反应；帕克等 (Parker, Bahcall 和 Fowler, 1964) 讨论了循环中各环节的作用。完整的循环是：

$$
\left.\begin{array}{ll}
& H^1+H^1 \longrightarrow D^2+e^++\nu_e+1.442\sim0.263 \text{ 兆电子伏;} \\
& D^2+H^1 \longrightarrow He^3+\gamma+5.493 \text{ 兆电子伏,} \\
\text{或} & \left\{\begin{array}{l} He^3+He^3 \longrightarrow He^4+2H^1+12.859 \text{ 兆电子伏;} \\ He^3+He^4 \longrightarrow Be^7+\gamma+1.586 \text{ 兆电子伏,} \end{array}\right. \\
\text{或} & \left\{\begin{array}{l} Be^7+e^- \longrightarrow Li^7+\nu_e+0.861\sim0.80 \text{ 兆电子伏;} \\ Li^7+H^1 \longrightarrow He^4+He^4+17.347 \text{ 兆电子伏;} \end{array}\right. \\
& Be^7+H^1 \longrightarrow B^8+\gamma+0.135 \text{ 兆电子伏;} \\
& B^8 \longrightarrow Be^8+e^++\nu_e+17.98\sim7.2 \text{ 兆电子伏;} \\
& Be^8 \longrightarrow 2He^4+0.095 \text{ 兆电子伏,}
\end{array}\right\} \quad (4\text{–}254)
$$

这里以兆电子伏为单位的能量释出包括正电子(当它是反应的一种产物时)的湮没能量，负能量释出表示平均中微子能量损耗。表 42 给出质子-质子循环及碳-氮-氧双循环的反应率常数。

氢燃烧：碳-氮-氧双循环 当恒星质量略大于太阳时，只要碳、氮或氧作为催化剂存在，氢将按照较快的碳-氮循环转化成氦。这些反应是(Weizsäcker, 1938; Bethe, 1939)：

$$
\left.\begin{array}{l}
C^{12}+H^1 \longrightarrow N^{13}+\gamma+1.944 \text{ 兆电子伏,} \\
N^{13} \longrightarrow C^{13}+e^++\nu_e+2.221\sim0.710 \text{ 兆电子伏,} \\
C^{13}+H^1 \longrightarrow N^{14}+\gamma+7.550 \text{ 兆电子伏,} \\
N^{14}+H^1 \longrightarrow O^{15}+\gamma+7.293 \text{ 兆电子伏,} \\
O^{15} \longrightarrow N^{15}+e^++\nu_e+2.761\sim1.000 \text{ 兆电子伏,} \\
N^{15}+H^1 \longrightarrow C^{12}+He^4+4.965 \text{ 兆电子伏。}
\end{array}\right\} \quad (4\text{–}255)
$$

可能形成完整的碳-氮-氧双循环的附加质子俘获反应有 (Fowler, 1954; Salpeter, 1955; Marion 和 Fowler, 1957)：

$$
\left.\begin{array}{l}
N^{15}+H^1 \longrightarrow O^{16}+\gamma+12.126 \text{ 兆电子伏;} \\
O^{16}+H^1 \longrightarrow F^{17}+\gamma+0.601 \text{ 兆电子伏;} \\
F^{17} \longrightarrow O^{17}+e^++\nu_e+2.762\sim0.94 \text{ 兆电子伏;} \\
O^{17}+H^1 \longrightarrow N^{14}+He^4+1.193 \text{ 兆电子伏,}
\end{array}\right\} \quad (4\text{–}256)
$$

这里的能量释出已包括正电子湮没，负能量释出是平均中微子能量损耗。可能自然界中发现的 N^{14} 的大部分是由碳-氮-氧循环产生的，考兰等 (Caughlan 和 Fowler, 1962; 以及 Caughlan, 1965) 给出了碳-氮-氧过程所引起的核合成的详情。在超新星爆发时，可能发生一种迅速的碳-氮-氧循环，此时 (n, p) 反应代替了循环中的 β 衰变。

氦燃烧：3α 俘获过程及 α 俘获过程 归于 3α 过程的反应是 (Salpeter, 1952, 1953, 1957; Öpik, 1951, 1954; Hoyle, 1954; Fowler 和 Greenstein, 1956; Cook, Fowler, Lauritsen 和 Lauristen, 1957)：

表 42 氢燃烧过程的反应率[1]

质子-质子链	C_1	C_2	T_0	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{12}	C_{13}	C_{14}
$H^1(p, e^+\nu)D^2$	4.214 *E*-15	3.380		0.123	1.09	0.938							
$D^2(p, \gamma)He^3$	2.651 *E*3	3.720		0.112	1.99	1.56	0.162	0.324				63.752	1.633 *E*10
$He^3(He^3, 2p)He^4$	5.964 *E*10	12.275		0.0339	−0.199	−0.0472	0.0316	0.0191				149.238	3.395 E-10T_9^{-3}
$He^4(He^3, \gamma)Be^7$ [2]	6.331 *E*6	12.826		0.0325	−0.350	−0.0797	0.0563	0.0325				18.419	1.113 *E*10
$Li^7(p, \alpha)He^4$	8.038 *E*8	8.471	30.068	0.0492	0.230	0.0793	−0.0265	−0.0232	1.543 *E*6 1.065 *E*10	4.479 30.443	4.690	201.308	
$Be^7(p, \gamma)B^8$	4.345 *E*5	10.262		0.0406					3.297 *E*3	7.306		1.564	1.305 *E*10
碳-氮-氧循环													
$C^{12}(p, \gamma)N^{13}$	2.043 *E*7	13.690	0.952	0.0304	1.190	0.254	2.06	1.120	1.081 *E*5 2.153 *E*5	4.925 18.179		22.557	8.841 *E*9
$C^{13}(p, \gamma)N^{14}$	8.006 *E*7	13.717	1.270	0.0304	0.958	0.204	1.39	0.753	1.352 *E*6 2.661 *E*5 2.262 *E*6	5.978 11.987 13.463		87.615	1.190 *E*10
$N^{14}(p, \gamma)O^{15}$	4.207 *E*7	15.228	11.092	0.0274					2.282 *E*3 6.240 *E*4 5.093 *E*6	3.010 11.476 28.147		84.688	2.669 *E*10
$N^{15}(p, \gamma)O^{16}$	4.185 *E*8	15.251	0.522	0.0273	2.97	0.569			1.164 *E*4 2.659 *E*4 7.363 *E*6	3.676 4.665 10.983		140.720	3.624 *E*10
$N^{15}(p, \alpha)C^{12}$	8.157 *E*11	15.251	0.522	0.0273	6.74	1.29			1.290 *E*8 3.144 *E*8	3.676 7.974	0.706	57.614	
$O^{16}(p, \gamma)F^{17}$ [3]	9.54 *E*7	16.693		0.00843								6.969	3.034 *E*9
$O^{17}(p, \alpha)N^{14}$ [4]	4.950 *E*13	16.712							7.865 *E*-3 8.302 *E*6 4.891 *E*7	0.754 5.675 8.542	0.6757	13.842	

[1] 取自福勒等(Fowler, Caughlan 和 Zimmerman, 1974)的通信。

[2] $Be^7(e^-, \nu)Li^7$ 的 $N_A\langle 12\rangle = 1.340\times10^{-10}\times T_9^{-1/2}[1.0-0.537T_9^{1/3}+3.86T_9^{2/3}+1.2T_9+0.0027T_9^{-1}\exp(0.002515T_9^{-1})]$。

[3] $C_1T_9^{-2/3}=(C_1^*T_9^{-1})^{17/21}$ 式中 C_1^* 在表中以 C_1 表示。

[4] $C_1T_9^{-2/3}=C_1^*T_9^{-2/3}(1+19.986T_9)^{-5/6}$ 式中 C_1^* 在表中以 C_1 表示。

$$
\left.
\begin{aligned}
He^4+He^4 &\longrightarrow Be^8-0.0921\ 兆电子伏, \\
Be^8+He^4 &\longrightarrow C^{12*}-0.286\ 兆电子伏, \\
C^{12*} &\longrightarrow C^{12}+\gamma+7.656\ 兆电子伏。
\end{aligned}
\right\}
\tag{4-257}
$$

总反应为 $3He^4 \longrightarrow C^{12}+\gamma+7.274$ 兆电子伏，由 3α 过程所致 He^4 燃烧的平均寿命 $\tau_{3\alpha}$ 给出如下(Fowler, Caughlan 和 Zimmerman, 1967; Clayton, 1968; Barnes, 1971)：

$$
\begin{aligned}
\lambda_{3\alpha}=\frac{1}{\tau_{3\alpha}}=\frac{3\tau_{3\alpha}}{N_\alpha}&=6.65\times10^{-10}(\rho X_\alpha)^2T_9^{-3}\exp(-4.405/T_9) \\
&+1.66\times10^{-8}(\rho X_\alpha)^2T_9^{-3}\exp(-27.443/T_9)秒^{-1},
\end{aligned}
\tag{4-258}
$$

或对正向 3α 反应：

$$
\begin{aligned}
N_A\langle\sigma v\rangle=&2.05\times10^{-8}T_9^{-3}\exp(-4.405/T_9) \\
&+5.315\times10^{-7}T_9^{-3}\exp(-27.433/T_9)厘米^3\cdot秒^{-1}\cdot摩尔^{-1},
\end{aligned}
$$

式中当 $0.03\leqslant T_9\leqslant 8$ 时，第一项成立；当 $4\leqslant T_9\leqslant 8$ 时，加上第二项。这里 $\tau_{3\alpha}$ 是反应率，N_α 是 α 粒子的密度，X_α 是它们的质量分数，ρ 是气体质量密度。现在相信，在从 $0.5\,M_\odot$ 至 $50M_\odot$ 的宽广的质量范围内，恒星中的氦燃烧将产生近似等量的 C^{12} 及 O^{16}。

一旦形成了 C^{12}，O^{16} 将是 α 俘获过程的产物

$$
C^{12}+He^4 \longrightarrow O^{16}+\gamma+7.161\ 兆电子伏。
\tag{4-259}
$$

这是另一种特殊反应，它具有下列反应率(Fowler, Caughlan 和 Zimmerman, 1974)：

$$
\begin{aligned}
N_A\langle\sigma v\rangle=&1.90\times10^{8}T_9^{-2}(1+0.046T_9^{-2/3})^{-2}\exp[-32.12T_9^{-1/3}-(T_9/3.270)^2] \\
&+3.338\times10^{2}\exp(-26.316/T_9)厘米^3\cdot秒^{-1}\cdot摩尔^{-1}。
\end{aligned}
\tag{4-260}
$$

表 43 氦燃烧过程的反应率[1]

α 粒子反应	C_1	C_2	T_0	C_3	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}
$He^4(2\alpha,\gamma)C^{12}$	[2]									84.417	2.003 $E20T_9^{3/2}$
$C^{12}(\alpha,\gamma)O^{16}$	[2]									83.106	5.133 $E10$
					40.86	10.359					
$O^{16}(\alpha,\gamma)Ne^{20}$ [3]	5.357 $E9$	39.756		0.0105	391.4	12.243				54.888	5.652 $E10$
					881.8	23.112					
$Ne^{20}(\alpha,\gamma)Mg^{24}$	1.235 $E18$	46.765	0.849				8947.0	15.576		108.118	6.011 $E10$
$Mg^{24}(\alpha,\gamma)Si^{28}$	3.160 $E20$	53.301	0.670				1848.0	15.162		115.833	6.270 $E10$
$Si^{28}(\alpha,\gamma)S^{32}$	1.675 $E21$	59.485	0.785				936.2	18.810		80.626	6.465 $E10$
$S^{32}(\alpha,\gamma)Ar^{36}$	8.132 $E20$	65.366	1.068				519.7	25.380		77.099	6.620 $E10$
					2.119 $E6$	9.433					
$C^{13}(\alpha,n)O^{16}$ [4]	6.769 $E15$	32.329	0.941	0.0129	1.921 $E7$	11.536			5.792	25.699	
					4.749 $E6$	11.891					
					2.364 $E-10$	2.798					
$N^{14}(\alpha,\gamma)F^{18}$	9.051 $E9$	36.031	0.8[illegible]3	0.0116	2.028	5.054	14.160	12.138		51.248	5.419 $E10$
$O^{18}(\alpha,\gamma)Ne^{22}$ [5]	1.504 $E15$	40.056		0.0104						112.189	5.849 $E10$
$O^{18}(\alpha,n)Ne^{21}$ [6]	2.661 $E18$	40.056							0.7841	8.113	

1 取自与福勒等(Fowler, Caughlan 和 Zimmerman, 1974)的通信。

2 见正文中有关反应率部分。

3 取自托夫斯等(Toevs, Fowler, Barnes 和 Lyons, 1971)的文章。

4 $C_4=2.04$, $C_5=0.184$。

5 $C_1T_9^{-2/3}=C_1^*T_9^{-2/3}(1+0.093T_9)^{-5/6}$ 及 $\exp[-C_2T_9^{-1/3}]=\exp[-C_2^*T_9^{-1/3}(1+0.098T_9)^{1/3}-(0.431T_9^{-1})^{3.89}]$，其中 C_1^* 及 C_2^* 即表中的 C_1 及 C_2 值。

6 $C_1T_9^{-2/3}=C_1^*T_9^{-2/3}(1+0.098T_9)^{-5/6}$ 及 $\exp[-C_2T_9^{-1/3}]=\exp[-C_2^*T_9^{-1/3}(1+0.098T_9)^{1/3}-(0.431T_9^{-1})^{3.98}]$，其中 C_1^* 及 C_2^* 即表中的 C_1 及 C_2 值。

这种反应率的不确定因子为5。以后接着发生的进一步的α俘获过程是：

$$\left.\begin{aligned} O^{16}+He^{4} &\longrightarrow Ne^{20}+\gamma+4.730\text{ 兆电子伏}, \\ Ne^{20}+He^{4} &\longrightarrow Mg^{24}+\gamma+9.317\text{ 兆电子伏}, \\ Mg^{24}+He^{4} &\longrightarrow Si^{28}+\gamma+9.981\text{ 兆电子伏}, \\ Si^{28}+He^{4} &\longrightarrow S^{32}+\gamma+6.948\text{ 兆电子伏}, \\ S^{32}+He^{4} &\longrightarrow Ar^{36}+\gamma+6.645\text{ 兆电子伏}。 \end{aligned}\right\} \tag{4-261}$$

碳-氮-氧循环的反应产物也可以通过下列α俘获反应产生中子(Cameron, 1954)：

$$C^{13}+He^{4} \longrightarrow O^{16}+n+2.214\text{ 兆电子伏}$$

或(Cameron, 1960)

$$\left.\begin{aligned} N^{14}+He^{4} &\longrightarrow F^{18}+\gamma+4.416\text{ 兆电子伏}, \\ F^{18} &\longrightarrow O^{18}+e^{+}+\nu_{e}, \\ O^{18}+He^{4} &\longrightarrow Ne^{22}+\gamma+9.667\text{ 兆电子伏}, \\ O^{18}+He^{4} &\longrightarrow n+Ne^{21}-0.699\text{ 兆电子伏}, \\ Ne^{22}+He^{4} &\longrightarrow n+Mg^{25}-0.481\text{ 兆电子伏}。 \end{aligned}\right\} \tag{4-262}$$

表43给出α粒子反应的反应率常数。

碳和氧燃烧：在氦燃烧的情况下，占优势的原子核是C^{12}及O^{16}。当温度高于8×10^{8}开时，碳将开始按照下列方式与其本身发生反应：

$$\begin{aligned} C^{12}+C^{12} &\longrightarrow Mg^{24}+\gamma+13.930\text{ 兆电子伏} \\ &\longrightarrow Na^{23}+p+2.238\text{ 兆电子伏} \\ &\longrightarrow Ne^{20}+He^{4}+4.616\text{ 兆电子伏} \\ &\longrightarrow Mg^{23}+n-2.605\text{ 兆电子伏} \\ &\longrightarrow O^{16}+2He^{4}-0.114\text{ 兆电子伏}。 \end{aligned} \tag{4-263}$$

在约2×10^{9}开时，氧也将按照下列方式与其本身发生反应：

$$\begin{aligned} O^{16}+O^{16} &\longrightarrow S^{32}+\gamma+16.539\text{ 兆电子伏} \\ &\longrightarrow P^{31}+p+7.676\text{ 兆电子伏} \\ &\longrightarrow S^{31}+n+1.459\text{ 兆电子伏} \\ &\longrightarrow Si^{28}+He^{4}+9.593\text{ 兆电子伏} \\ &\longrightarrow Mg^{24}+2He^{4}-0.393\text{ 兆电子伏}。 \end{aligned} \tag{4-264}$$

帕特森等(Patterson, Winkler 和 Spinka, 1968; Patterson, Winkler 和 Zaidins, 1969; 以及 Spinka 和 Winkler, 1972)已对上述这些反应中的几个测定了截面。他们发现，重离子的大的相互作用半径需要在截面中引入附加项，所以平均截面$\langle\sigma\rangle$由下式给出：

$$\langle\sigma\rangle=\frac{\langle S\rangle}{E}\exp[-(E_G/E)^{1/2}-gE], \tag{4-265}$$

式中E是在质心系中的动能，伽莫夫能量E_G由(4-34)式给出，

$$g=0.122(AR_f^3/Z_1Z_2)^{1/2}\text{ 兆电子伏}^{-1}, \tag{4-266}$$

其中A是两个相互作用粒子的折合质量，单位是原子质量单位；Z_1及Z_2是粒子电荷，以质子电荷为单位；相互作用半径R_f以费密为单位。对$C^{12}+C^{12}$反应来说，$\langle S\rangle=2.9\times10^{16}$兆电子伏·靶以及$g=0.46$兆电子伏$^{-1}$，而对在7兆电子伏以上的$O^{16}+O^{16}$反应，$\langle S\rangle=6\times10^{27}$兆电子伏·靶以及$g=0.84$兆电子伏$^{-1}$。由这些值得出$C^{12}\longrightarrow C^{12}$反应率为(Arnett 和 Truran, 1969)：

$$\rho N_A\langle\sigma v\rangle=3.24\times10^{26}T_9^{-2/3}\exp[-84.17T_9^{-1/3}(1+0.037T_9)^{1/3}]秒^{-1}, \qquad (4\text{-}267)$$

以及 $O^{16}\longrightarrow O^{16}$ 反应率为(Truran 和 Arnett, 1970):

$$N_A\langle\sigma v\rangle=6.6\times10^{37}T_9^{-2/3}\exp[-135.79T_9^{-1/3}(1+0.0530T_9)^{1/3}]厘米^3\cdot秒^{-1}\cdot摩尔^{-1}。 \qquad (4\text{-}268)$$

阿内特等(Arnett, 1972; 以及 Woosley, Arnett 和 Clayton, 1972) 处理了静态流体氧燃烧,而伍斯利等(Woosley, Arnett 和 Clayton, 1973)研究了爆炸式氧燃烧。

由(4-263)式及(4-264)式中给出的碳及氧燃烧反应所产生的 α 粒子、质子及中子将与燃烧的其他产物相互作用而形成许多具有 $16\leqslant A\leqslant28$ 的其他核素。瓦戈纳等(Wagoner, 1969; 以及 Fowler, Caughlan 和 Zimmerman, 1967, 1974)给出了许多这种反应的反应率常数的实验值。

现在公认,说明造成观测到的 $20\leqslant A\leqslant64$ 的太阳系丰度原因的大多数碳、氧及硅燃烧是在迅速爆炸时发生的。第 4.4.4 节要讨论这些爆炸式燃烧过程。

硅燃烧: 在碳和氧燃烧结束时,最丰富的原子核将是 S^{32} 及 Si^{28} 伴随有大量的 Mg^{24}。因为在 S^{32} 中的质子、中子及 α 粒子的结合能小于 Si^{28} 中的相应值,核素 S^{32} 将最先按照下列反应光致衰变:

$$\left.\begin{aligned}S^{32}+\gamma&\longrightarrow P^{31}+p-8.864\ 兆电子伏,\\ P^{31}+\gamma&\longrightarrow Si^{30}+p-7.287\ 兆电子伏,\\ Si^{30}+\gamma&\longrightarrow Si^{29}+n,\\ Si^{29}+\gamma&\longrightarrow Si^{28}+n。\end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}269)$$

反应结果几乎只留下 Si^{28}。随后,在温度高于 3×10^9 开时,按照下列反应, Si 将开始光致衰变:

$$\begin{aligned}Si^{28}+\gamma&\longrightarrow Al^{27}+p-11.583\ 兆电子伏;\\ Si^{28}+\gamma&\longrightarrow Mg^{24}+\alpha-9.981\ 兆电子伏。\end{aligned} \qquad (4\text{-}270)$$

因为(γ,α)反应具有较低的阈值,它在 $T<2\times10^9$ 开的低温时是主要反应;而(γ, p)反应在较高温度时具有较短的寿命。进一步的光致衰变导致按照下列反应形成较轻的元素:

$$\left.\begin{aligned}Mg^{24}+\gamma&\longrightarrow Na^{23}+p-11.694\ 兆电子伏,\\ Mg^{24}+\gamma&\longrightarrow Ne^{20}+\alpha-9.317\ 兆电子伏,\\ Ne^{20}+\gamma&\longrightarrow O^{16}+\alpha-4.730\ 兆电子伏,\\ O^{16}+\gamma&\longrightarrow C^{12}+\alpha-7.161\ 兆电子伏。\end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}271)$$

表 43 给出(4-269)~(4-271)式中(γ,α)反应的反应率常数,表 44 给出(γ, p)的反应率常数。莱昂斯等(Lyons, 1969; 以及 Lyons, Toevs 和 Sargood, 1969)分别列表给出 $^{24}Mg(\alpha,\gamma)^{28}Si$ 及 $^{27}Al(p,\gamma)^{28}Si$ 反应的各种共振能量的共振强度。对 $^{20}Ne(\alpha,\gamma)^{24}Mg$ 及 $^{23}Na(p,\gamma)^{24}Mg$ 反应的实验数据作解析拟合,可以得出反应率(Couch 和 Shane, 1971; Fowler, Caughlan 和 Zimmerman, 1974): 对 $Ne^{20}+\gamma\longrightarrow Mg^{24}+\gamma$

$$N_A\langle\sigma v\rangle_{\alpha,\gamma}=\frac{1.235\times10^{18}}{T_9^{2/3}}\exp\left[\frac{-46.765}{T_9^{1/3}}-\left(\frac{T_9}{0.849}\right)^2\right]+8.947\times10^3\exp\left(\frac{-15.576}{T_9}\right)厘米^3\cdot秒^{-1}\cdot摩尔^{-1}; \qquad (4\text{-}272)$$

对 $Na^{23}+p\longrightarrow Mg^{24}+\gamma$

表 44 某些(γ, p)硅燃烧反应的反应率常数[1]

反 应	C_1	C_2	T_0	C_{10}	C_{11}	C_{13}	C_{14}
$Na^{23}(p, \gamma)Mg^{24}$	2.263 *E*13	20.766	0.315	4.938 *E*4	3.564	135.708	7.489 *E*10
$Al^{27}(p, \gamma)Si^{28}$	7.021 *E*12	23.261	0.631	8.188 *E*4	6.342	134.417	1.134 *E*11
$Si^{30}(p, \gamma)P^{31}$	8.650 *E*13	24.468	0.451	6.200 *E*4	5.334	84.567	9.497 *E*9
$P^{31}(p, \gamma)S^{32}$	6.942 *E*13	25.629	0.442	1.692 *E*4	5.514	102.867	3.805 *E*10

1 取自福勒等(Fowler, Caughlan 和 Zimmerman, 1974)的通信。

$$N_A\langle\sigma v\rangle_{p,\gamma}=\frac{2.263\times10^{13}}{T_9^{2/3}}\exp\left[\frac{-20.766}{T_9^{1/3}}-\left(\frac{T_9}{0.315}\right)^2\right]$$
$$+4.938\times10^4\exp\left(\frac{-3.564}{T_9}\right)\text{厘米}^3\cdot\text{秒}^{-1}\cdot\text{摩尔}^{-1}\text{。}\qquad(4\text{–}273)$$

库奇等(Couch 和 Shane, 1971)把在 $1.0\leqslant T_9\leqslant5.0$ 情况的相应的光致衰变率列成了表。对 $^{20}Ne(\alpha, \gamma)^{24}Mg$ 反应，我们取 $C_{13}=108.118$ 及 $C_{14}=6.011\times10^{10}$，而对 $^{23}Na(p, \gamma)^{24}Mg$ 反应，我们取 $C_{13}=135.708$ 及 $C_{14}=7.489\times10^{10}$。这些常数可以用于(4–253)式以确定光致衰变率。

在 $28\lesssim A\lesssim60$ 范围内的大部分原子核的丰度被认为是由平衡或准平衡过程确定的，在这类过程中许多单个反应率的重要性是减小了，下面第 4.4.3 节讨论这些过程。霍伊尔等(Hoyle, 1946; Burbidge, Burbidge, Fowler 和 Hoyle, 1957; Fowler 和 Hoyle, 1964; Clifford 和 Taylor, 1965; Truran, Cameron 和 Gilbert, 1966; Bodansky, Clayton 和 Fowler, 1968; Truran, 1968; 以及 Michaud 和 Fowler, 1971) 讨论了 $28\leqslant A\leqslant60$ 的元素的丰度。除了富中子核类 (^{36}S、^{40}Ar、^{43}Ca、^{46}Ca、^{48}Ca、^{51}Ti、^{54}Cr 及 ^{58}Fe) 以外，在 ^{28}Si 与 ^{59}Co 之间的大多数核类是由准平衡过程产生的，在此过程中唯一重要的热核反应率据认为是"瓶颈"原子核 ^{44}Ca、^{45}Sc 及 ^{45}Ti 的反应率。这些原子核的反应率可以用米肖等(Michaud 和 Fowler, 1970) 给出的方法来估计。富中子核类的丰度可以用下面讨论的 s 或 r 过程很好地加以确定(Seeger, Fowler 和 Clayton, 1965)。不过，它们可能是在爆炸式的碳燃烧阶段形成的(Howard, Arnett, Clayton 和 Woosley, 1972)。

***s*、*r* 及 *p* 过程** 因为对铁峰以外的核素 ($A\gtrsim60$) 来说，每个核子的结合能随 A 增大而减小，并且因为这些元素具有大的库仑势垒，它们不大可能是由聚变或 α 和质子俘获所形成。据信这些重元素的大多数是由中子俘获反应形成的，反应是以铁族核(铬、锰、铁、钴及镍)开始的。若中子通量较微弱，在产核 β 衰变以前，大多数中子俘获循环将只包括少量的俘获。因为中子俘获寿命长于(英文 slower 第一字母为 s) β 衰变寿命，所以这种类型的中子俘获称为 s 过程。当存在强中子通量时(据信在超新星爆发时会遇到的情况)，富中子元素将由快速(英文 rapid 第一字母为 r)过程即 r 中子俘获过程所形成。在这种情况，中子俘获寿命远短于 β 衰变寿命，所以在俘获过程过去以后，富中子元素才能通过 β 衰变变成 β 稳定元素。伯比奇等 (Burbidge, Burbidge, Fowler 和 Hoyle, 1957) 讨论了 s 及 r 过程的详情，第 4.4.5 节给出相应的中子俘获率及核素丰度方程。在表 38 中用相应类型的符号标明只由 r 过程或 s 过程或两个过程(r, s)产生的元素，表中也可以找到中子俘获截面。虽然 s 过程的中子源是不确定的，s 过程合成的最可能的位置是由紧跟在氦闪之后的氢层与氦层的对流混合所规定 (Schwarzschild 和 Härm, 1962, 1967)。在这种情况自由中子是由下列反应形成的(Sanders, 1967; Cameron 和 Fowler, 1971)：

$$\mathrm{C}^{12}(p,\ \gamma)\mathrm{N}^{13}(e^{+}\nu)\mathrm{C}^{13}$$

及

$$\mathrm{C}^{13}(\alpha,\ n)\mathrm{O}^{16}。 \tag{4-274}$$

r 过程合成的位置据认为与中子星的形成有关，大概也与超新星爆发的形成有关(Truran, Arnett, Tsuruta 和 Cameron, 1968)。富质子重元素与认为是由 r 及 s 过程所产生的元素比较起来要少得多，并认为这是由质子快速俘获过程[1]形成的。这种过程的一种可能的诱因是超新星激波的传播通过一颗爆前超新星的氢外层。这种过程的可能反应包括$(p,\ \gamma)$、$(p,\ n)$、$(\gamma,\ n)$及$(n,\ 2n)$反应和正电子俘获(Burbidge, Burbidge, Fowler 和 Hoyle, 1957; Ito, 1961; Reeves 和 Stewart, 1965; Macklin, 1970)。特鲁伦等 (Truran 和 Cameron, 1972) 讨论了爆炸式核合成中的 p 过程。施拉姆(Schramm, 1973)考虑了爆炸式 r 过程核合成。

4.4.3. 平衡过程[2]

在热动平衡条件下，不必确定各个反应率而只需确定各种核类的配分函数及其结合能就可以算出恒星中物质的组成。虽然这种情况大大简化了计算，但这只有当物质与辐射平衡，以及只有当每一个原子核可转化成任何其他原子核时才是可能的。霍伊尔 (Hoyle, 1946) 指出当温度 $T\approx10^{9}$ 开时，物质是与辐射平衡的；而当 $T\gtrsim2\times10^{9}$ 开时，所有已知的原子核可以由核反应转化成任何其他原子核。托尔曼等 (Tolman, 1922; Urey 和 Bradley, 1931; Pokrowski, 1931; Sterne, 1933; 以及 Chandrasekhar 和 Henrich, 1942) 早期的研究排除了大多数元素的平衡起源。不过，在铁族中的丰度峰 (其中每个核子的结合能是最大) 能够用平衡过程来说明 (Hoyle, 1946; Burbidge, Burbidge, Fowler 和 Hoyle, 1957)。福勒等 (Fowler 和 Hoyle, 1964; Clifford 和 Tayler, 1965; 以及 Truran, Cameron 和 Gilbert, 1966) 已在严格平衡条件下对这个区$(28\leqslant A\leqslant60)$中的平衡浓度作出了更详尽的计算；鲍坦斯基等 (Bodansky, Clayton 和 Fowler, 1968; Truran, 1968; Michaud 和 Fowler, 1972; 以及 Woosley, Arnett 和 Clayton, 1973) 已在准平衡条件下对此作了计算。

在统计平衡条件下，第 i 种粒子的数密度 N_i 由下式给出：

$$N_i=\frac{1}{V}\sum_{r}^{n}\mu_i\left[\pm\mu_i+\exp(\varepsilon_{ir}/kT)\right]^{-1}, \tag{4-275}$$

式中 V 是体积，μ_i 是第 i 种粒子的化学势，+ 号及 − 号分别适用于费密-狄拉克统计法及玻色-爱因斯坦统计法，求和是对所有能态 ε_{ir} 进行的，它包括内能级及动能。如果一个内能级具有自旋 J，则相同能量的 $2J+1$ 能态必须包括在求和中。当核素为非简并及非相对论性的，可以用麦克斯韦统计法得到：

$$\begin{aligned}N_i&=\frac{\mu_i}{V}\left[\sum(2J_r+1)\exp\left(-\frac{\varepsilon_r}{kT}\right)\right]\left[\frac{4\pi V}{h^3}\int_0^\infty p^2\exp\left(-\frac{p^2}{2M_ikT}\right)dp\right]\\&=\mu_i\omega_i\left(\frac{2\pi M_ikT}{h^2}\right)^{3/2},\end{aligned} \tag{4-276}$$

式中 p 是粒子动量，M_i 是粒子质量，配分函数 $\omega_i=\Sigma(2J_r+1)\exp(-\varepsilon_r/kT)$，这里 ε_r 只指内能态。对粒子 p_i、p_j、… 它们按照下式起反应：

$$\alpha p_i+\beta p_j+\cdots\rightleftharpoons\xi p_r+\eta p_s+\cdots, \tag{4-277}$$

化学势由下式相联系：

$$\mu_i^{\alpha}\mu_j^{\beta}\cdots=\mu_r^{\xi}\mu_s^{\eta}\cdots\exp(-Q/kT), \tag{4-278}$$

1) 这种过程即 p 过程，可参看本节开始部分。——译者注

2) 平衡过程即 e 过程，也可参看本节开始部分。——译者注

式中

$$Q=c^2[\alpha M_i+\beta M_j+\cdots-\xi M_r-\eta M_s-\cdots]。\qquad(4\text{-}279)$$

霍伊尔等(Hoyle, 1946; 以及 Burbidge, Burbidge, Fowler 和 Hoyle, 1957) 研究了在原子核(A, Z)与自由质子p及中子n之间的统计平衡条件。对一个原子核来说,有Z个质子及$(A-Z)$个中子, 而质子及中子两者的统计权重都是 2。于是由(4-276)至(4-279)式可知,当核素、质子与中子之间达到平衡时, 原子核(A, Z)的数密度$N(A, Z)$由下式给出:

$$N(A, Z)=\omega(A, Z)\left(\frac{AM_\mu kT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}\left(\frac{2\pi\hbar^2}{M_\mu kT}\right)^{3A/2}\frac{N_n^{(A-Z)}N_p^Z}{2^A}\exp\left[\frac{Q(A, Z)}{kT}\right],\qquad(4\text{-}280)$$

式中原子核(A, Z)的配分函数$\omega(A, Z)$由下式给出:

$$\omega(A, Z)=\sum_r(2I_r+1)\exp\left(-\frac{E_r}{kT}\right),\qquad(4\text{-}281)$$

其中I_r及E_r分别是第r个激发能级的自旋及能量; 原子核(A, Z)的结合能$Q(A, Z)$由下式给出:

$$Q(A, Z)=c^2[(A-Z)M_n+ZM_p-M(A, Z)],\qquad(4\text{-}282)$$

其中M_n、M_p及$M(A, Z)$分别是自由中子、自由质子及原子核(A, Z)的质量; 因子

$$\left(\frac{2\pi\hbar^2}{M_\mu kT}\right)^{3/2}={}^*1.682690\times10^{-34}T_9^{-3/2}\text{ 厘米}^{-3},\qquad(4\text{-}283)$$

这里M_μ是原子质量单位, 而N_n及N_p分别表示自由中子及自由质子的数密度。质量守恒要求质量密度ρ由下式给出:

$$\rho=N_pM_p+N_nM_n+\sum_{A,Z}N(A, Z)M(A, Z)。\qquad(4\text{-}284)$$

电荷守恒则意味着:

$$N_p+\sum_{A,Z}ZN(A, Z)=N_{e^-}-N_{e^+},\qquad(4\text{-}285)$$

式中N_{e^-}及N_{e^+}分别表示电子及正电子的数密度。克利福德等(Cliford 和 Tayler, 1965)用附加参量

$$R=\frac{N_p+\sum_{A,Z}ZN(A, Z)}{N_n+\sum_{A,Z}(A-Z)N(A, Z)}=\frac{\langle Z\rangle}{\langle N\rangle}\qquad(4\text{-}286)$$

表示质子总数与中子总数之比。他们对于有β衰变及没有β衰变两种情况用上面这些方程推算出核素丰度作为ρ、T及R的函数。鹤田等 (Tsuruta 和 Cameron, 1965) 研究了高密度情况的核统计平衡,并用T及费密能量E_F作为自由参量,

$$\begin{aligned}&E_F=(3\pi^2)^{2/3}\frac{\hbar^2}{2m_e}N_e^{2/3}\quad(\text{非相对论性的});\\&E_F=(3\pi^2)^{1/3}\hbar cN_e^{1/3}\quad(\text{相对论性的}),\end{aligned}\qquad(4\text{-}287)$$

式中N_e是电子密度。当把正的及负的β衰变率及电子俘获率与稳态条件(即中微子发射率等于反中微子发射率)一起加以考虑时,确定了E_F就能给出 (4-280) 式中所要的N_n及N_p值。第 4.3 节已给出相应的β衰变率及电子俘获率。

特鲁伦等(Truran, Cameron 和 Gilbert, 1966)注意到在温度高于3×10^9开时硅的光致衰变迅速进行,释出质子、中子及α粒子。他们对所有中子、质子及α粒子反应解出热核反应率,用这种方法计算了由^{28}Si原子核合成铁峰原子核的过程。鲍坦斯基等(Bodansky, Clayton 和 Fowler, 1968) 后来指出在硅燃烧期间原子核是处于准平衡状态的。这只是部

分平衡，因为 ^{28}Si 本身并不与轻粒子处于平衡状态，而重原子核本身之间也并不处于平衡状态；但是比 ^{28}Si 更重的核是通过光子、核子及 α 粒子的交换与 ^{28}Si 处于平衡状态的。轻粒子是由 $^{28}Si(\gamma, \alpha)^{24}Mg$ 反应及 $^{28}Si(\gamma, p)(\gamma, p)(\gamma, n)(\gamma, n)^{24}Mg$ 反应以较大的反应率射出的。重原子核的浓度达到这样一个值以致它们以几乎相同的速率消耗及释出 α 粒子，并且以下列平衡反应建立一种准平衡状态：

$$\left.\begin{array}{l} ^{28}Si+{}^{4}He \rightleftarrows {}^{32}S+\gamma; \\ ^{32}S+{}^{4}He \rightleftarrows {}^{36}Ar+\gamma; \\ \vdots \\ ^{52}Fe+{}^{4}He \rightleftarrows {}^{56}Ni+\gamma。\end{array}\right\} \tag{4-288}$$

由(4-276)至(4-279)式可知，对于下列反应：

$$^{28}Si+{}^{4}He \rightleftarrows {}^{32}S+\gamma,$$

平衡譬如是以下列沙哈方程来标志的：

$$\frac{N(^{32}S)}{N(^{28}Si)}=N_\alpha\frac{\omega(^{32}S)}{\omega(^{28}Si)}\left[\frac{A(^{32}S)}{A(^{28}Si)A(^{4}He)}\right]^{3/2}\left(\frac{2\pi\hbar^2}{M_\mu kT}\right)^{3/2}\exp\left[\frac{B_\alpha(^{32}S)}{kT}\right]。 \tag{4-289}$$

这里 N_α 是 α 粒子的数密度，对 α 粒子原子核来说，配分函数 ω 近似为 1，A 是以原子质量单位 M_μ 为单位的原子质量，$B_\alpha(^{32}S)$ 是从硫核(^{32}S)的基态中出来的 α 粒子的离解能，其他原子核(A, Z)的平衡丰度 $N(A, Z)$ 随硅核(^{28}Si)以及 α 粒子、中子及质子的数密度而变。第 4.4.5 节给出了这些情况下的丰度公式。鲍坦斯基等(Bodansky, Clayton 和 Fowler, 1968)已证明，对于 $A=28\sim56$ 以及在铁族下部($A=49$ 至 $A=57$)的主要原子核来说，可以用准平衡分布来解释观测到的 $4n$ 原子核($A=4n$)的丰度。特鲁伦(Truran, 1968)研究了可变的起始成分对硅燃烧过程的影响，米肖等(Michaud 和 Fowler, 1972)研究了在硅燃烧以前合成丰度对起始成分的依赖关系，以及来自不同燃烧区的附加产物的影响。米肖等(Michaud 和 Fowler, 1972)证明，在起始中子增加到 4×10^{-3} 情况下，$28\lesssim A\lesssim59$ 的原子核的天然丰度便可用准平衡燃烧来说明。这样，就假定了在 $24\leqslant A\leqslant44$ 的元素之间存在准平衡状态，以及 $46\leqslant A\leqslant60$ 的元素的各自平衡，而且对 $A=45$ 的"瓶颈"给出了详尽的核反应。这种准平衡硅燃烧过程势必在 $t\lesssim1$ 秒的短时间内及在 $T\gtrsim4.5\times10^9$ 开的高温下发生，在下一节中将讨论所提出的爆炸式燃烧过程。

4.4.4. 爆炸式燃烧过程

如伯比奇等(Burbidge, Burbidge, Fowler 和 Hoyle, 1957)所解释的，当可供利用的核燃料耗尽时，能够成功地说明许多恒星演化的静态核燃烧及收缩二者构成的一系列循环必定会终止。他们指出，在氦耗尽的恒星核心中，不可抗拒的重力作用导致恒星外壳中迅速的热核反应及剧烈的不稳定性。史瓦西等(Schwarzschild 和 Härm, 1962, 1967)指出，即使是氢耗尽的核，在一次氦闪中热核反应会失去控制。后来阿内特(Arnett, 1968)指出，当考虑到在高度简并气体中由中微子发射所引起的冷却作用时，在核心密度约为 2×10^9 克·厘米$^{-3}$ 时将爆炸式地点燃 $C^{12}+C^{12}$ 反应。恒星物质是瞬时加热而绝热膨胀的，所以密度 ρ 及温度 T 的关系为：

$$\rho(t)\propto[T(t)]^3, \tag{4-290}$$

上式适用于 $\Gamma_3=4/3$ 绝热过程，式中 t 为时间变数。相应的膨胀时间是由下式给出的流体动力学时间尺度 τ_{HD}：

$$\tau_{HD}=(24\pi G\rho)^{-1/2}={}^{*}445.85\rho^{-1/2}\text{ 秒。} \tag{4-291}$$

起始温度及密度必定是这样的，以使对于正在经历爆炸式反应 R 的原子核来说，其平均寿命 τ_R 必须近于 τ_{HD}。对原子核 1 与原子核 2 的相互作用，

$$\tau_R=\tau_2(1)=[N_2\langle\sigma v\rangle]^{-1}=\left[\rho N_A\frac{X_2}{A_2}\langle\sigma v\rangle\right]^{-1}, \tag{4-292}$$

式中 ρ 是质量密度，X_2、A_2 及 N_2 分别是原子核 2 的质量分数、质量数及数密度，对各种反应的 $N_A\langle\sigma v\rangle$ 在第 4.4.2 节中给出(参看(4-251)式)。阿内特(Arnett, 1969)把下式所给出的平均碳核寿命 $\tau_{C^{12}}$ 用于碳燃烧以便确定爆炸式碳燃烧的起始条件，

$$\log\tau_{C^{12}}\approx 37.4T_9^{-1/3}-25.0-\log_{10}\rho\approx\log_{10}\tau_{HD}, \tag{4-293}$$

再根据已知的反应率连同(4-290)式及(4-293)式，利用第 4.4.5 节中给出的数值计算方案，就可以计算所期望的丰度了。若假定在氦燃烧时期之前已产生了等量的 O^{12} 及 O^{16}，并且

$$\left.\begin{aligned}T_p&=2\times10^9\text{ 开};\\ \rho_p&=1\times10^5\text{ 克·厘米}^{-3};\\ \eta&=0.002,\end{aligned}\right\} \tag{4-294}$$

则对

$$^{20}\text{Ne、}^{23}\text{Na、}^{24}\text{Mg、}^{25}\text{Mg、}^{26}\text{Mg、}^{27}\text{Al、}^{29}\text{Si 及 }^{30}\text{Si} \tag{4-295}$$

已发现算出的丰度比值十分近似于太阳系中的丰度比值。(4-294) 式中 T_p 及 ρ_p 分别表示在所研究壳层中温度及质量密度的峰值，中子过剩 η 由下式给出：

$$\eta=\frac{N_n-N_p}{N_n+N_p}, \tag{4-296}$$

式中 N_n 及 N_p 分别表示自由中子及自由质子的数密度。汉森 (Hansen, 1971) 利用一个完善的产能方程对爆炸式碳燃烧得到了类似的结果。阿内特等(Arnett, Truran 和 Woosley, 1971) 已积分得出在一次 ^{12}C 爆炸中成分的改变，由此指出太阳系中大多数铁族元素的丰度能够用爆炸式燃烧来加以解释。

特鲁伦等(Truran 和 Arnett, 1970)研究过爆炸式氧燃烧，其 ^{16}O 核的平均寿命 $\tau_{O^{16}}$ 由下式给出：

$$\tau_{O^{16}}=[X_{16}\rho N_A\langle\sigma v\rangle/16]^{-1}, \tag{4-297}$$

式中 X_{16} 是用 ^{16}O 核的质量表示的分数丰度，

$$N_A\langle\sigma v\rangle\approx\exp(86.804-\xi)T_9^{-2/3}, \tag{4-298}$$

这里 $T_9=T/10^9$，以及

$$\xi=135.79(1+0.053T_9)^{1/3}T_9^{-1/3}\text{。} \tag{4-299}$$

在起始条件中令 $\tau_{O^{16}}$ 等于 τ_{HD}，并假定为绝热膨胀，再计算相应的相对丰度。他们已指出，爆炸式氧燃烧能够产生中等质量($28\lesssim A\lesssim42$)的原子核而丰度比值接近于太阳系的比值。相应的条件是：

$$\left.\begin{aligned}3.5\times10^9\lesssim T&\lesssim3.7\times10^9\text{ 开};\\ 10^5\lesssim\rho&\lesssim10^6\text{ 克·厘米}^{-3};\\ \eta&\approx0.002\text{。}\end{aligned}\right\} \tag{4-300}$$

类似地，阿内特 (Arnett, 1969) 已利用鲍坦斯基等 (Bodansky, Clayton 和 Fowler, 1968) 给出的 $\tau_{Si^{28}}$ 计算爆炸式硅燃烧，并说明了在 $44\leqslant A\leqslant62$ 范围内的丰度比。霍华德等 (Howard, Arnett 和 Clayton, 1971) 还研究了在氦区中的爆炸式燃烧，并指出在氦区的爆炸式核过程中产生的原子核 ^{15}N、^{18}O、^{19}F 及 ^{21}Ne 象 ^{15}O、^{18}F、^{19}Ne 及 ^{21}Ne 一样首先被产

出。阿内特等(Arnett 和 Clayton, 1970)已综述了爆炸式碳、氧及硅燃烧在说明太阳系的 $20 \leqslant A \leqslant 64$ 元素丰度比时所取得的普遍成功。阿内特和特鲁伦等(Arnett, 1971; 以及 Truran 和 Cameron, 1971)已把爆炸式核合成纳入银河系演化模型中。伍斯利等(Woosley, Arnett 和 Clayton, 1973)给出了爆炸式氧及硅燃烧的完整处理以及在高或低的冻结密度时平衡过程的处理。阿内特(Arnett, 1973)给出了恒星中爆炸式核合成的综述。

4.4.5. 核素丰度方程

决定原子核(A, Z)的数密度 $N(A, Z)$变化的方程具有下列形式:

$$\frac{d}{dt}(N_i) = -\sum_j N_i N_j \langle\sigma v\rangle_{ij} + \sum_{kl} N_k N_l \langle\sigma v\rangle_{kl}, \tag{4-301}$$

式中 N_i 是第 i 类的数密度, $\langle\sigma v\rangle_{ij}$ 是涉及 i 类及 j 类粒子相互作用时的截面与相对速度的乘积, 对于同类粒子则用 $N_n^2/2$ 代替 $N_m N_n$, 求和是对形成或消耗 i 类粒子的所有反应进行的。对数值计算来说用下列参量处理是方便的:

$$Y_i = Y(A, Z) = \frac{N(A, Z)}{\rho N_A} = \frac{N_i}{\rho N_A}, \tag{4-302}$$

式中 ρ 是所研究的气体的质量密度, 阿伏伽德罗数 $N_A = {}^*6.022045 \times 10^{23}$ 摩尔$^{-1}$。因此把形成或消耗第 i 类原子核的所有反应联系起来的微分方程为:

$$\frac{d}{dt}(Y_i) = -\sum_j f_{ij} + \sum_{kl} f_{kl}, \tag{4-303}$$

式中在入射道中包括原子核 i 及 j 的矢流 f_{ij} 由下式给出:

$$f_{ij} = \frac{N_i N_j \langle\sigma v\rangle_{ij}}{\rho N_A} = Y_i Y_j \rho N_A \langle\sigma v\rangle_{ij}, \tag{4-304}$$

$N_A \langle\sigma v\rangle_{ij}$ 已于前面几节中给出。当计及所有不同类型的反应时, (4-303)式变成:

$$\begin{aligned}\frac{dY(A, Z)}{dt} = &-[\lambda_{\beta^-}(A, Z) + \lambda_{\beta^+}(A, Z) + \lambda_K(A, Z) + \lambda_\alpha(A, Z) \\ &+ \lambda_\gamma(A, Z) + 2.48 \times 10^8 \sigma_T N_n + \sum_j Y(A_j Z_j) \rho N_A \langle\sigma v\rangle_j] Y(A, Z) \\ &+ \lambda_{\beta^-}(A, Z-1) Y(A, Z-1) + \lambda_{\beta^+}(A, Z+1) Y(A, Z+1) \\ &+ \lambda_K(A, Z+1) Y(A, Z+1) + \lambda_\alpha(A+4, Z+2) Y(A+4, Z+2) \\ &+ 2.48 \times 10^8 \sigma_T N_n Y(A-1, Z) + \sum_{ik} Y(A_i, Z_i) Y(A_k, Z_k) \rho N_A \langle\sigma v\rangle_{ik},\end{aligned} \tag{4-305}$$

式中符号 λ 表示衰变率或平均寿命的倒数, 下标 β^-、β^+、K、α 及 γ 分别表示负 β 衰变、正 β 衰变、电子俘获、α 衰变及光致衰变, σ_T 是中子俘获截面, 单位为厘米^2(在表 38 中给出), N_n 是中子的数密度, 求和 $\sum_j$ 要对原子核(A, Z)与任何其他原子核之间的所有反应进行, 求和 $\sum_{ik}$ 要对具有产物(A, Z)的两个原子核之间的所有反应进行, ρ 是气体质量密度, 反应率 $N_A \langle\sigma v\rangle$ 由前几节给出的所有反应率的迭加求得。当一个反应是在同类型的 n 个原子核之间发生时, 第 4.3 节给出的反应率当用于 (4-305) 式时必须乘以 $n!$ 才行。例如, 对 $C^{12} + C^{12}$ 及 $O^{16} + O^{16}$ 反应的反应率应乘以 2, 而 3α 过程的反应率应乘以 6。

阿内特等(Arnett 和 Truran, 1969)已给出核反应网络复杂集合的数值解。假定在所有相同的时间间隔 $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ 内成分的变化足够小, 矢流可以线性化而得出:

$$f_{ij}^{n+1} = Y_i^{n+1} Y_j^{n+1} [ij]^{n+1} \tag{4-306}$$

$$\approx (Y_i^n Y_j^n + \Delta_i Y_j^n + \Delta_j Y_i^n) [ij]^{n+1}, \tag{4-307}$$

式中时间间隔的开始及终了分别以上标 n 及 $n+1$ 表示：

$$\left.\begin{aligned}\Delta_i&=Y_i^{n+1}-Y_i^n,\\ [ij]&=\rho N_A\langle\sigma v\rangle_{ij}。\end{aligned}\right\}\tag{4-308}$$

类似地，对时间对称的矢流的近似表达式为：

$$f_{ij}^{n+1/2}\approx\left(Y_i^nY_j^n+\frac{\Delta_i}{2}Y_j^n+\frac{\Delta_j}{2}Y_i^n\right)[ij]^{n+1/2}。\tag{4-309}$$

当用下式代替 Y_i 对时间的导数时，

$$\frac{d}{dt}(Y_i)=\frac{\Delta_i}{\Delta t},\tag{4-310}$$

我们便得到耦合的线性方程组(Arnett 和 Truran, 1969)：

$$Y_i^{n+1}a_{ii}+Y_j^{n+1}a_{ij}+Y_k^{n+1}a_{ik}+Y_l^{n+1}a_{il}=-Y_k^na_{ik}-Y_i^nY_j^n[ij],\tag{4-311}$$

式中

$$a_{ii}=\frac{1}{\Delta t}+Y_j^n[ij];$$
$$a_{ij}=Y_i^n[ij];$$
$$a_{ik}=-Y_l^n[kl];$$
$$a_{il}=-Y_k^n[kl]。$$

当 $|a_{ii}|>|a_{ij}|+|a_{ik}|+|a_{il}|$ 时，用迭代法求解(4-311)式是可能的。

当由 s 过程及 r 过程形成原子核时，重要的反应是$(n,\ \gamma)$、$(\gamma,\ n)$及 β 衰变过程，它们的倒数寿命分别为：

$$\lambda_n=\sigma_nv_nN_n\approx2.48\times10^8\sigma_TN_n\ 秒^{-1},\tag{4-312}$$

$$\lambda_\gamma=\sigma_\gamma cN_\gamma\tag{4-313}$$

及

$$\lambda_\beta=\frac{f\ln2}{ft}\approx10^{-5.5}f\ 秒^{-1},\tag{4-314}$$

式中 σ_n 及 σ_γ 分别是$(n,\ \gamma)$反应及$(\gamma,\ n)$反应的截面，v_n 及 N_n 是发生$(n,\ \gamma)$过程的中子的速度及数密度，σ_T 用厘米^{2}为单位，并且假定是在 3 万电子伏处测定的，其值如表 38 的值所示，N_γ 是 γ 光子的密度，ft 及 f 值已在由第 4.3.2 节所给出的参考文献中列成了表。

s 过程的一般方程为：

$$\begin{aligned}\frac{dN(A,\ Z)}{dt}=&\lambda_n(A-1,\ Z)N(A-1,\ Z)-\lambda_n(A,\ Z)N(A,\ Z)\\&+\lambda_\beta(A,\ Z-1)N(A,\ Z-1)-\lambda_\beta(A,\ Z)N(A,\ Z)\\&+当\ A>209\ 时由于\ \alpha\ 衰变所致终端项。\end{aligned}\tag{4-315}$$

记住 $\lambda_n\ll\lambda_\beta$，对 s 过程我们得出：

$$\frac{dN(A,\ Z)}{dt}=-\lambda_n(A,\ Z)N(A,\ Z)+\lambda_n(A-1,\ Z)N(A-1,\ Z)。\tag{4-316}$$

r 过程的一般方程为：

$$\begin{aligned}\frac{dN(A,\ Z)}{dt}=&\lambda_n(A-1,\ Z)N(A-1,\ Z)-\lambda_n(A,\ Z)N(A,\ Z)\\&+\lambda_\beta(A,\ Z-1)N(A,\ Z-1)-\lambda_\beta(A,\ Z)N(A,\ Z)\\&+\lambda_\gamma(A+1,\ Z)N(A+1,\ Z)-\lambda_\gamma(A,\ Z)N(A,\ Z)\\&+当\ A\geqslant260\ 时由于裂变所致终端项。\end{aligned}\tag{4-317}$$

假定在快速的$(n,\ \gamma)$及$(\gamma,\ n)$过程之间达到了平衡状态，并且 $\lambda_n\gg\lambda_\beta$，则对 r 过程我们得出：

$$\frac{dN(A,\ Z)}{dt}=-\lambda_\beta(A,\ Z)N(A,\ Z)+\lambda_\beta(A,\ Z-1)N(A,\ Z-1)。\tag{4-318}$$

r 过程的统计平衡的一般方程为:

$$\log\frac{N(A+1,\ Z)}{N(A,\ Z)}=\log N_n-34.07-\frac{3}{2}\log T_9+\frac{5.04}{T_9}Q_n,\tag{4-319}$$

式中中子结合能 Q_n 由下式给出:

$$Q_n(A,\ Z)=c^2[M_n+M(A,\ Z)-M(A+1,\ Z)],\tag{4-320}$$

单位是兆电子伏, $T_9=T/10^9$, N_n 是中子的数密度。

在足够高的温度 $T\gtrsim3\times10^9$ 开时, 反应是如此频繁以致几乎所有原子核 $(A,\ Z)$ 都转化成另外的原子核 $(A',\ Z')$, 即使当 Z 及 Z' 为大值时也是这样。当所有核反应 (除了 β 衰变以外) 的反应率严格等于逆反应的反应率时, 根据类似于导出第 3.3.1.4 节的沙哈电离公式的统计考虑, 可以确定核丰度。在原子核与自由质子及中子之间存在统计平衡的条件下, 详尽的反应率变得不必要了, 而核素 $(A,\ Z)$ 的数密度 $N(A,\ Z)$ 由下式给出 (Hoyle, 1946; Burbidge, Burbidge, Fowler 和 Hoyle, 1957):

$$N(A,\ Z)=\omega(A,\ Z)\left(\frac{2\pi\hbar}{M_\mu kT}\right)^{3(A-1)/2}A^{3/2}\frac{N_p^Z N_n^{A-Z}}{2^A}\exp\left[\frac{E_B(A,\ Z)}{kT}\right],\tag{4-321}$$

式中配分函数或统计权重因子 $\omega(A,\ Z)$ 由下式给出:

$$\omega(A,\ Z)=\sum_r(2I_r+1)\exp\left(-\frac{E_r}{kT}\right),\tag{4-322}$$

这里 E_r 是测量到的高于基态的激发态能量, I_r 是自旋, M_μ 是原子质量单位, 因子 $(2\pi\hbar^2/M_\mu kT)^{3/2}$[1] $={}^*1.682690\times10^{-34}T_9^{-3/2}$ 厘米$^{-3}$, N_p 及 N_n 分别表示自由质子及中子的密度, 原子核 $(A,\ Z)$ 的基态的结合能 $E_B(A,\ Z)$ 由下式给出:

$$E_B(A,\ Z)=c^2[(A-Z)M_n+ZM_p-M(A,\ Z)],\tag{4-323}$$

其中 M_n、M_p 及 $M(A,\ Z)$ 分别是自由中子、自由质子及原子核 $(A,\ Z)$ 的质量。(4-321) 式能够改写成下列形式:

$$\log N(A,\ Z)=\log\omega(A,\ Z)+33.77+\frac{3}{2}\log(AT_9)+\frac{5.04}{T}E_B(A,\ Z)$$
$$+A\left(\log N_n-34.07-\frac{3}{2}\log T_9\right)+Z\log\left(\frac{N_p}{N_n}\right),\tag{4-324}$$

式中 $T_9=T/10^9$。如果达到核平衡的速率比任何有关的衰变速率都快, 则比值必保持为

$$\frac{\langle Z\rangle}{\langle N\rangle}=\frac{\Sigma ZN(A,\ Z)+N_p}{\Sigma(A-Z)N(A,\ Z)+N_n},\tag{4-325}$$

因此平衡数密度 $N(A,\ Z)$ 由密度 ρ、温度 T 及 $\langle Z\rangle/\langle N\rangle$ 所确定。福勒等 (Fowler 和 Hoyle, 1964; 以及 Clifford 和 Tayler, 1965) 曾用平衡过程确定铁族原子核 $(46\leqslant A\leqslant60)$ 的丰度。

最近, 鲍坦斯基等 (Bodansky, Clayton 和 Fowler, 1968) 已证明, 若在 ^{28}Si 与铁族之间达到平衡, 而在 ^{28}Si 与 α 粒子之间未达到平衡, 则准平衡状态占优势, 在这种状态中, 由于质子、中子及 α 粒子交换过程, 使重于 ^{28}Si 的原子核与 ^{28}Si 处于平衡状态。在此情况, 相对

1) 原文误为 $(2\pi^2\hbar^2/M_\mu kT)^{3/2}$。——译者注

于 ^{28}Si的平衡数密度 $N(A, Z)$ 由下式给出：

$$N(A, Z)=C(A, Z)N(^{28}\mathrm{Si})N_\alpha^{\delta_\alpha}N_p^{\delta_p}N_n^{\delta_n}, \tag{4-326}$$

式中

$$C(A, Z)=\frac{\omega(A, Z)}{\omega(^{28}\mathrm{Si})}2^{-(\delta_p+\delta_n)}[U(A, Z)]^{3/2}\left(\frac{2\pi\hbar^2}{M_\mu kT}\right)^{3(\delta_\alpha+\delta_p+\delta_n)/2}\exp\left[\frac{Q(A, Z)}{kT}\right]$$

及

$$U(A, Z)=\frac{A(A, Z)}{A(^{28}\mathrm{Si})}A(^4\mathrm{He})^{-\delta_\alpha}A_p^{-\delta_p}A_n^{-\delta_n},$$

这里 $A(A, Z)$ 是核素 (A, Z) 的原子质量，单位是原子质量单位，A_i 是元素 i 的原子量；

$$Q(A, Z)=E_B(A, Z)-E_B(^{28}\mathrm{Si})-\delta_\alpha E_B(^4\mathrm{He}), \tag{4-327}$$

其中 $E_B(A, Z)$是由 (4-9) 式或 (4-19) 式所给出的核素(A, Z)的结合能；δ_α、δ_p 及 δ_n 分别表示在核素(A, Z)中超过 ^{28}Si 的数目的自由 α 粒子、质子或中子的数目。若最大的 α 粒子核包括 N^1 个中子及 Z^1 个质子，则

$$\delta_\alpha=\frac{1}{4}(N^1+Z^1-28), \quad \delta_p=Z-Z^1 \text{ 及 } \delta_n=N-N^1。 \tag{4-328}$$

α 粒子的配分函数 $\omega(A, Z)$ 为 1，而中子及质子的配分函数 $\omega(A, Z)$ 为 2。鲍坦斯基等 (Bodansky, Clayton 和 Fowler, 1968) 已对 $24\leqslant A\leqslant 62$ 及 $T_9=3.8$、4.4 及 5.0 列表给出 δ_α、δ_p 及 δ_n、$Q(A, Z)$、$\omega(A, Z)$ 及 $C(A, Z)$。

4.4.6. 稀有轻元素的形成——散裂反应及宇宙核合成

稀有的轻原子核 D^2、He^3、Li^6、Li^7、Be^7、Be^9、Be^{10}、B^{10} 及 B^{11} 不是在恒星核合成的正常过程中产生，而事实上是在热恒星内部将破坏这些核。如图 26 所示，这种情况反映在这些原子核的丰度相对地低。然而，轻元素确实存在这一事实表明，它们必定是在相对冷的及中等稠密的区域中非热核性质的核反应或在膨胀着的宇宙的早期阶段的核反应中所形成的。福勒等(Fowler, Burbidge 和 Burbidge, 1955)首先提出可能由于电磁加速的质子与更丰富的 M 类原子核：C^{12}、N^{14}、O^{16} 及 Ne^{20} 的碰撞而在恒星表面形成轻元素。在福勒等 (Fowler, Greenstein 和 Hoyle, 1962；以及 Bernas, Gradsztajn, Reeves 和 Shatzman, 1967)改进模型中，轻元素是在太阳收缩的早期由太阳质子的散裂反应形成[1]的。布雷特等 (Bradt 和 Peters, 1950)提出宇宙线会与 M 类元素相互作用而形成轻元素，最近，里夫斯等(Reeves, Fowler 和 Hoyle, 1970；Mitler, 1970；以及 Meneguzzi, Audouze 和 Reeves, 1971)指出，如果 Li^6、Be^9、B^{10} 及 B^{11} 是由宇宙线粒子与 M 类原子核在银河系的寿命期间的散裂反应所产生的，就能解释它们在恒星中及太阳系中的丰度。然而，无论恒星核合成或者散裂反应都未能产生足够的 D、He^3、He^4 或 Li^7 以说明观测到的丰度(参看 Hoyle 和 Tayler, 1964)。瓦戈纳等(Wagoner, Fowler 和 Hoyle, 1967)指出，弗里德曼(Friedmann)膨胀宇宙的低密度的早期阶段能够产生这些轻元素在目前太阳系中所具有的丰度。在某些恒星中发现的异常高的 He^3/He^4 的比值可以用这些恒星表面上的散裂效应来加以解释 (Novikov 和 Syunyaev, 1967；Vauclair 和 Reeves, 1972)。

由上述讨论显然可知，用以解释轻元素形成的机制，必须能与表 45 给出的观测到的丰度一致。对行星来说，我们得出丰度比值为(Meneguzzi, Audouze 和 Reeves, 1971)：

1) 原文用"合成"，不妥。——校者注

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{Li}}{\mathrm{H}}=1.2\times10^{-9};\\&\frac{\mathrm{Be}}{\mathrm{H}}=2\times10^{-11};\\&\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{H}}\ 从\ 2\times10^{-10}\ 至\ 8\times10^{-9};\\&\frac{{}^{7}\mathrm{Li}}{{}^{6}\mathrm{Li}}=12.5\pm0.3;\\&\frac{{}^{11}\mathrm{B}}{{}^{10}\mathrm{B}}=4\pm0.4;\\&\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{H}}=1.6\times10^{-4}。\end{aligned}\right\}\tag{4-329}$$

对太阳来说，我们得到丰度比值为(Greenstein, 1951; Kinman, 1956; Grevesse, 1968)：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{He}^3}{\mathrm{He}^4}\leqslant0.02;\\&\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{H}}<4\times10^{-5};\\&\frac{\mathrm{Li}}{\mathrm{H}}=10^{-11};\\&\frac{\mathrm{Be}}{\mathrm{H}}=10^{-11};\\&\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{H}}<3\times10^{-10}。\end{aligned}\right\}\tag{4-330}$$

对于半人马座 A，我们得到(Sargent 和 Jugaku, 1961)：

$$\frac{\mathrm{He}^3}{\mathrm{He}^4}=5.3,\tag{4-331}$$

而对星际介质我们得到(Weinreb, 1962)：

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{H}}<8\times10^{-5},\tag{4-332}$$

或(Cesarsky, Moffet 和 Pasachoff, 1973)

$$3\times10^{-5}<\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{H}}<5\times10^{-4},$$

以及(Audouze, Lequeux 和 Reeves, 1973)

$$\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{H}}<2\times10^{-9}。\tag{4-333}$$

对 F 型及 G 型星，我们得到丰度比值为(Wallerstein 和 Conti, 1969; Meneguzzi, Audouze 和 Reeves, 1971)：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{Li}}{\mathrm{H}}=2\times10^{-10};\\&\frac{\mathrm{Be}}{\mathrm{H}}=3\times10^{-11};\\&\frac{{}^{7}\mathrm{Li}}{{}^{6}\mathrm{Li}}=2.5。\end{aligned}\right\}\tag{4-334}$$

很年青的恒星具有高的 Li/H 比($8\times10^{-10}\sim4\times10^{-9}$)，对一个给定的星团来说，晚型星显示较少的锂的丰度，它随光谱型而减少；当考虑同一类型的恒星时，锂的丰度随恒星的年龄而减少。正如格林斯坦等(Greenstein 和 Richardon, 1951)首先提出，以及韦曼等(Weymann

表 45 一些稀有轻元素在太阳系中的丰度

原子核	质量分数
H	0.745
D	2.3×10^{-4}
He^3	5.0×10^{-5}
He^4	0.24
Li^6	4.4×10^{-10}
Li^7	6.5×10^{-9}
Be～B	1.6×10^{-9}

和 Sears, 1965)所讨论过的，锂的耗尽能够以恒星演化晚期阶段存在对流区来加以说明。

虽然由散裂反应所形成的元素的丰度取决于反应截面及入射高能粒子的能谱，相比之下，丰度比值对能谱是不灵敏的。例如，若只考虑 $p+{}^{16}O$ 反应，测定的截面给出(Yiou, Seide 和 Bernas, 1969)：当质子能量大于 135 兆电子伏时，

$$\left.\begin{aligned}\frac{{}^7Li}{{}^6Li}&=0.98\pm0.13;\\ \frac{{}^9Be}{{}^7Be}&=0.34\pm0.08;\\ \frac{{}^{10}Be}{{}^9Be}&=0.30\pm0.08;\\ \frac{{}^{11}B+{}^{11}C}{{}^{10}B+{}^{10}C}&=2.1\pm0.6。\end{aligned}\right\}\tag{4-335}$$

此外，能够产生 $Li/H=10^{-9}$ 的质子通量将产生 $D/H=3\times10^{-7}$ 以及 ${}^3He/{}^4He=3\times10^{-6}$。与观测到的丰度的比较表明，散裂反应可以说明 Li^6、Be 及 B，但不能解释太阳系中 ${}^7Li$ 及 D 的较高的丰度。当详尽计算时，对于由能谱为 $\varphi(E)$ 的质子通量与 M 类元素之间的散裂所产生的同位素 L 的形成率，由下式给出：

$$\frac{dN_L}{dt}=\sum_M N_M\int\sigma(M,\ L,\ E)\varphi(E)dE,\tag{4-336}$$

式中 M 是 M 类元素 C^{12}、N^{14}、O^{16} 及 Ne^{20} 中的任一种，N_M 及 N_L 分别是 M 类元素及 L 类元素的数密度，t 是时间变量，E 是质子能量，$\sigma(M、L、E)$ 是散裂反应截面。太阳耀斑观测给出质子能谱为：

$$\varphi(E)\propto E^{-\gamma},\tag{4-337}$$

式中 γ 的范围为 2～5，或更确切地说，

$$\varphi(E)\propto\exp(-R/R_0),\tag{4-338}$$

式中刚度 $R=pc/(Ze)$ 是动量与电荷之比；R_0 是一个由实验确定的参量，它的范围为 40 至 400 兆电子伏。若质子静质量能是 Mc^2 并且其动能是 E，则

$$R=\frac{A}{Ze}[2Mc^2E+E^2]^{1/2},\tag{4-339}$$

式中 A 是原子序数，Ze 是原子核的电荷。

对宇宙线质子，梅尼古齐等(Meneguzzi, Audouze 和 Reeves, 1971)采用

$$\varphi(E)=12.5(E_0+E)^{-2.6}\ 厘米^{-2}\cdot秒^{-1}京电子伏^{-1},\tag{4-340}$$

式中 $E_0=0.931$ 京电子伏，E 是质子动能，单位是京电子伏。生成率包含散裂截面对入射频谱的积分，对宇宙线能谱来说，这些生成率列于表 46。梅尼古齐等(Meneguzzi, Audouze

表 46 由丰富原子核及宇宙线质子(H)或 α 粒子(He)的散裂反应产生的稀有轻元素的生成率[1]

原子核	以克⁻¹·秒⁻¹为单位的生成率			
	C^{12}	N^{14}	O^{16}	Ne^{20}
Li^6(H)	21.4×10^{-6}	9.9×10^{-6}	39.3×10^{-6}	1.26×10^{-6}
Li^6(He)	5.39	1.59	9.53	1.23
Li^7(H)	54.3	15.4	57.0	1.80
Li^7(He)	8.63	2.43	14.54	1.87
Be^9(H)	11.3	1.58	7.36	0.24
Be^9(He)	2.39	0.96	5.75	0.74
B^{10}(H)	47.6	2.90	43.8	1.40
B^{10}(He)	2.70	1.14	6.85	0.88
B^{11}(H)	170.7	23.9	85.0	2.70
B^{11}(He)	3.65	1.13	6.78	0.87

[1] 取自密特勒(Mitler, 1970)的文章。所有的值都象第一项一样乘以 10^{-6}。

和 Reeves, 1971; 以及 Silberberg 和 Tsao, 1973)给出了宇宙线散裂反应的动力学详尽公式, 赖特等(Ryter, Reeves, Gradsztajn 和 Audouze, 1970)给出了恒星表面上散裂反应的有关公式。近似关系式可用下列公式推导得出:

$$\frac{N_L}{N_M}=\langle\phi\rangle\langle\sigma\rangle T, \tag{4-341}$$

式中 $\langle\phi\rangle$ 及 $\langle\sigma\rangle$ 分别表示平均通量及截面, T 表示散裂反应的持续时间。例如, 当能量大于 30 兆电子伏时, 银河宇宙线通量为 (Frier 和 Waddington, 1968; Comstock, Fan 和 Simpson, 1969):

$$\left.\begin{aligned}\varphi_{\rm H}&=3.6\ \text{厘米}^{-2}\cdot\text{秒}^{-1};\\ \varphi_{\rm He}&=0.4\ \text{厘米}^{-2}\cdot\text{秒}^{-1};\\ \varphi_{\rm C,N,O}&=25\times10^{-3}\ \text{厘米}^{-2}\cdot\text{秒}^{-1};\\ \varphi_{\rm N}&=4\times10^{-3}\ \text{厘米}^{-2}\cdot\text{秒}^{-1},\end{aligned}\right\} \tag{4-342}$$

相应的 $T=10^{10}$ 年, 即银河系的年龄。梅尼古齐等(Meneguzzi, Audouze 和 Reeves, 1971)假定在 10^{10} 年内恒定的宇宙线能谱为($E^{-2.6}$), 从而得出丰度比值

$$\left.\begin{aligned}&\frac{^6\rm Li}{\rm H}=8\times10^{-11}; &&\frac{^{10}\rm B}{\rm H}=8.7\times10^{-11};\\ &\frac{^7\rm Li}{\rm H}=1.2\times10^{-10}; &&\frac{^{11}\rm B}{\rm H}=2\times10^{-10};\\ &\frac{^7\rm Li}{^6\rm Li}=1.5; &&\frac{^{11}\rm B}{^{10}\rm B}=2.4;\\ &\frac{\rm Li}{\rm H}=2\times10^{-10}; &&\frac{\rm B}{\rm H}=3.0\times10^{-10};\\ &\frac{^9\rm Be}{\rm H}=2\times10^{-11}; &&\frac{\rm B}{\rm Be}=15;\\ &\frac{\rm Li}{\rm Be}=10; &&\frac{\rm B}{\rm Li}=1.4。\end{aligned}\right\} \tag{4-343}$$

奥杜齐等 (Audouze, Epherre 和 Reeves, 1967; Gradsztajn, 1967; Bernas, Gradsztajn, Reeves 和 Schatzman, 1967; 以及 Reeves, 1971)给出了详尽计算时要用到的质子对 M 类元素的散裂截面。沃克莱尔等(Vauclair 和 Reeves, 1972)概括了对 He^4、He^3 及 D 等的质

子感生反应截面。克兰多尔等 (Crandall, Miliburn, Pyle 和 Radin, 1970) 给出了 α 感生散裂截面。在高能时，α 散裂截面比等效的质子感生截面大 2～3 倍。因为对宇宙线来说，氦与氢之比约为 0.1，所以在高能时 α 感生的贡献约为质子感生截面的 20%。在能量低于 20 兆电子伏的情况，则 α 感生反应为主。西尔伯伯格等 (Silberberg 和 Tsao, 1973) 给出了 $Z\leqslant 28$ 靶粒子的热核反应的分截面。表 47 给出对 Li^6、Be 及 B 的生成起主要作用的质子散裂反应。

表 47　生成 Li^6、Be 和 B 的质子散裂反应 Q 值及以毫靶为单位的截面[1]

反　　应	有效 Q（兆电子伏）	反应截面 平均 σ（毫靶）	反应截面 $E>2$ 京电子伏的 σ（毫靶）
$^{12}C(p, pn)^{11}C$	18.7	60 }	(50)
$^{12}C(p, 2p)^{11}B$	16.0	16 }	
$^{12}C(p, 2pn)^{10}B$	27.4	10	(15)
$^{12}C(p, 3pn)^{9}Be$	34	2	(6)
$^{12}C(p, p\alpha n)^{7}Be$	26.3	12	(9)
$^{12}C(p, 2p\alpha)^{7}Li$	24.6	7	(6)
$^{12}C(p, 2p\alpha n)^{6}Li$	31.9	10	(7.5)
$^{14}N(p, \alpha)^{11}C$	2.9	30 }	(45)
$^{14}N(p, 3pn)^{11}B$	28.4	10 }	
$^{14}N(p, p\alpha)^{10}B$	11.6	10	(12)
$^{14}N(p, 2p\alpha)^{9}Be$	18.2	2	(6)
$^{14}N(p, 2\alpha)^{7}Be$	10.5	10	(12)
$^{14}N(p, 3p\alpha n)^{7}Li$	37.1	10	(10)
$^{14}N(p, p2\alpha)^{6}Li$	16.1	10	(7)
$^{16}O(p, p\alpha n)^{11}C$	25.9	15 }	(25)
$^{16}O(p, \alpha 2p)^{11}B$	23.1	10 }	
$^{16}O(p, 2p\alpha n)^{10}B$	34.6	10	(15)
$^{16}O(p, 3p\alpha n)^{9}Be$	41.7	2	(3.5)
$^{16}O(p, p2\alpha n)^{7}Be$	33.4	4	(10)
$^{16}O(p, 2p\alpha)^{7}Li$	31.8	12	(14)
$^{16}O(p, 2p2\alpha n)^{6}Li$	39.0	10	(14)
$^{20}Ne(p, p2\alpha n)^{11}C$	30.6	12 }	(18)
$^{20}Ne(p, 2\alpha 2p)^{11}B$	27.8	12 }	
$^{20}Ne(p, 2p2\alpha n)^{10}B$	39.3	12	(14)
$^{20}Ne(p, 3p2\alpha n)^{9}Be$	45.9	2	(4)
$^{20}Ne(p, p3\alpha n)^{7}Be$	38.2	8	(10)
$^{20}Ne(p, 2p3\alpha)^{7}Li$	36.5	8	(10)
$^{20}Ne(p, 2p3\alpha n)^{6}iL$	43.8	8	(10)

[1] 有效 Q 值及平均截面取自伯纳斯等 (Bernas, Gradsztajn, Reeves 和 Shatzman, 1967) 的文章，而 $E>2$ 京电子伏的截面取自梅尼古齐等 (Meneguzzi, Audouze 和 Reeves, 1971) 的文章。转换因子 1 兆电子伏 = *1.6021892(46) × 10^{-21} 尔格以及 1 毫靶 = 10^{-27} 厘米^2。

这里"有效"能量阈值 Q 是：高于此能量时截面就急剧地增长，并且大致相当于出射产物具有最大数目的 α 粒子时的阈值。截面的图形是这样的：在有效阈值以上大约 10 至 20 兆电子伏，截面达到最大值，然后减少到一个恒定值，或者当质子能量 >150 兆电子伏时是一个随能量缓慢减少的函数。最大截面与高能截面之比通常在 1 与 2 之间。前面给出的平均截面 $\langle\sigma\rangle$ 是高于有效阈值 Q 的能量的平均值。Q 和 $\langle\sigma\rangle$ 的值取自伯纳斯等 (Bernas, Gradsztajn, Reeves 和 Shatzman, 1967) 的文章。对于能量大于 2 京电子伏的质子，其感生

反应截面在括号内给出，这些值取自梅尼古齐等(Meneguzzi, Audouze 和 Reeves, 1971)的文章。

如前所述，在宇宙线对星际介质的原子核的散裂过程中是不能形成显著数量的 D 及 He^3 的。这些元素在恒星核合成中不能形成显著的数量，而且对 D 及 He^3 来说，在温度分别高于 10^6 及 10^7 开的热核反应中将被消耗。盖莫夫等 (Gamow, 1946; Alpher, Bethe 和 Gamow, 1948; 以及 Alpher 和 Herman, 1950) 首先提出，若元素起源于宇宙的原始火球阶段，则观测到的元素丰度是可以得到解释的。瓦戈纳等(Wagoner, Fowler 和 Hoyle, 1967; 以及 Wagoner, 1973) 已详细地算出在均匀的、各向同性的、膨胀宇宙的早期阶段轻元素的生成情况。他们的结果示于图 27，图中给出轻元素丰度作为背景辐射温度的现在值 T_0 及减速参量 q_0 的函数。若 $T_0=3$ 开及 $q_0=5\times10^{-3}$，则对 D、He^3、He^4 及 Li^7 得到的丰度与太阳系中的丰度大体上一致。然而这种过程不能解释 Li^6 及 Be^9 的观测到的丰度。此外，氘的宇宙丰度能够在恒星的对流外壳中耗尽 (Bodenheimer, 1966)，而对流的氦燃烧

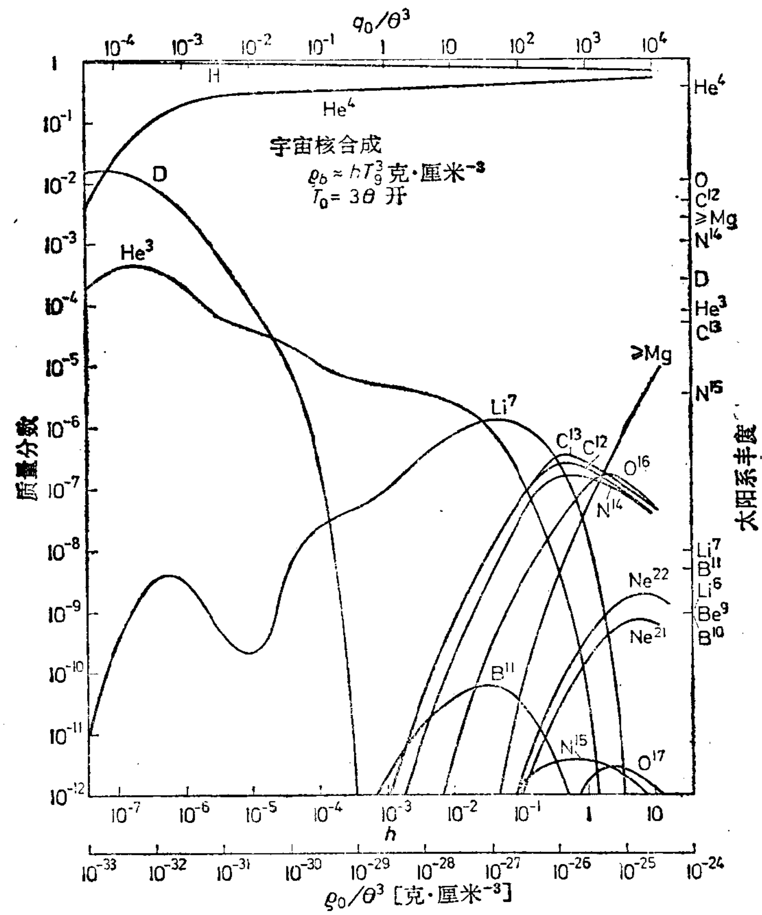


图 27　宇宙膨胀中轻元素的合成。各种轻原子核的质量分数表示为参量 h 的函数，其关系式为 $\rho_B=hT_9^3$，式中 ρ_B 是重子密度，$T_9=T/10^9$，T 是宇宙黑体温度。参量 h 也决定 q_0 值，q_0 是膨胀的减速参量的现在值。由现在气体密度及温度值所加的限制，排除了在这样一种宇宙过程中产生大量重于锂的元素的可能。T_0 是现在光子温度，ρ_0 是现在重子密度值，符号 θ 代表 $T_0/3$ 开。图右纵坐标是太阳系的元素丰度。从原子序数 $A>4$ 开始，星族 II 的元素丰度为太阳系元素丰度的 10^{-2} 量级(取自 Wagoner, Fowler 和 Hoyle, 1967 的文章)

壳层的氦闪能够增加 Li^7 的丰度 (Schwarzschild 和 Härm, 1967)。表 48 给出在瓦戈纳等 (Wagoner 等, 1967) 的模型中产生的 H、D、He^3、He^4 及 Li^7 的丰度。

表 48 在宇宙大爆炸起源中所产生的 D、He^3、He^4 及 Li^7 的丰度作为宇宙质量密度的函数[1]

证认	密度(T_0=2.7 开, 单位是克·厘米$^{-3}$)						
	3×10^{-33}	10^{-32}	3×10^{-32}	10^{-31}	3×10^{-31}	10^{-30}	3×10^{-30}
H^1	0.95	0.89	0.81	0.76	0.75	0.74	0.73
He^4	0.032	0.098	0.19	0.24	0.25	0.26	0.27
$(D^2/H^1)/(D^2/H^1)_\odot$	53	34	13	2.7	0.40	0.054	1.2×10^{-3}
$(He^3/He^4)/(He^3/He^4)_\odot$	53	16	4.2	1.2	0.67	0.36	0.16
$(Li^7/H^1)/(Li^7/H^1)_\odot$	0.063	0.44	0.50	0.080	0.033	0.70	3.4

[1] 取自特鲁伦等(Truran 和 Cameron, 1971)的文章。表中角标 ⊙ 表示太阳系的值。

4.4.7. 超新星爆发中的快速热核反应

伯比奇等 (Burbidge, Burbidge, Fowler 和 Hoyle, 1957) 论证过演化到晚期的恒星的引力坍缩可能形成一个爆聚核心，核心的热可能足以点燃潜在的爆炸性轻核，比如温度为几倍于 10^9 开时的 C^{12}。相继在恒星壳层中发生的爆炸可认为是与平衡的 r 过程及 p 过程等所引起的核合成相符合的。霍伊尔等(Hoyle 和 Fowler, 1960)于是提出超新星爆发的两种起源：I 型爆发可认为是由中等质量的恒星核心中简并物质的点燃所致。具有非简并核心的更大质量的恒星是 II 型爆发的领域，这种爆发是爆聚-爆炸过程的结果。早川幸男等 (Hayakawa, Hayashi 和 Nishida, 1960; Tsuji, 1963; 以及 Tsuda 和 Tsuji, 1963) 假设了在超新星爆发期间，象碳-氮-氧过程、p 俘获、n 过程以及 α 俘获等这样一些快速热核过程能够合成 $20\leqslant A\leqslant60$ 范围内的多种元素。福勒等 (Fowler 和 Hoyle, 1964) 给出了 II 型超新星爆发过程中核合成的详尽分析。后来科尔盖特等 (Colgate 和 White, 1966; 以及 Arnett, 1966, 1967) 给出了爆聚-爆炸过程的详尽的流体动力学模型。瓦戈纳 (Wagoner, 1969) 指出，当一颗非简并恒星在很高温度($T\approx10^{10}$ 开)爆发时，能够以太阳系的丰度产生 ^7Li、^9Be、^{10}B、^{11}B。阿内特(Arnett, 1969)提出过一种超新星模型：$4M_\odot\leqslant M\leqslant9M_\odot$ 的中等质量的恒星，在它的简并内部区域爆炸式地点燃碳燃烧反应；阿内特等(Arnett, Truran 和 Woosley, 1971)指出了这种模型可以成功地解释太阳系铁族元素的丰度。特鲁伦等 (Truran, Arnett, Tsuruta 和 Cameron, 1968; 以及 Truran 和 Cameron, 1972) 讨论了在超新星爆发期间由 r 过程及 p 过程所引起的元素合成。在第 4.4.4 节中给出了处理爆炸式燃烧过程的文献的综述。

在超新星爆发以前，恒星的质量密度 ρ 及温度 T 通过状态方程联系起来，这在第三章中已作过详尽的讨论。对完全简并的相对论性气体，我们得出如下的压力 P 的表达式 (Hoyle 和 Fowler, 1960)：

$$P={}^*1.243491\times10^{15}\left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)^{4/3}\left[1+\frac{1}{x^2}\left(\frac{2\pi^2k^2T^2}{m^2c^4}-1\right)\right]\text{达因·厘米}^2, \tag{4-344}$$

式中

$$\rho={}^*9.739491\times10^5\mu_e x^3\ \text{克·厘米}^{-3}; \tag{4-345}$$

常数 $^*1.243491\times10^{15}=(3\pi^2)^{1/3}c\hbar/(4M_\mu^{4/3})$ (M_μ 是原子质量单位)，而常数

$$^*9.739491\times10^5=M_\mu m^3c^3/(3\pi^2\hbar^3);\quad x=\hbar(3\pi^2N_e)^{1/3}/mc,$$

其中 N_e 是电子密度。简并气体的压力受温度的影响，相对地说是不灵敏的，而在引力收缩期间膨胀或中微子过程的影响不足以阻止温度升到爆炸值。例如，简并气体的温度及密度的关系为(Hoyle 和 Fowler, 1960)：

$$\left(\frac{T_9}{1.33}\right)^2-1=\left(\frac{\rho}{{}^*9.739491\times10^6\mu_e}\right)^{2/3}\left[\left(\frac{M}{M_{临界}}\right)^{2/3}-1\right], \tag{4-346}$$

式中 $T_9=T/10^9$，张德拉塞卡临界质量由下式给出：

$$M_{临界}=\frac{5.80}{\mu_e^2}M_{\odot}。 \tag{4-347}$$

对简并的相对论性气体，$\rho>7.3\times10^6\mu_e$ 克·厘米$^{-3}$，对量级为 $M_{临界}$ 的质量 M 来说，碳燃烧的爆发温度 $T_9\approx1$ 是可以实现的。阿内特(Arnett, 1969)已得出中等质量 $4M_{\odot}\leqslant M\leqslant9M_{\odot}$ 恒星的碳-氧星核的演化，并指出对量级为 10^9 克·厘米$^{-3}$ 的简并核心密度来说碳燃烧的爆炸式点燃确实是会发生的。爆炸产生强激波，称为爆炸波，它通过未燃烧的恒星外壳向外传播，而且瞬息间使外壳的温度增高。在点燃这种燃料以前，在激波波阵面之前的压力及比容(P_1, V_1)与波阵面之后的压力及比容(P_2, V_2)的关系为：

$$\frac{V_2}{V_1}=\left(\frac{2}{M_1^2}+\gamma-1\right)/(\gamma+1) \tag{4-348}$$

及

$$\frac{P_2}{P_1}=(2\gamma M_1^2-\gamma+1)/(\gamma+1), \tag{4-349}$$

式中

$$M_1^2=\left(\frac{v_1}{s_1}\right)^2=1+[1+(1+2\beta)^{1/2}]/\beta,$$

而

$$\beta=\gamma P_1V_1/[Q(\gamma^2-1)],$$

Q 是在这种反应情况下每克物质释出的能量，$M_1=(v_1/s_1)$ 是在波阵面之前激波波阵面的速度与声速之比，γ 是绝热指数。典型的速度是 $v\approx20000$ 公里·秒$^{-1}$，而温度 T_2 的上升可以由 P_2、V_2 及状态方程算出。这就获得了爆炸温度 T_2，由于爆炸波通过后恒星燃料的点燃结果甚至会获得更高的温度。在爆炸波通过后，这些温度是高到足以能最后建立完整的核统计平衡。因此起始核丰度根据平衡方程(第 4.4.5 节)就确定了。在接着发生的膨胀期间，由绝热条件把温度与密度联系起来，而丰度只随中子-质子的比值以及膨胀率而变。对于温度高到足以在开始时建立核平衡的非简并天体的爆炸来说，也具有相同的情况(参看(Wagoner, 1969))。

当然，在有下式给出的压力 P 的情况下，非简并、非相对论性恒星核心的起始条件是不同于简并情况(Fowler 和 Hoyle, 1964)：

$$P=\left[\frac{3R^4(1-\beta)}{a\mu^4\beta^4}\right]^{1/3}\rho^{4/3}, \tag{4-350}$$

密度

$$\rho=\frac{a\mu\beta}{3R(1-\beta)}T^3。 \tag{4-351}$$

这里 $R={}^*8.31441\times10^{16}$ 尔格·摩尔$^{-1}$·(10^9 开)$^{-1}$ 是气体常数，辐射密度常数[1] $a=7.565660\times10^{21}$ 尔格·厘米$^{-3}$·(10^9 开)$^{-4}$，μ 是平均分子量，而 β 是气体压力与总压力之比，满足下列关系式：

$$1-\beta=0.0030\left(\frac{2M}{3M_{\odot}}\right)^2\mu^4\beta^4。 \tag{4-352}$$

1) 原文误为斯忒藩-玻耳兹曼常数，a 为辐射密度常数，而斯忒藩-玻耳兹曼常数为 $\sigma=ac/4=5.67032\times10^{31}$ 尔格·厘米$^{-2}$·秒$^{-1}$·(10^9 开)$^{-4}$。——译者注

对大质量恒星来说，$M\approx 30M_{\odot}$，我们得到 $\beta\approx 0.40$，取 $\mu\approx 2.1$ 及 $\beta\approx 0.4$，我们得到：

$$\rho\approx 4.3\times 10^{4}T_{3}^{3}\text{克·厘米}^{-3}。\tag{4-353}$$

一般说来，对质量为 M_c 的核心

$$\rho\approx 1.016\times 10^{7}\left(\frac{M_{\odot}}{M_c}\right)^{2}\left(\frac{T}{\mu\beta}\right)^{3}\text{克·厘米}^{-3}。\tag{4-354}$$

福勒等(Fowler 和 Hoyle, 1964)描述了伴随着收缩核心而来的爆聚-爆炸现象；而科尔盖特等 (Colgate 和 White, 1966; Arnett, 1966, 1967, 1968; 以及 Arnett 和 Cameron, 1967) 给出了随着爆聚发生的流体动力学过程的详情。正如福勒等(Fowler 和 Hoyle, 1964)所指出的，向外运动的激波引起的温度升高，足以引起氧和氢的爆炸式燃烧以及爆炸时间尺度≈100 秒左右的其他快速过程。

4.5. 高能粒子

4.5.1. 高能粒子的形成

4.5.1.1. 在原子核场中 γ 射线吸收所形成的电子-正电子偶

当一个能量 $h\nu$ 大于阈能 $2mc^2=$*1.0220068 兆电子伏的光子通过荷电为 eZ 的一个原子核的库仑场时，可能形成电子-正电子偶。当我们研究的所有能量都大于 mc^2 时，对于能量分别为 E_0 及 E_1 的正电子及电子偶形成的截面 $\sigma(E_0)$ 由下式给出 (Bethe 和 Heitler, 1934)：对于相对论性能量及无屏蔽情况

$$\sigma(E_0)dE_0=4\alpha Z^2r_0^2\,\frac{\left[E_0^2+E_1^2+\frac{2}{3}E_0E_1\right]}{(h\nu)^3}\left[\ln\left(\frac{2E_0E_1}{h\nu mc^2}\right)-\frac{1}{2}\right]dE_0;$$

$$\frac{2E_0E_1}{h\nu}\ll\frac{mc^2}{\alpha Z^{1/3}}。$$

对于相对论性能量及完全屏蔽情况

$$\sigma(E_0)dE_0=\frac{4\alpha Z^2r_0^2}{(h\nu)^3}\left[\left(E_0^2+E_1^2+\frac{2}{3}E_0E_1\right)\ln\left(\frac{191}{Z^{1/3}}\right)-\frac{E_1E_0}{9}\right]dE_0;\tag{4-355}$$

$$\frac{2E_0E_1}{h\nu}\ll\frac{mc^2}{\alpha Z^{1/3}},$$

式中精细结构常数 $\alpha=$*1/137.03604，经典电子半径 $r_0=e^2/mc^2=$*2.8179380×10^{-13} 厘米。电子-正电子偶形成的总截面 $\sigma(h\nu)$ 是把 (4-355) 式从 $E_0=mc^2$ 到 $E_0=h\nu-mc^2$ 进行积分而求出的：

$$\left.\begin{aligned}\sigma(h\nu)&=4\alpha Z^2r_0^2\left[\frac{7}{9}\ln\left(\frac{2h\nu}{mc^2}\right)-\frac{109}{54}\right]\quad\left(\text{当 }\frac{2E_0E_1}{h\nu}\ll\frac{mc^2}{\alpha Z^{1/3}}\right);\\ \sigma(h\nu)&=4\alpha Z^2r_0^2\left[\frac{7}{9}\ln\left(\frac{191}{Z^{1/3}}\right)-\frac{1}{54}\right]\quad\left(\text{当 }\frac{2E_0E_1}{h\nu}\gg\frac{mc^2}{\alpha Z^{1/3}}\right),\end{aligned}\right\}\tag{4-356}$$

式中 $4\alpha r_0^2=$*2.3178646×10^{-27} 厘米^2。当电子速度 v 小到 $Ze^2/(h\nu)\gg 1$ 时，在(4-356)式方括号内必须减去一个库仑改正因子 $C(Z)\approx(\alpha Z)^2$。在很稠密的介质中 (Landau 和 Pomeranchuk, 1953; Migdal, 1956)以及在晶体介质中(Überall, 1956, 1957)，对于很高的能量，截面也是受抑制的。对完全电离气体，可以用(4-355)式。

4.5.1.2. 带电粒子形成的电子-正电子偶

一个快速带电粒子的电场有一个伴生的“虚”光子，后者又可能形成电子-正电子偶。当

一个质量为 M_0、荷电为 eZ_0 及动能为 E_0 的带电重粒子与一个质量为 M 及荷电为 eZ 的重粒子碰撞时，形成任何能量的电子-正电子偶的总截面 σ 由下式给出(Heitler 和 Nordheim, 1934)：

$$\sigma \approx \frac{(\alpha Z Z_0 r_0 mc^2)^2}{M_0 c^2 E_0}\left[\frac{ZM_0 - Z_0 M}{M}\right]^2 \quad (\text{当 } 2mc^2 < E_0 \ll M_0 c^2), \tag{4-357}$$

式中精细结构常数 $\alpha = {}^*1/137.03604$，经典电子半径 $r_0 = e^2/(mc^2) = {}^*2.8179380\times10^{-13}$ 厘米，mc^2 是电子的静质量能。

当入射粒子的能量 E_0 大于 M_0c^2 而其他粒子是处于静止状态时，总截面由下式给出(Bhabha, 1935)：

$$\sigma \approx \frac{28}{27\pi}(\alpha Z Z_0 r_0)^2 \ln^3\left(\frac{E}{M_0 c^2}\right) \quad (\text{当 } E_0 \gg M_0 c^2)。 \tag{4-358}$$

若静止粒子是一个原子，在完全屏蔽情况 $E_0 \gg M_0c^2/(\alpha Z^{1/3})$，总截面为(Nishina, Tomonaga 和 Kobayasi, 1935; Heitler, 1954)：

$$\sigma = \frac{28}{27\pi}(\alpha Z Z_0 r_0)^2 \ln\left(\frac{1}{\alpha Z^{1/3}}\right)\left[3\ln\left(\frac{E_0}{M_0 c^2}\right)\ln\left(\frac{E_0 Z^{1/3}}{191 M_0 c^2}\right) + \ln^2\left(\frac{191}{Z^{1/3}}\right)\right]$$
$$(\text{当 } E_0 > M_0 c^2/\alpha Z^{1/3}), \tag{4-359}$$

可以认为 (4-358) 式及 (4-359) 式精确到因子 2 以内。室田等(Murota, Ueda 和 Tanaka, 1956; 以及 Hayakawa, 1969)给出了精确到 20% 的更复杂的表达式。当入射粒子是一个电子的情况，取 $Z_0=1$ 及 $M_0=m$(即电子质量)，(4-358)式及(4-359)式还是有效的。

4.5.1.3. 两个光子碰撞形成的电子-正电子偶

一个能量为 E_1 的光子与一个能量为 E_2 的光子碰撞，只要 $E_1E_2 > (mc^2)^2$，就可能产生一对电子-正电子偶，这里 $mc^2 = {}^*0.5110034$ 兆电子伏是电子的静质量能。电子偶形成截面 $\sigma(E_1, E_2)$ 由下式给出(Dirac, 1930; Heitler, 1954)：

$$\sigma(E_1, E_2) = \frac{\pi r_0^2}{2}(1-\beta^2)\left[2\beta(\beta^2-2) + (3-\beta^4)\ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)\right], \tag{4-360}$$

式中

$$\beta = \left[1 - \frac{(mc^2)^2}{E_1 E_2}\right]^{1/2},$$

βc 是出射电子在质心系中的速度，经典电子半径 $r_0 = e^2/(mc^2) = {}^*2.8179380\times10^{-13}$ 厘米。尼基晓夫等(Nikishov, 1962; Goldreich 和 Morrison, 1964; Gould 和 Schréder, 1966; 以及 Jelley, 1966)给出了(4-360)式对 γ 射线的应用。

4.5.1.4. 在原子核场中由 γ 射线形成的 μ 子偶

当一个能量 $h\nu$ 大于阈能 $2m_\mu c^2 = {}^*211.31895$ 兆电子伏的光子 γ 通过一个原子核的库仑场时，可能形成一对 μ^- 子偶：μ^+ 及 μ^-。μ 子偶形成的截面可以由电子-正电子偶形成截面(4-356)式给出，只要把 m_e 用 m_μ 代替，并且考虑到在 μ 子偶产生期间将有大的动量转移到原子核而应略作修改即可。取比值 $(m/m_\mu)^2 = {}^*(1/206.76865)^2$ 所归算的截面较(4-356)式给出的低。拉维谢尔(Rawitscher, 1956)给出了 μ 子偶形成截面的详尽计算。电子-正电子偶将由 μ 子偶的衰变形成，其衰变方式及寿命在表 39 中列出。

4.5.1.5. 带电粒子碰撞形成的反冲(撞出)电子

一个总能量为 E_0 的带电粒子与另一个荷电为 eZ 的带电粒子碰撞产生动能为 W_r 的反

冲电子的截面 $\sigma(E_0, W_r)$ 由下式给出(Bhabha, 1936; Hayakawa, 1969):

$$\sigma(E_0, W_r)dW_r = 2\pi Z^2 r_0^2 \frac{mc^2}{\beta_0^2}\frac{dW_r}{W_r^2}\times\begin{cases}\left(1-\beta_0^2\frac{W_r}{W_m}\right) & (\text{当自旋为 } 0)\\ \left[1-\beta_0^2\frac{W_r}{W_m}+\frac{1}{2}\left(\frac{W_r}{E_0}\right)^2\right] & \left(\text{当自旋为 } \frac{1}{2}\right)\\ \left[\left(1-\beta_0^2\frac{W_r}{W_m}\right)\left(1+\frac{1}{3}\frac{mW_r}{M^2}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{W_r}{E_0}\right)^2 \right.\\ \quad \left.\times\left(1+\frac{1}{2}\frac{mW_r}{M^2}\right)\right] & (\text{当自旋为 } 1)\end{cases}$$

$$\approx 2\pi r_0^2\frac{mc^2Z^2}{\beta_0^2W_r^2}dW_r, \tag{4-361}$$

式中自旋是入射粒子的自旋,经典电子半径 $r_0=e^2/(mc^2)=^*2.8179380\times10^{-13}$ 厘米, $c\beta_0$ 是入射粒子的速度, m 是电子质量, M 是入射粒子的质量,在一次直接碰撞中能够转移到自由电子的最大能量 W_m 由下式给出:

$$\begin{aligned}W_m &= \frac{2mp^2}{m^2+M^2+2mE_0}\approx p \quad \left(\text{当 } m\ll M \text{ 及 } E_0\gg\frac{M^2}{m}\right)\\ &\approx 2m\beta_0^2\gamma^2 = 2m\left(\frac{p}{M}\right)^2 \quad \left(\text{当 } m\ll M \text{ 及 } p\ll\frac{M^2}{m}\right),\end{aligned} \tag{4-362}$$

式中 p 及 E_0 分别是入射粒子的动量及总能量。

对于总能量为 E_p 及速度为 $c\beta_p$ 的相对论性质子的特殊情况,(4-361)式变为:

$$\sigma(E_p, W_r)dW_r = 2\pi r_0^2\frac{mc^2}{\beta_p^2W_r^2}\left[1-\frac{m^2c^2W_r}{2mE_p^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{W_r}{E_p}\right)^2\right]dW_r。 \tag{4-363}$$

4.5.1.6. 正电子湮没形成的光子

按照反应 $e^-+e^+\to\gamma+\gamma$, 一个正电子 e^+ 可以与一个电子 e^- 碰撞以产生两个 γ 射线光子。若电子处于静止状态,则一个光子将具有高能量,而另一个光子将具有量级为 $mc^2=^*0.5110034$ 兆电子伏的能量。若正电子的能量为 γmc^2, 其中 γ 是一个表示能量的因子,则其与一个静止的自由电子发生两光子湮没的截面 σ 由下式给出(Dirac, 1930):

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{\pi r_0^2}{\gamma+1}\left[\frac{\gamma^2+4\gamma+1}{\gamma^2-1}\ln\left(\gamma+\sqrt{\gamma^2-1}\right)-\frac{\gamma+3}{\sqrt{\gamma^2-1}}\right]\\ &\approx\frac{\pi r_0^2}{\gamma}[\ln(2\gamma)-1] \quad (\text{当 } \gamma\gg1)\\ &\approx\frac{\pi r_0^2}{\beta} \quad (\text{当 } \beta\ll1),\end{aligned} \tag{4-364}$$

式中经典电子半径 $r_0=e^2/(mc^2)=^*2.8179380\times10^{-13}$ 厘米,而 $\beta=v/c$, 其中 v 是正电子的速度。

当正电子与束缚在原子中的一个电子碰撞时也会发生只发射一个光子的湮没过程。当一个正电子与处于原子 K 壳层的电子碰撞时,单光子湮没的截面由下式给出(Fermi 和 Uhlenbeck, 1933; Bethe 和 Wills, 1935):

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{4\pi Z^5\alpha^4r_0^2}{\beta\gamma(\gamma+1)^2}\left[\gamma^2+\frac{2\gamma}{3}+\frac{4}{3}-\frac{\gamma+2}{\beta\gamma}\ln[(1+\beta)\gamma]\right]\\ &\approx\frac{4\pi Z^5\alpha^4r_0^2}{\gamma} \quad (\text{当 } \gamma\gg1)\\ &\approx\frac{4\pi}{3}Z^5\alpha^4r_0^2\beta \quad (\text{当 } \beta\ll1),\end{aligned} \tag{4-365}$$

这里 γmc^2 是正电子的能量，速度 $v=\beta c$，eZ 是原子荷电，精细结构常数 $\alpha=e^2/(\hbar c)=$ *1/137.03604，经典电子半径 $r_0=e^2/(mc^2)=$ *2.8179380×10^{-13} 厘米。

4.5.1.7. 原子核相互作用形成的 π 介子、μ 子、正电子、电子、光子及中微子

形成 π 介子的重要反应为：

$$\left.\begin{array}{l} p+p\to p+p+n_1(\pi^++\pi^-)+n_2\pi^0; \\ p+p\to p+n+\pi^++n_3(\pi^++\pi^-)+n_4\pi^0; \\ p+p\to n+n+2\pi^++n_5(\pi^++\pi^-)+n_6\pi^0; \\ p+p\to \mathrm{D}+\pi^++n_7(\pi^++\pi^-)+n_8\pi^0, \end{array}\right\} \quad (4\text{–}366)$$

其中 p 表示质子，n 是中子，D 是氘核，$n_1\sim n_8$ 是正整数。π 介子一经形成，通过下列衰变反应也会产生 μ 子、电子、正电子、光子及中微子：

$$\left.\begin{array}{l} \pi^\pm\to\mu^\pm+\nu_\mu/\bar{\nu}_\mu; \\ \pi^0\to\gamma+\gamma; \\ \mu^\pm\to e^\pm+\nu_e/\bar{\nu}_e+\bar{\nu}_\mu/\nu_\mu。 \end{array}\right\} \quad (4\text{–}367)$$

在从 290 兆电子伏至 1 京电子伏的质子能量区，只有 $p+p\to p+n+\pi^+$ 或 $p+p+\pi_0$ 或 D $+\pi^+$ 这些反应是重要的。在关于太阳 γ 射线的第 4.5.1.2 节[1]中给出其他的 π 介子反应。

当一个原子核质子产生总数为 Y 个 π 介子时，最小的动能 $W_{\min}$ 由下式给出：

$$W_{\min}=\frac{Y^2m_\pi^2c^4}{2m_pc^2}+2Ym_\pi c^2\approx Y(280+10Y)\text{ 兆电子伏}, \quad (4\text{–}368)$$

式中 $m_\pi c^2$ 及 m_pc^2 分别是 π 介子及质子的静质量能。

实验测定(Pollack 和 Fazio, 1963; Ramaty 和 Lingenfelter, 1966)表明，由能量为 E_p 的质子所产生的 π 介子的截面 $\sigma(E_p)$ 为：

$$\sigma(E_p)\approx2.7\times10^{-26}\text{ 厘米}^2 \quad (\text{当 } E_p>2\text{ 京电子伏}), \quad (4\text{–}369)$$

这里取多重性因子

$$\left.\begin{array}{l} m_\pm=2E_p^{0.25}, \\ m_0=0.5m_\pm。 \end{array}\right\}$$

4.5.1.8. 逆康普顿效应所致高能光子的发射

当具有动能 $E=\gamma mc^2$ 的自由电子与能量为 $h\nu$ 的一个光子碰撞时，康普顿散射截面 σ_c 由下式给出(Klein 和 Nishina, 1929)：

$$\begin{aligned} \sigma_c&=\frac{3}{4}\sigma_T\left\{\frac{1+q}{q^3}\left[\frac{2q(1+q)}{1+2q}-\ln(1+2q)\right]+\frac{1}{2q}\ln(1+2q)-\frac{1+3q}{(1+2q)^2}\right\} \\ &\approx\sigma_T\left(1-\frac{2\gamma h\nu}{mc^2}\right) \quad (\text{当 } \gamma h\nu\ll mc^2 \text{ 或 } q\ll1) \\ &\approx\frac{3}{8}\sigma_T\frac{mc^2}{\gamma h\nu}\left[\frac{1}{2}+\ln\left(\frac{2\gamma h\nu}{mc^2}\right)\right] \quad (\text{当 } \gamma h\nu\gg mc^2 \text{ 或 } q\gg1), \end{aligned} \quad (4\text{–}370)$$

式中 $q=\gamma h\nu/(mc^2)$，经典电子半径 $r_0=e^2/(mc^2)=$ *2.8179380×10^{-13} 厘米，汤姆孙(Thomson, 1906)散射截面 $\sigma_T=8\pi e^4/(3m^2c^4)=$ *6.652448×10^{-25} 厘米²。戴维森等(Davisson 和 Evans, 1952; 以及 Nelms, 1953)给出了康普顿散射截面表及曲线图。

1) 原文误为第 4.4.1.12 节。——译者注

发射出的光子的频率 ν_0 由下式给出:

$$\begin{aligned}&\nu_0\approx\gamma^2\nu \quad (当\ \gamma h\nu\ll mc^2),\\ &\nu_0\approx\gamma mc^2/h \quad (当\ \gamma h\nu\gg mc^2)。\end{aligned} \tag{4-371}$$

费恩伯格等 (Feenberg 和 Primarkoff, 1948; Donahue, 1951; 以及 Felten 和 Morrison, 1963, 1966) 已详细讨论了这种过程。当相对论性电子产生同步加速辐射并且接着经受康普顿散射时, 则由康普顿-同步加速辐射所产生的光子能量几乎高到同电子能量一样, 而且其能谱与同步加速辐射谱相同(Gould, 1965)。在第 4.5.2.3 节中详述这种过程。

4.5.1.9. 相对论性电子或 μ 子的韧致辐射所致高能光子发射

当能量为 E 的一个相对论性电子与荷电为 eZ 的一个原子核碰撞时, 韧致辐射一个能量为 E_γ 的光子的微分截面 $\sigma_B(E, E_\gamma)dE_\gamma$ 由下式给出:

$$\sigma_B(E, E_\gamma)dE_\gamma\approx\frac{4\alpha r_0^2Z^2}{E_\gamma}\ln\left(\frac{2E}{mc^2}\right)dE_\gamma \quad \left(当\ mc^2\ll E\ll\frac{mc^2}{\alpha Z^{1/3}}\right), \tag{4-372}$$

该式适用于相对论性及无屏蔽情况。这里精细结构常数 $\alpha=e^2/(\hbar c)=^*1/137.03604$, 经典电子半径 $r_0=e^2/(mc^2)=^*2.8179380\times10^{-13}$ 厘米, 电子的静质量能 $mc^2=^*0.5110034$ 兆电子伏。在极端相对论性但是完全屏蔽的情况, 我们得到:

$$\sigma_B(E, E_\gamma)dE_\gamma\approx\frac{M}{XE_\gamma}dE_\gamma \quad \left(当\ E\gg\frac{mc^2}{\alpha Z^{1/3}}\right), \tag{4-373}$$

式中 M 是靶原子核的质量(单位是克), 辐射长度 X(单位是克·厘米$^{-2}$)由下式给出:

$$\frac{1}{X}=4\alpha r_0^2Z^2N_AA^{-1}\ln(191Z^{-1/3}), \tag{4-374}$$

式中阿伏伽德罗数 $N_A=^*6.022045\times10^{23}$ 摩尔$^{-1}$, A 为质量数。以克·厘米$^{-2}$ 为单位的辐射长度的值为(Nishimura, 1967):

$$\left.\begin{matrix}X_{\rm H}=62.8 & X_{\rm He}=93.1 & X_{\rm Li}=83.3\\ X_{\rm C}=43.3 & X_{\rm N}=38.6 & X_{\rm O}=34.6\\ X_{\rm Al}=24.3 & X_{\rm Si}=22.2 & X_{\rm Fe}=13.9\end{matrix}\right\} \tag{4-375}$$

其中下标表示所考虑的元素。电子-原子韧致辐射的截面由(4-372)式及(4-273)式给出, 只要以 $Z(Z+1)$ 代替其中的 Z^2 即可。

当要求精度高于百分之几时, 韧致辐射截面可按下式计算(Rossi, 1952):

$$\sigma_B(E, E_\gamma)dE_\gamma=\frac{4\alpha r_0^2Z^2}{E_\gamma}F(E, E_\gamma)dE_\gamma, \tag{4-376}$$

式中函数 $F(E, E_\gamma)$ 是相对论性电子能量 E 及光子能量 E_γ 的缓变函数。$F(E, E_\gamma)$ 的极值为: 对裸核($\xi\gg1$)情况

$$F(E, E_\gamma)=\left\{1+\left(1-\frac{E_\gamma}{E}\right)^2-\frac{2}{3}\left(1-\frac{E_\gamma}{E}\right)\right\}\left\{\ln\left[\frac{2E}{mc^2}\frac{(E-E_\gamma)}{E_\gamma}\right]-\frac{1}{2}\right\}; \tag{4-377}$$

对完全屏蔽($\xi=0$)情况

$$F(E, E_\gamma)=\left[1+\left(1-\frac{E_\gamma}{E}\right)^2-\frac{2}{3}\left(1-\frac{E_\gamma}{E}\right)\right]\ln\left(\frac{191}{Z^{1/3}}\right)+\frac{1}{9}\left(1-\frac{E_\gamma}{E}\right), \tag{4-378}$$

这里屏蔽参量 ξ 由下式给出:

$$\xi=\frac{mc^2}{\alpha E}\frac{E_\gamma}{E-E_\gamma}Z^{-1/3},$$

其中精细结构常数 $\alpha=e^2/(\hbar c)={}^*1/137.03604$，电子的静质量能为 $mc^2={}^*0.5110034$ 兆电子伏。

对质量为 m_μ 的 μ 子与一个裸原子核碰撞的轫致辐射截面由下式给出：

$$\sigma_B(E,\ E_\gamma)dE_\gamma=\frac{4\alpha r_0^2Z^2}{E_\gamma}\left(\frac{m}{m_\mu}\right)^2\left\{1+\left(1-\frac{E_\gamma}{E}\right)^2-\frac{2}{3}\left(1-\frac{E_\gamma}{E}\right)\right\}$$
$$\times\left\{\ln\left[\frac{2E}{m_\mu c^2}\ \frac{\hbar}{m_\mu Rc}\left(\frac{E-E_\gamma}{E_\gamma}\right)\right]-\frac{1}{2}\right\}dE_\gamma, \qquad (4\text{-}379)$$

式中 m 是电子质量，原子核半径 $R\approx1.2\times10^{-13}A^{1/3}$ 厘米，其中 A 是质量数。

4.5.1.10. 相对论性电子的同步加速辐射（磁轫致辐射）所致光子发射

当能量为 $E=\gamma mc^2$ 的一个相对论性电子穿过具有强度为 H 的均匀磁场区域时，由同步加速辐射机制，电子将发射高能光子，这已在第 1.25 节中详细讨论过。这里我们指出，虽然发射出的光子频谱是连续的，在大多数情况，可以假定发射出的光子具有下述频率：

$$\nu=\frac{3\gamma^2}{4\pi}\ \frac{eH}{mc}\approx4.6\times10^{-6}HE^2\ \text{赫}, \qquad (4\text{-}380)$$

式中 E 的单位是电子伏，H 的单位是高斯。

4.5.1.11. 核反应的光子发射

按照下列反应一个原子核 $(Z,\ A)$ 能够发射一个光子：

$$\left.\begin{aligned}&(Z,\ A)+n\rightarrow(Z,\ A+1)+\gamma;\\&(Z,\ A)+p\rightarrow(Z+1,\ A)+\gamma;\\&(Z,\ A)+\alpha\rightarrow(Z+2,\ A+4)+\gamma;\\&(Z,\ A)^*\rightarrow(Z,\ A)+\gamma。\end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}381)$$

第 4.5.1.12[1] 节讨论有关太阳 γ 射线的原子核与质子及中子碰撞形成 γ 射线的细节。

4.5.1.12. 太阳 X 射线及 γ 射线辐射

根据来自太阳耀斑的硬 X 射线的第一次汽球上的观测 (Peterson 和 Winkler, 1959)，可以把太阳 X 射线耀斑的连续辐射按照发射的能量分成两类。在能量低于 10^4 电子伏时（即软 X 射线），认为发射是来自温度为 $T\approx10^6$ 至 10^8 开的麦克斯韦分布电子的热轫致辐射。当能量在 10^4 与几十万电子伏之间时（即硬 X 射线）；时间轮廓常常与微波频段（8000 至 17000 兆赫）上观测到的是一致的；而且认为硬 X 射线及微波两者都是由于加速电子的非热辐射所致。微波辐射是部分圆偏振的，所以被认为是由中等相对论性电子的回旋加速辐射所产生的。硬 X 射线则认为是在日冕等离子体中加速电子的碰撞轫致辐射所产生的，各模型因电子注入等离子体的不同情况而异。在薄靶模型（即 de Jager 和 Kundu, 1963 给出的模型）中，电子是连续加速的并且射入稠密的色球层而立即损失电子的全部能量。在高仓达雄等(Takakura 和 Kai, 1966)给出的厚靶模型中，电子是脉冲地注入在色球高层的双极磁黑子之间的磁瓶中；而观测到的爆发的衰变可认为是由于俘获的非热电子缓慢的碰撞能量损耗。

在第 1.30 节中已详尽讨论了解释软 X 射线辐射的热轫致辐射理论。光子能量 $h\nu$ 由下式给出：

1) 原文误为第 4.4.1.12 节。——译者注

$$h\nu \approx kT = {}^*8.61735\times10^{-8}T \text{ 千电子伏}, \tag{4-382}$$

式中 ν 是辐射频率，T 是等离子体的温度，单位是开。在地球的距离处，日冕的单位体积的自由-自由通量 η_{FF} 由下式给出(参看(1-219)式)：

$$\eta_{FF}=7.15\times10^{-50}N_e\sum_Z N_Z Z^2\left[\exp\left(-\frac{143.89}{\lambda T}\right)\right]$$

$$\times\frac{\langle g(Z,\ T,\ c/\lambda)\rangle}{T^{1/2}\lambda^2}\,d\lambda \text{ 尔格·厘米}^{-2}\text{·秒}^{-1}\text{·埃}^{-1}, \tag{4-383}$$

这里 N_e 是自由电子密度，N_Z 是荷电为 Z 的离子的数密度，光子波长 $\lambda=c/(2\pi\nu)$，假定以埃(1 埃 $=10^{-8}$ 厘米)为单位，电子温度 T 的单位是 10^6 开，对温度平均的自由-自由冈特因子 $\langle g(Z,\ T,\ c/\lambda)\rangle\approx1$。用不同的单位，在地球距离处自由-自由 X 射线通量由下式给出：

$$F_{FF}(h\nu)=\frac{4.78\times10^{-39}}{T^{1/2}}\,\frac{\exp[-h\nu/(kT)]}{h\nu}\left[\int_v N_eN_i dv\right]\langle g(T,\ \nu)\rangle$$

$$\text{个光子·厘米}^{-2}\text{·秒}^{-1}\text{·千电子伏}^{-1}, \tag{4-384}$$

式中 $h\nu$ 是光子能量，发射量 $\int N_eN_i dv$ 是自由电子与离子密度乘积的体积分。在第 1.31 节中给出了自由-自由冈特因子以及自由-束缚辐射公式，而热发射率的数值计算则在本节列出的参考文献中给出。对波长 1～30 埃、温度 0.8×10^6～10^8 开，卡尔汉(Culhane, 1969)计算得出了自由-自由及自由-束缚发射率。温度 T 是根据软 X 射线谱的数据算出的，而发射量是由给定波长上观测到的通量求出的。典型值是 $T\approx10^7$ 开及 $N_eN_iV\approx7\times10^{47}$ 厘米$^{-3}$。

微波爆发辐射据认为是一种动能为 $E\approx mc^2$、绕强度为 H 的磁场旋转的中等相对论性电子的回旋加速辐射。辐射通量在约两倍于下式给出的回旋频率 ν_H 处为最大：

$$\nu_H=\frac{eH}{2\pi mc\gamma}\sin\psi\approx{}^*2.799224\times10^6H\sin\psi \text{ 赫}, \tag{4-385}$$

式中对速度为 v 及动能为 $E\approx mc^2$ 的电子来说，$\gamma=E/mc^2=[1-(v/c)^2]^{-1/2}\approx1$，$\psi$ 是磁场方向与电子运动方向之间的螺距角。在第 1.25 节中给出回旋加速辐射的详尽公式，高仓达雄等(Takakura, 1967; Ramaty, 1969; 以及 Ramaty 和 Petrosian, 1972)给出了这些公式在太阳耀斑问题上的应用。作为一级近似，从动能为 $E=\gamma mc^2$ 的一个电子发出的总回旋加速辐射 P 由下式给出：

$$P=\frac{8\pi^2}{3}\,\frac{e^2}{c}\,\nu_H^2\langle\sin^2\psi\rangle[\gamma^2+2\gamma]。 \tag{4-386}$$

由于回旋加速辐射以及与热发射电子的碰撞引起的电子动能的变化由下式给出(Takakyra, 1967)：

$$\frac{d\gamma}{dt}=\frac{1}{mc^2}\,\frac{dE}{dt}=-3.8\times10^{-9}H^2\langle\sin^2\psi\rangle\left[\frac{\gamma^2}{2}+\gamma\right]+1.5\times10^{-16}N_e\gamma^{-3/2}, \tag{4-387}$$

式中 H 是以高斯为单位的磁场强度，N_e 是以厘米$^{-3}$ 为单位的电子数密度。

硬 X 射线发射可认为是由于非相对论性电子发出的韧致辐射，布朗(Brown, 1971)已算出电子-质子韧致辐射截面，这是适用于厚靶情况的。对能谱指数为 γ 的 X 射线能谱，我们得到的 X 射线能量通量谱由下式给出：

$$I(h\nu)=A(h\nu)^{-\gamma} \text{ 个光子·厘米}^{-2}\text{·秒}^{-1}\text{·千电子伏}^{-1}, \tag{4-388}$$

式中 A 是随时间变化的常数。注入电子的能谱也是一种幂律谱，谱指数为 $\alpha=\gamma+1$。在 20 至 100 千电子伏的 X 射线能量范围内，在 X 射线发射区中出现的瞬态非热电子能谱 $N(E)$ 及瞬态非热电子通量谱 $F(E)\propto E^{-(\gamma+1)}$ 由下式给出(Brown, 1971)：

$$N(E)=3.61\times10^{41}\gamma(\gamma-1)^3\beta(\gamma-1/2,\ 3/2)\frac{E_c^{\gamma-1}E^{-(\gamma-1/2)}}{N_e}I(E_c)\ \text{个电子·千电子伏}^{-1} \tag{4-389}$$

以及

$$F(E)=2.68\times10^{33}\gamma^2(\gamma-1)^3\beta(\gamma-1/2,\ 3/2)\cdot E_c^{\gamma-1}E^{-(\gamma+1)}I(E_c)\ \text{个电子·千电子伏}^{-1}\text{·秒}^{-1}, \tag{4-390}$$

式中 β 函数 $\beta(p,\ q)$ 由下式给出：

$$\beta(p,\ q)=\int_0^1 u^{p-1}(1-u)^{q-1}du, \tag{4-391}$$

$N_e\approx N_p$ 是在发射体积内以厘米$^{-3}$为单位的电子密度或质子密度的平均值，E_c 是电子能谱的下限截止能量，单位是千电子伏，E 是电子的动能，单位是千电子伏，$I(E_c)$ 是能量 $E\gtrsim E_c$ 的 X 射线光子通量，单位是个光子·厘米$^{-2}$·秒$^{-1}$。

在厚靶、脉冲注入情况，在 X 射线发射区的电子能谱 $N(E)$ 是重要的。虽然 $N(E)\propto E^{-(\gamma-1/2)}$，在这种厚靶情况中，注入电子的能谱却以 $E^{-(\gamma+1)}$ 形式出现。以能量 $E\geqslant E_c$ 的电子动能形式输入的功率由下式给出：

$$P_{\text{厚}}(E_c,\ \gamma)=4.29\times10^{24}A\gamma^2(\gamma-1)\beta(\gamma-1/2,\ 3/2)E_c^{-(\gamma-1)}\ \text{尔格·秒}^{-1}, \tag{4-392}$$

式中 A 是(4-388)式中的常数，林氏等(Lin 和 Hudson, 1971)讨论了在地球上检测到的非热 X 射线与电子之间的关系。布朗(Brown, 1972)给出了厚靶轫致辐射的方向性及偏振的详情，布朗(Brown, 1973)还给出了从部分电离厚靶来的发射。赫德森(Hudson, 1972)则把厚靶过程及白光耀斑联系起来了。

若电子能量损耗是由于电子密度为 N_e 的等离子体中的碰撞所造成的，则电子能量损耗由下式给出：

$$\frac{d\gamma}{dt}\approx-\frac{\gamma}{\tau_c}, \tag{4-393}$$

式中 $\gamma=E/(mc^2)$，而 τ_c 是由于与热粒子进行库仑碰撞而引起的偏转时间，并由下式给出(Trubnikov, 1965)：

$$\tau_c\approx6.3\times10^{-20}v^3N_e\ \text{秒}^{-1}, \tag{4-394}$$

这里 v 是电子速度。高仓达雄 (Takakura, 1969) 给出：当 $0.2<\gamma<0.4$ 或 100 千电子伏 $<E<2$ 兆电子伏时，

$$\frac{d\gamma}{dt}\approx-10^{-12}N_e^{-1}\ \text{秒}, \tag{4-395}$$

当 $\gamma<0.2$ 或 $E<100$ 千电子伏时，

$$\frac{d\gamma}{dt}\approx-\frac{1.2\times10^{-12}}{2^{3/2}}N_e\gamma^{-1/2}\ \text{秒}^{-1},$$

或

$$\frac{dE}{dt}\approx-4.9\times10^{-9}N_eE^{-1/2}\ \text{千电子伏·秒}^{-1}\text{。} \tag{4-396}$$

布朗等(Brown, 1972; 以及 Takakura, 1969)讨论了在这种情况下微波爆发及硬 X 射线爆发的衰变。

在薄靶情况，电子是连续地受到加速，无论加速度或是注入能谱，X 射线能谱是近乎不变的。对于由(4-388)式给出的在地球上检测到的 X 射线幂律能谱，瞬时非热电子能谱由下式给出：

表 49 可能观测到的 γ 射线源及能量[1]

能 量 (兆电子伏)	源	截面(135°) (毫靶/球面度)	源的半寿命[2]
0.060	^{241}Am, r 过程		458 年
0.18	^{251}Cf, r 过程		800 年
0.34	^{249}Cf, r 过程		360 年
0.39	^{349}Cf, r 过程		360 年
0.472	核合成(^{56}Ni)及宇宙背景		6.1 日
0.478	宇宙线^{7}Li		
0.511	电子偶湮没		48 年、77 日[2]
0.61	^{214}Bi(^{226}Ra) r 过程		1.602 年
0.748	核合成(^{56}Ni)及宇宙背景		6.1 日
0.812	核合成(^{56}Ni)及宇宙背景		6.1 日
0.847	核合成(^{56}Co)、宇宙背景及宇宙线		77 日
0.857		12±5	
0.870	^{56}Fe 0.857 兆电子伏的原子核去激发是一种宇宙线	44±14	
0.875		30±15	
0.983	核合成(^{48}V)		16 日
1.03	核合成(^{56}Co), 宇宙背景及宇宙线		77 日
1.156	核合成(^{44}Sc)		48 年
1.173	核合成(^{60}Co)		3×10^{5} 年
1.24	核合成(^{56}Co), 宇宙背景及宇宙线		77 日
1.24		131±53	
1.28	^{56}Fe 1.24 兆电子伏的原子核去激发是一种宇宙线	25±14	
1.34		61±18	
1.312	核合成(^{48}V)		16 日
1.33	核合成(^{60}Co)		3×10^{5} 年
1.37	^{28}Si核的去激发		
1.393	^{24}Mg 1.39 兆电子伏的原子核去激发是一种宇宙线	18±9	
1.56	核合成(^{56}Ni)及宇宙背景		61 日
1.63	^{20}Ne 核的去激发		
1.675	^{24}Mg 核的去激发	16±9	
1.76	核合成(^{56}Co), 宇宙背景及宇宙线		77 日
1.78	^{28}Si 核的去激发		
1.98		1.8±0.9	
1.99	^{12}C 核的去激发	0.5±0.13	
2.00		2.3±2.0	
2.03		<1.0	
2.02	核合成(^{56}Co), 宇宙背景及宇宙线		77 日
2.23	氘核的去激发		
2.19		<1.0	
2.23	^{16}O 核的去激发	1.0±0.4	
2.35		0.26±0.10	
2.24	^{32}S 核的去激发		
2.31	^{14}N 核的去激发		
2.60		0.9±0.3	
2.66	^{16}O 核的去激发	0.6±0.3	
2.73		2.0±0.6	
2.80	^{12}C 核的去激发	0.8±0.4	

（续表）

能量（兆电子伏）	源	截面(135°)（毫靶/球面度）	源的半寿命
3.26	核合成(^{56}Co)，宇宙背景及宇宙线		77日
3.32	^{24}Mg 核的去激发	<1.0	
3.625	^{16}O 核的去激发	0.8±0.5	
3.72		0.22±0.10	
3.78		0.8±0.5	
3.82	^{12}C 核的去激发	2.3±0.4	
3.95	^{14}N 核的去激发		
4.27	^{16}O 核的去激发	4.0±0.4	
4.34		8.7±0.7	
4.37		9.0±0.7	
4.43		1.26±0.46	
4.34	^{12}C 核及 ^{13}C 核的去激发，宇宙线	49±4	
4.36		12.7±0.6	
4.37		8.2±0.5	
4.38		3.5±0.3	
4.47		0.89±0.23	
5.09	^{16}O 核的去激发	4.1±0.5	
5.19		5.8±0.5	
5.25		6.9±0.6	
5.26		0.96±0.39	
5.25	^{12}C 核的去激发	1.9±0.3	
6.01	^{16}O 核的去激发，宇宙线	6.8±0.5	
6.09		9.9±0.8	
6.21		4.7±0.5	
6.22		10.5±1.2	
6.29		4.4±1.6	
6.52	^{12}C 核的去激发	2.6±0.2	
6.60		0.9±0.1	
6.65		1.8±0.3	
6.75		0.24±0.09	
6.80	^{16}O 核从 7.12 兆电子伏的跃迁去激发 7.12 兆电子伏是一种宇宙线	2.2±0.2	
6.95		3.7±0.3	
6.98		2.5±0.3	
7.08		4.6±0.6	
7.10		0.98±0.35	
8.87	^{16}O 核的去激发		
12.7	^{12}C 核的去激发		

[1] 本表是根据下列参考文献编制的：r 过程源 (Clayton 和 Craddock, 1965)，核合成源 (Clayton, Colgate 和 Fishman, 1969; 以及 Clayton, 1971)，0.511 兆电子伏的宇宙线源(Ramaty, Stecker 和 Misra, 1970)，宇宙背景及宇宙线源(Clayton 和 Silk, 1969; 以及 Fishman 和 Clayton, 1972)，宇宙线源(Fowler, Reeves 和 Silk, 1970)。林根费尔特等(Lingenfelter 和 Ramaty, 1967; Lingenfelter, 1969; Chupp, 1971) 讨论过检测太阳中激发原子核发出的谱线的可能性。丘普等(Chupp 等, 1973)已报告发现太阳耀斑发射的 0.511 兆电子伏的电子偶湮没、2.20 兆电子伏的氘、4.43 兆电子伏的碳以及 6.14 兆电子伏的氧谱线。核的去激发的 γ 射线能量及截面主要取自左贝尔等 (Zobel, Maienschein, Fodd 以及 Chapman, 1967) 的文献。

[2] 核合成(^{44}Sc 及 ^{56}Co)的正电子寿命分别为 48 年及 77 日。

$$N(E)=1.05\times10^{42}\frac{(\gamma-1)}{N_eV}AE^{-(\gamma-1/2)}\ \text{个电子·厘米}^{-3}\cdot\text{千电子伏}^{-1},\qquad(4\text{–}397)$$

式中 N_e 是自由电子密度，V 是等离子体的体积。总碰撞能量转移 P 是由在 (4–397) 式给出的能谱范围内对(4–396)式从 E_c 到无穷大的积分而得出的：

$$P_{碰}=8.19\times10^{24}AE_c^{-(\gamma-1)}\ \text{尔格·秒}^{-1}。\qquad(4\text{–}398)$$

可见，它就是瞬态通量谱 $F(E)$，它在确定 X 射线发射时是重要的，X 射线发射是与“发射”区的情况无关的。这里 A 是(4–388)式中的常数。

在地球上对来自太阳耀斑的高能质子的检测导致认为：次级粒子及 γ 射线可能是由太阳大气中的质子与核的相互作用产生的。林根费尔特等 (Lingenfelter 和 Ramaty, 1967; 以及 Lingenfelter, 1969) 给出了所期望的粒子及 γ 射线产额的详尽计算，丘普 (Chupp, 1971)概述了这方面的工作。丘普 (Chupp, 1973) 接着报导了 0.511 兆电子伏、2.20 兆电子伏、4.43 兆电子伏及 6.14 兆电子伏的 γ 射线谱线的检测情况。最重要的原子核是那些最丰富的原子核：H^1、He^4、C^{12}、N^{12} 及 O^{16}，它们在太阳中的相对丰度是 H:He:C:N:O$=1:10^{-1}:5.3\times10^{-4}:10^{-4}:9.2\times10^{-4}$。质子与这些原子核相互作用产生的最重要的次级粒子是：中子(中子接着与氢相互作用以产生 2.20 兆电子伏的谱线)、C^{12}、O^{16} 及 N^{14} 的激发核(它们接着衰变以分别发射 4.43、6.14 及 1.63 或 2.14 兆电子伏的谱线)、π 介子及 C^{11}、N^{13} 及 O^{15}(它们都接着发射正电子，而正电子湮没以形成 0.511 兆电子伏的谱线)。表 49 概括了能产生可观测谱线的许多其他的 γ 射线源。

为了详尽计算起见，质子能谱取为：

$$N(P)=P_0^{-1}\exp\left(-\frac{P}{P_0}\right),\qquad(4\text{–}399)$$

式中对质量数为 A 及荷电为 Ze 的一个原子核，刚度 $P=A[2M_pc^2E_p+E_p^2]^{1/2}/(Ze)$，其中 E_p 为质子能量，M_p 为静质量。刚度是动量与电荷之比，P_0 是特征刚度，$P_0\approx80$ 至 200 兆电子伏，$N(P)$可以归一化到太阳上刚度大于零的一个粒子。表 50 给出最重要的产生中子的反应。当质子能量 E_p 大于 1 京电子伏时，对 pp、$p\alpha$ 及 pC N O Ne 反应的总的中子产生截面 σ_p 分别是 $\sigma_n\approx20$、200 及 1000 毫靶 (Lingenfelter 和 Ramaty, 1967)。作为参考，1 毫靶$=10^{-27}$厘米^2。能量为 E_p 的入射质子及能量为 E_n 的次级中子的微分能谱 $f(E_n,\ E_p)$ 由下式给出：

$$\left.\begin{aligned}&f(E_n,\ E_p)=\frac{1}{E_p(1-K)}\quad(\text{当 }0<E_n<E_p(1-K)\text{ 及}(p,\ p)\text{反应});\\&f(E_n,\ E_p)=\frac{1}{E_p-Q}\quad(\text{当 }0<E_n<E_p-Q\text{ 及}(p,\ \alpha)\text{反应});\\&f(E_n,\ E_p)=E_n\theta^{-2}\exp(-E_n/\theta)\quad(\text{当 }p\text{C N O Ne 反应}),\end{aligned}\right\}\qquad(4\text{–}400)$$

这里 $K\approx0.25$ 为非弹性度，定义为入射质子能量与所有 π 介子的能量的比值，Q 为在(p,

表 50 丰富原子核产生中子的反应

反应	阈能(兆电子伏/核子)	反应	阈能(兆电子伏/核子)
$H^1(p,\ n\pi^+)H^1$	292.3	$C^{12}(p,\ n\cdots)$	19.8
$He^4(p,\ pn)He^3$	25.9	$N^{14}(p,\ n\cdots)$	6.3
$He^4(p,\ 2pn)H^2$	32.8	$O^{16}(p,\ pn\cdots)$	16.5
$He^4(p,\ 2p2n)H^1$	35.6	$Ne^{20}(p,\ pn\cdots)$	17.7

α)反应中动能所转换成的静质量，$\theta\approx1.5$ 兆电子伏为激发原子核的温度。由此产生的中子与氢相互作用，按下列反应 $n+p\rightarrow D+\gamma$ 以产生 2.23 兆电子伏的 γ 射线谱线。由太阳大气中的其他原子核俘获中子的相对几率比氢的相应值乘以 10^{-8} 还要小。

C^{12}、N^{14}、O^{16} 及 Ne^{20} 的质子激发态导致的谱线发射给出如下：

激发原子核	主线(兆电子伏)
Ne^{20}	1.632
N^{14}	2.312
N^{14}	3.945
C^{12}	4.433
O^{16}	6.14
O^{16}	7.12

(4–401)

表 49 给出包括不太主要的谱线在内的一份比较详尽的表。

产生 π 介子的主要反应为：

$$\left.\begin{aligned}
&p+p\rightarrow D+\pi^+,\\
&p+p+a(\pi^++\pi^-)+b\pi^0,\\
&p+n+\pi^++a(\pi^++\pi^-)+b\pi^0,\\
&2n+2\pi^++a(\pi^++\pi^-)+b\pi^0,\\
&p+He^4\rightarrow p+He^4+a(\pi^++\pi^-)+b\pi^0,\\
&p+He^3+n+a(\pi^++\pi^-)+b\pi^0,\\
&2p+H^2+n+a(\pi^++\pi^-)+b\pi^0,\\
&4p+n+\pi^-+a(\pi^++\pi^-)+b\pi^0,\\
&3p+2n+a(\pi^++\pi^-)+b\pi^0,\\
&2p+3n+\pi^++a(\pi^++\pi^-)+b\pi^0,\\
&p+4n+2\pi^++a(\pi^++\pi^-)+b\pi^0。
\end{aligned}\right\} \tag{4–402}$$

林根费尔特等 (Lingenfelter 和 Ramaty, 1967) 总结了对这些反应所测定的截面，pp 反应及 $p\alpha$ 反应所产生 π 介子的截面近似值是 $\sigma_{\pi^+}\approx20$ 及 100 毫靶，以及当质子能量 E_p(以京电子伏为单位)大于 1 京电子伏时，$\sigma_{\pi^0}\approx9E_p$ 及 $90E_p$ 毫靶。对能量为 E_p 的入射质子及能量为 E_π 的次级 π 介子，其微分能谱 $f(E_\pi, E_p)$ 由下式给出：

$$f(E_\pi, E_p)=\delta(E_\pi-\langle E_\pi\rangle), \tag{4–403}$$

式中 δ 是狄拉克 δ 函数。

对 (pp) 反应 $\langle E_\pi\rangle=0.985E_p^{3/4}$ (单位是兆电子伏)；

对 $(p\alpha)$ 反应 $\langle E_\pi\rangle=0.754E_p^{3/4}$ (单位是兆电子伏)。

在表 51 中给出最丰富原子核的主要正电子发射。

林根费尔特等(Lingenfelter 和 Ramaty, 1967)假定质子是以各向同性方式受到加速的并且各向同性地与太阳大气相互作用的。他们计算出了在质子加速期间所产生的、以及当质子在太阳物质中释出并停止期间所产生的能量为 E_s 的次级粒子的总数 $Q(E_s)$。加速期及减速期可分别取作等效于薄靶模型及厚靶模型。假定被加速粒子的能谱能量密度 $\langle N(E)\rangle$ 在加速时间 t 内是常数，在加速期间产生的次级粒子总数为 (Lingenfelter 和 Ramaty, 1967; Chupp, 1971)：

表 51 丰富原子核的主要的正电子发射过程[1]

β^+ 发射过程及衰变方式	最大的 β^+ 能量（兆电子伏）	半寿命（分）	生成方式	阈能（兆电子伏）	生成率截面（毫靶）
$C^{11}\to B^{11}+\beta^++\nu$	0.97	20.5	$C^{12}(p, pn)C^{11}$	20.2	50
			$N^{14}(p, 2p2n)C^{11}$	13.1	30
			$N^{14}(p, \alpha)C^{11}$	2.9	
			$O^{16}(p, 3p3n)C^{11}$	28.6	10
$N^{13}\to C^{13}+\beta^++\nu$	1.19	9.96	$N^{14}(p, pn)N^{13}$	11.3	10
			$O^{16}(p, 2p2n)N^{13}$	5.54	8
$O^{14}\to N^{14}+\beta^++\nu$	1.86	1.18	$N^{14}(p, n)O^{14}$	6.4	
$O^{15}\to N^{15}+\beta^++\nu$	1.73	2.07	$O^{16}(p, pn)O^{15}$	16.54	50

[1] 本表数据取自林根费尔特等 (Lingenfelter 和 Ramaty, 1967) 的文章，对能量大于 100 兆电子伏的情况，截面是近似值。π^+ 及 β^+ 粒子两者都导致 0.51 兆电子伏湮没线。

$$Q(E_s)=Nt_1\int_0^\infty \sigma(E)f(E_s,\ E)V(E)\langle N(E)\rangle\, dE \text{ 兆电子伏}^{-1}, \qquad (4\text{–}404)$$

式中 $Q(E_s)$ 的单位是个粒子·兆电子伏$^{-1}$，此时靶原子核的数密度 N 的单位是厘米$^{-3}$，加速时间 t_1 的单位是秒，在能量为 E 时产生次级粒子的截面 $\sigma(E)$ 是厘米^2，$f(E_s,\ E)$ 是归一化微分能谱，$V(E)\langle N(E)\rangle$ 是被加速原子核的通量，单位是厘米$^{-2}$·秒$^{-1}$· 兆电子伏$^{-1}$，E 及 $V(E)$ 分别是质子动能及质子速度。$f(E_s,\ E)$ 是由于与能量为 E 的质子相互作用而产生的一个具有能量 dE_s（在 E_s 附近）的中子或 γ 射线的几率密度。质子能谱 $\langle N(E)\rangle$ 由 (4–399) 式给出并且已作了归一化，所以它可给出能量为 E 的被加速粒子的总数。

在减速期，每兆电子伏的粒子总数由下式给出：

$$Q(E_s)=\frac{N}{\rho}\int_0^\infty\sigma(E)f(E_s,\ E)\frac{dR(E)}{dE}\,dE\int_E^\infty N(E_1,\ t_1)\cdot\exp\left(-\frac{[R(E_1)-R(E)]}{L}\right)dE_1 \text{ 兆电子伏}^{-1}, \qquad (4\text{–}405)$$

式中 N/ρ 是每克太阳物质的靶原子数，ρ 是在减速期看到的质量密度，单位是克·厘米$^{-3}$，$dR(E)/dE$ 是停止行程范围 $R(E)$ 对能量 E 的曲线的斜率，E_1 是质子在 t_1 时刻的能量，要求它能相应于在时间 t 质子能量减到 E，L 是质子从能量 E_1 至能量 E 的平均衰减长度。$R(E)$ 及 L 两者都是以克·厘米$^{-2}$ 为单位。

若在加速期间所有产生的中子有一半逃出太阳，以及中子产出率是一个随时间而变的脉冲函数，则在地球上随时间而变的中子通量 $\varphi(t)$ 由下式给出：

$$\varphi(t)=\frac{Q(E_n)}{2\pi R^2}\frac{dE_n}{dt}P_e(E_n)P_s(E_n) \text{ 厘米}^{-2}\cdot\text{秒}^{-1}, \qquad (4\text{–}406)$$

式中 $Q(E_n)$ 由 (4–404) 式或 (4–405) 式给出，R 是日地距离≈1 天文单位距离[1)]，dE_n/dt 是当太阳上中子产出率是 δ 函数 $P_e(E_n)=0.5$ 时在 1 天文单位距离处中子能量的变率，在 1 天文单位距离处的中子残存几率是 $P_s(E_n)$ 而 $Q(E_n)$ 是按

$$E_n(t)=mc^2\{[1-(R/ct)^2]^{-1/2}-1\}$$

求出的，其中 $R=vt$ 及 v 是中子的速度。

4.5.2. 高能粒子的能量损耗机制

4.5.2.1. 带电粒子因电离所致能量损耗

1) 原文为“天文单位”，新名称为“天文单位距离”。——译者注

当一个带电粒子通过物质时，它由于使原子激发及电离而损失能量。荷电为 eZ、能量为 E 的一个粒子的能量损耗由下式给出 (Bethe, 1930, 1932; Bloch, 1933)：

$$-\frac{dE}{dx}=\frac{2\pi Z^2e^4N}{mv^2}\left[\ln\left(\frac{2mv^2\gamma^2W_m}{I^2}\right)-2\beta^2+f\right]$$

$$\approx 2.54\times10^{-19}Z^2N\sqrt{2/(\gamma-1)}\,[\ln(\gamma-1)+11.8]\text{电子伏·厘米}^{-1}$$

(对原子氢及 $\gamma\ll1$)

$$\approx 2.54\times10^{-19}Z^2N\left[3\ln\gamma+\ln\left(\frac{M}{m}\right)+19.5\right]\text{电子伏·厘米}^{-1} \qquad (4\text{–}407)$$

(对原子氢及 $\gamma\gg M/m$)，

式中 dx 是在粒子运动方向的单位长度元，m 是电子质量，M 是入射粒子的质量，v 为入射粒子的速度，$\beta=v/c$，$\gamma=(1-\beta^2)^{-1/2}=E/(Mc^2)$，$N$ 为物质中的电子数密度，电离电势是 I 及最大能量转移 W_{max} 由(4–362)式给出。密度效应项 f 首先由费密(Fermi, 1939, 1940)提出，并由斯顿海默(Sternheimer, 1956)以及早川幸男(Hayakawa, 1969)连同(4–407)式中的其他常数一起列表给出。在表 34 中给出电离电势。

对完全电离气体及一个超相对论性入射粒子，我们得到(Ginzburg, 1969)：

$$f=\ln(1-\beta^2)+\ln\left(\frac{I^2}{\hbar^2\omega_p^2}\right)+1, \qquad (4\text{–}408)$$

式中等离子体频率 ω_p 由下式给出：

$$\omega_p=(4\pi e^2N_e/m)^{1/2},$$

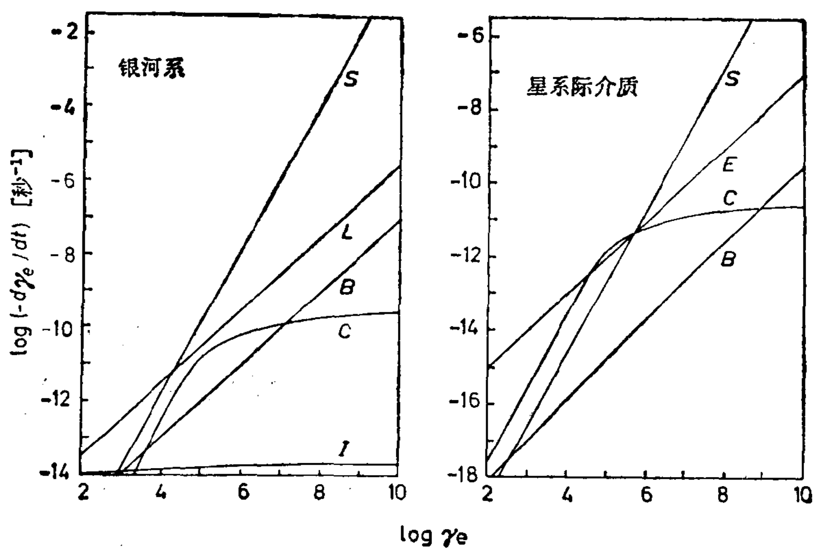


图 28 在银河系及星系际介质中由于同步加速辐射(S)、宇宙膨胀(E)、星系晕漏泄(L)、轫致辐射发射(B)、康普顿散射(C)及电离(I)所致电子能量损耗率(取自 Burbidge, 1966 的文章)。这里 $\gamma=E/mc^2$，式中 E 是电子的总能量。除了漏泄损耗率 $d\gamma/dt=\gamma lc/R^2$ 及膨胀损耗率 $d\gamma/dt=\gamma H_0$ 外，所有能量损耗率都在第 4.5 节中给出。这里星系晕的半径为 $R\approx5\times10^{22}$ 厘米，星系气体云的布朗运动的平均自由程为 $l\approx1$ 千秒差距 $=3\times10^{21}$ 厘米，而哈勃常数给出 H_0^{-1} 的年龄 $\approx10^{17}$ 秒

N_e是自由电子密度。对电离气体及一个超相对论性入射粒子情况，(4-407)式变为：

$$-\frac{dE}{dx}\approx 2.54\times10^{-19}Z^2N_e\left[\ln\left(\frac{W_m}{mc^2}\right)-\ln N_e+74.1\right]\text{电子伏·厘米}^{-1}, \quad (4\text{-}409)$$

式中若 $\gamma\gg(M/m)$，则 $W_m=E$；若 $1\ll\gamma\ll(M/m)$，则 $W_m=2E^2/(mc^2)$。

对一个电子入射到中性原子上的特殊情况，

$$-\frac{dE}{dx}=\frac{2\pi e^4N}{mv^2}\left[\ln\left(\frac{mv^2\gamma^2W_m}{I^2}\right)+\frac{9}{8}-\beta^2+f\right]$$

$$\approx 2.54\times10^{-19}N[3\ln\gamma+20.2]\text{电子伏·厘米}^{-1}\quad(\text{对氢及 }\gamma\ll1)。\quad (4\text{-}410)$$

当超相对论性电子入射到完全电离气体时，

$$-\frac{dE}{dx}\approx 2.54\times10^{-19}N_e[\ln\gamma-\ln N_e+73.4]\text{电子伏·厘米}^{-1}。\quad (4\text{-}411)$$

对银河系及星系际介质由电离及其他过程造成的电子能量损耗在图28中示出。

4.5.2.2. 电子因轫致辐射所致能量损耗

当能量为 E 的一个相对论性电子与荷电为 eZ 的原子核碰撞时，它发射能量为 E_γ 的一些光子，并按照下式损失能量(Bethe 和 Heitler, 1934)：

$$-\frac{dE}{dx}=N\int_0^{E-mc^2}E_\gamma\sigma_B(E,\ E_\gamma)dE_\gamma, \quad (4\text{-}412)$$

式中 N 是原子核的数密度，微分截面 $\sigma_B(E,\ E_\gamma)$ 由(4-372)式，(4-373)式或(4-376)式给出。把(4-372)式及(4-373)应用于(4-412)式，我们得到：

$$-\frac{dE}{dx}\approx 4N\alpha r_0^2EZ^2\ln\left(\frac{2E}{mc^2}\right)\quad\left(\text{当 }mc^2\ll E\ll\frac{mc^2}{\alpha Z^{1/3}}\right); \quad (4\text{-}413)$$

$$-\frac{dE}{dx}\approx\frac{MNE}{X}\qquad\left(\text{当 }E\gg\frac{mc^2}{\alpha Z^{1/3}}\right), \quad (4\text{-}414)$$

这里 N 是靶原子核的数密度，精细结构常数 $\alpha=e^2/(\hbar c)={}^*1/137.03604$，经典电子半径 $r_0=e^2/(mc^2)={}^*2.8179380\times10^{-13}$ 厘米，电子的静质量能 $mc^2={}^*0.5110034$ 兆电子伏，M 是靶原子核的质量，辐射长度 X 由(4-374)式或(4-375)式给出。对电子-原子轫致辐射，能量损耗由(4-413)式及(4-414)式以 $Z(Z+1)$ 代替 Z^2 而给出。对氢原子的特殊情况，$Z=1$，$M={}^*1.6735595\times10^{-24}$ 克，$X=62.8$ 克·厘米$^{-2}$，以及

$$-\frac{dE}{dx}\approx 2.6\times10^{-26}NE\text{ 电子伏·厘米}^{-1}\left(\text{当 }E\gg\frac{mc^2}{\alpha}\right); \quad (4\text{-}415)$$

$$-\frac{dE}{dx}\approx 2.3\times10^{-27}NE\ln\left(\frac{2E}{mc^2}\right)\text{电子伏·厘米}^{-1}\left(\text{当 }mc^2\ll E\ll\frac{mc^2}{\alpha Z^{1/3}}\right)。\quad (4\text{-}416)$$

当气体是完全电离时，无屏蔽效应方程是合适的。布卢门撒尔等(Blumenthal 和 Gould, 1970)综述了高能电子穿过稀薄气体时的轫致辐射、同步加速辐射及康普顿散射。

4.5.2.3. 电子因康普顿散射所致能量损耗(逆康普顿效应)

当能量为 $E=\gamma mc^2$ 的一个相对论性电子与能量为 $h\nu$ 的一些光子碰撞时，它产生一个能量为 E_γ 的光子，并按照下列方程损失能量：

$$-\frac{dE}{dx}=\int\sigma_c(E_\gamma,\ h\nu)N(h\nu)E_\gamma dE_\gamma d(h\nu), \quad (4\text{-}417)$$

式中克莱因-仁科(Klein-Nishina, 1929)散射截面 $\sigma_c(E_\gamma,\ h\nu)$ 由(4-370)式给出，$N(h\nu)$是

能量为 $h\nu$ 的入射光子的总的数密度。由(4-370)式及(4-371)式，我们得到：

$$E_\gamma \approx \gamma^2 h\nu \text{ 及 } \sigma_c \approx \sigma_T \quad (\text{当 } \gamma h\nu \ll mc^2)$$

及
$$E_\gamma \approx \gamma mc^2 \text{ 及 } \sigma_c \approx \frac{3}{8}\sigma_T\left(\frac{mc^2}{\gamma h\nu}\right)\left[\ln\left(\frac{2\gamma h\nu}{mc^2}\right)+\frac{1}{2}\right] \quad (\text{当 } \gamma h\nu \gg mc^2), \tag{4-418}$$

式中汤姆孙散射截面 $\sigma_T = 8\pi e^4/(3m^2c^4) = {}^*6.652448\times10^{-25}$ 厘米^2。将(4-418)式代入(4-417)式，我们得到：

$$\left.\begin{aligned} -\frac{dE}{dx} &\approx \sigma_T U \gamma^2 \quad (\text{当 } \gamma h\nu \ll mc^2); \\ -\frac{dE}{dx} &\approx \frac{3}{8}\sigma_T U\left(\frac{mc^2}{h\nu}\right)^2 \ln\left(\frac{2\gamma h\nu}{mc^2}\right) \quad (\text{当 } \gamma h\nu \gg mc^2), \end{aligned}\right\} \tag{4-419}$$

式中光子能量密度 U 由下式给出：

$$U = \int h\nu N(h\nu)\,d(h\nu) \approx h\nu N(h\nu), \tag{4-420}$$

$h\nu$ 为光子能量。费恩伯格等(Feenberg 和 Primakoff, 1948; Donahue, 1951; 以及 Felten 和 Morrison, 1963, 1966) 已对银河系及星系际天体讨论了对 U 的各种贡献。各种频谱区的电磁辐射的能量密度示于图 29。布卢门撒尔等 (Blumenthal 和 Gould, 1970) 综述了高能电子穿过稀薄气体时的轫致辐射、同步加速辐射及康普顿散射。

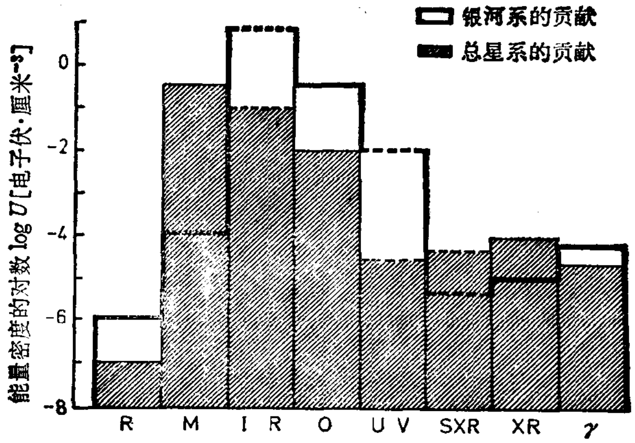


图 29 把不同频谱区的电磁辐射通量的估计画成直方图，能量密度单位为电子伏·厘米$^{-3}$ = $^*1.6021892\times10^{-12}$ 尔格·厘米$^{-3}$。所研究的频谱区是无线电($R\approx10^8\sim10^{10}$ 赫)、微波($M\approx10^{10}\sim10^{12}$ 赫)、红外($IR\approx10^{12}\sim10^{14}$ 赫)、可见光($O\approx10^{13}\sim10^{15}$ 赫)、紫外($UV\approx10^{15}\sim10^{17}$ 赫)、软 X 射线($SXR\approx10^{17}$ 赫)、X 射线($XR\approx10^{17}\sim10^{19}$ 赫) 及 γ 射线($\gamma\approx10^{18}\sim10^{20}$ 赫)频段。太阳附近接收到的由银河系贡献的通量在图中以白色部分表示，而在星系际空间中一个平均点的通量以粗黑线下的部分表示。实际上这张直方图是银河表面亮度(减去银极亮度以后)与银极亮度的比较。对仍然存在相当多的不确定性的频谱区的估计用虚线表示。只有在微波区(在此区中 2.7 开黑体光子辐射贡献 ≈0.3 电子伏·厘米$^{-3}$)及在 X 射线区(在此区中高能光子辐射贡献 $\approx10^{-4}$ 电子伏·厘米$^{-3}$)，总星系的贡献才大大超过银河系的贡献(取自 Silk, 1970 的文章)

4.5.2.4. 电子因同步加速辐射(磁轫致辐射)所致能量损耗

当能量为 $E=\gamma mc^2$ 的一个相对论性电子以速度 v 在强度为 H 的磁场中运动时，它按照下列方程损失能量(Schott, 1912)(参看(1-155)式)。

$$-\frac{dE}{dx}=\frac{1}{c}\frac{dE}{dt}=\frac{2e^4}{3m^2c^4}\gamma^2H^2\approx 6.6\times10^{-14}E^2H^2\text{ 尔格·厘米}^{-1},\tag{4-421}$$

式中 $\beta=v/c$, E 的单位是尔格, H 的单位是高斯。便于换算, 1 电子伏 $=^*1.6021892\times10^{-12}$ 尔格。

4.5.2.5. 光子因光电效应、康普顿散射及电子偶的形成所致能量损耗

一束原来强度为 I_0 的光子在介质中通过给定距离 L 以后将具有下式给出的强度 I:

$$I=I_0\exp[-\tau]。\tag{4-422}$$

光学深度 τ 由下式给出:

$$\tau=\int_0^L N\sigma dL\approx N\sigma L,\tag{4-423}$$

式中 N 是散射粒子或吸收粒子的数密度, σ 是用于散射过程或吸收过程的截面。

当一个光子的量子能量 $h\nu$ 大于一个原子的 K 壳层电子的电离能量 I 时, 在光子与原子碰撞时 K 壳层电子将被电离。对于非相对论性情况[1] ($h\nu\ll mc^2$), 射出 K 壳层的两个电子的这种光电效应, 即电离 K 壳层两个电子的截面 σ_K 由下式给出 (Stobbe, 1930; Heitler, 1954):

$$\begin{aligned}\sigma_K&=\frac{128\pi\sigma_T}{\alpha^3Z^2}\left(\frac{I}{h\nu}\right)^4\frac{\exp(-4\eta\cot^{-1}\eta)}{[1-\exp(-2\pi\eta)]}\quad(\text{当 }\nu\gtrsim\nu_K\text{ 及 }h\nu\ll mc^2);\\ \sigma_K&=\frac{64\sigma_T}{\alpha^3Z^2}\left(\frac{I}{h\nu}\right)^{7/2}=4\sqrt{2}\,\alpha^4Z^5\left(\frac{mc^2}{h\nu}\right)^{7/2}\quad(\text{当 }\nu\gg\nu_K\text{ 及 }h\nu\ll mc^2),\end{aligned}\tag{4-424}$$

式中汤姆孙散射截面 σ_T 由下式给出 (Thomson, 1906):

$$\sigma_T=\frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2=^*6.652448(33)\times10^{-25}\text{ 厘米}^2;$$

常数 η 由下式给出:

$$\eta=\left(\frac{I}{h\nu-I}\right)^{1/2}=\frac{Ze^2}{\hbar v};$$

v 是射出电子的速度; Z 是原子序数; 电离能 I 与吸收限的频率 ν_K 及频率 ν 的关系式如下:

$$I=h\nu_K=h\nu-mv^2/2=mc^2\alpha^2Z^2/2。\tag{4-425}$$

改变 (4-424) 式中的 Z 及 I 就可以求出其他壳层的截面值。在第 3.3 节的表 34 中给出电离电势的值。当频率 $\nu>\nu_K$ 时 (ν_K 是 K 壳层吸收限的频率), 由所有壳层的光电效应所致总截面是 $\sigma\approx5\sigma_K/4$。戴维森等 (Davisson 和 Evans, 1952) 给出了光电截面的经验值。

对类氢原子的特殊情况, 第 n 能级的光致电离的截面 σ_n 由下式给出 (Kramers, 1923) (参看 (1-230) 式):

$$\sigma_n=\frac{32\pi^2e^6R_\infty Z^4}{3^{3/2}h^3\nu^3n^5}=^*2.815400\times10^{29}\frac{Z^4}{\nu^3n^5}\text{ 厘米}^2,\tag{4-426}$$

式中频率 ν 大于 $2\pi^2me^4Z^2/(h^2n^2)=^*3.289841\times10^{15}Z^2n^{-2}$ 赫, 无限大质量的里德伯常数 $R_\infty=2\pi^2me^4/(ch^3)=^*1.097373177\times10^5$ 厘米$^{-1}$。

在相对论情况[2] ($h\nu\gg mc^2$), 对于两个 K 层电子的光电截面 σ_K 由下式给出 (Sauter, 1931; Heitler, 1954):

1) 原文为"非相对论性光子", 不妥。——校者注

2) 原文为"当光子是相对论性的情况", 用语不妥。——校者注

$$\sigma_K=\frac{3\sigma_T Z^5\alpha^4}{2}\left(\frac{mc^2}{h\nu}\right)^5(\gamma^2-1)^{3/2}\left\{\frac{4}{3}+\frac{\gamma(\gamma-2)}{\gamma+1}\cdot\left[1-\frac{1}{2\gamma\sqrt{\gamma^2-1}}\ln\left(\frac{\gamma+\sqrt{\gamma^2-1}}{\gamma-\sqrt{\gamma^2-1}}\right)\right]\right\}$$

$$\approx\frac{3\sigma_T Z^5\alpha^4}{2}\left(\frac{mc^2}{h\nu}\right)\quad(当\ h\nu\gg mc^2),\tag{4-427}$$

式中

$$\gamma=\left[1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{-1/2}=\frac{h\nu+mc^2}{mc^2},$$

v 为射出电子的速度，精细结构常数 $\alpha=e^2/(\hbar c)={}^*1/137.03604$，电子的静质量能为 $mc^2={}^*0.5110034$ 兆电子伏，Z 为原子序数，以及 $h\nu$ 是频率为 ν 的光子的量子能量。

能量为 $E=\gamma mc^2$ 的一个自由电子散射的光子的总的康普顿散射截面 σ_c 以(4–370)式取 $q=\gamma h\nu/(mc^2)$ 给出。此方程的渐近式为(Klein 和 Nishina, 1929)：

$$\sigma_c\approx\sigma_T\quad(当\ \gamma h\nu\ll mc^2);$$

$$\sigma_c\approx\frac{3}{8}\sigma_T\frac{mc^2}{\gamma h\nu}\left[\frac{1}{2}+\ln\left(\frac{2\gamma h\nu}{mc^2}\right)\right]\quad(当\ \gamma h\nu\gg mc^2),\tag{4-428}$$

式中频率为 ν 的光子具有量子能量 $h\nu={}^*4.135701\times10^{-21}\nu$ 兆电子伏，电子的静质量能为 $mc^2={}^*0.5110034$ 兆电子伏，汤姆孙(Thomson, 1906)散射截面

$$\sigma_T=8\pi e^4/(3m^2c^4)={}^*6.652448\times10^{-25}\ 厘米^2。$$

当然，光子不是完全被吸收了的而是以下式给出的新频率 ν_0 被散射(Compton, 1923)：

$$\left.\begin{aligned}&\nu_0=\nu\left[1+\left(\frac{h\nu}{mc^2}\right)(1-\cos\varphi)\right]^{-1}\quad(当\ \gamma\ll1\ 及\ \gamma h\nu\ll mc^2);\\&\nu_0=4\gamma^2\nu/3\quad(当\ \gamma\gg1\ 及\ \gamma h\nu\ll mc^2);\\&\nu_0=\gamma mc^2/h\quad(当\ \gamma\gg1\ 及\ \gamma h\nu\gg mc^2),\end{aligned}\right\}\tag{4-429}$$

式中 ν 是入射光子的频率，φ 是入射光子的偏转角。

当一个光子与另一个光子碰撞或在一个光子通过一个原子核的库仑场的情况下，就可能由于电子–正电子偶的形成而将光子吸收。这两种过程的总截面由(4–360)式及(4–356)式给出。费恩伯格等(Feenberg 和 Primakoff, 1948; Donahue, 1951; Felten 和 Morrison, 1963, 1966; 以及 Goldreich 和 Morrison, 1964) 已经对天体物理学的对象讨论了各种光子吸收过程。在 0.1 到 8 千电子伏能量范围内的 X 射线光子的吸收主要是由于光致电离，在星际介质中这种过程的光学深度可能会大至 1。布朗等 (Brown 和 Gould, 1970) 给出了星际介质中 X 射线光电吸收的计算。对能量高于 8 千电子伏的 X 射线，以康普顿散射为主，在 100 千电子伏时最大截面为 5×10^{-25} 厘米^2，但是在星系及星系际空间它的光学深度小于 1。在星光光子的情况下，偶产生相互作用给出的光学深度足以吸收能量范围为 100 京电子伏到 5000 京电子伏的 γ 射线光子 (Nikishov, 1962)，而能量大于 10^5 京电子伏的所有总星系 γ 射线将通过宇宙 3 开黑体光子气的相互作用产生电子偶的过程而被吸收 (Gould 和 Schréder, 1966; Jelley, 1966)。

4.5.3. 高能粒子的起源

4.5.3.1. 宇宙线电子、质子及正电子的能谱

当观测高能粒子时，微分能量通量 $J(E)$ 是经常测量的量。若 $dJ(E)$ 表示在能量范围 dE 内、在单位时间单位立体角内通过单位面积的粒子数，则

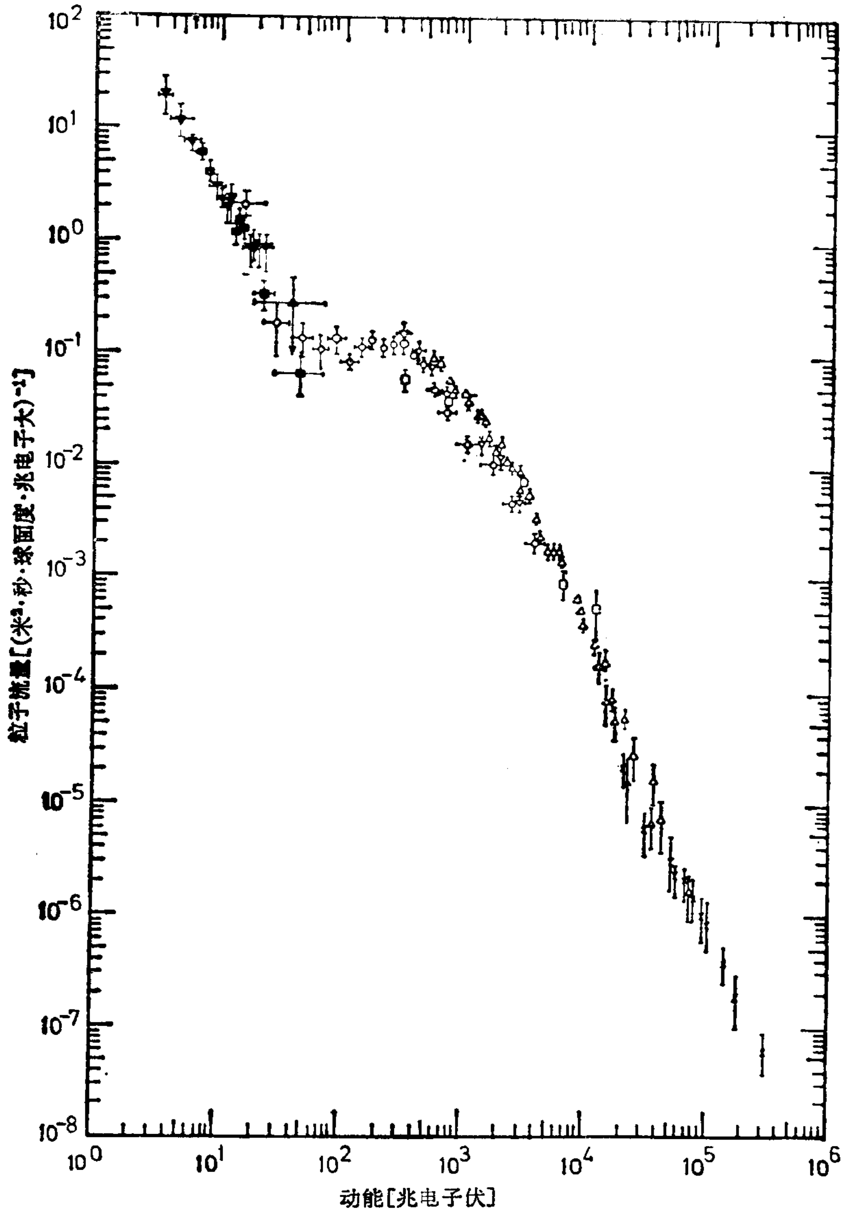


图 30 原宇宙线电子的能谱(取自 Fanselow 等 1969 的文章)。图中每一种符号表示范塞洛(Fanselow)等参考采用的不同的观测资料

$$J(E)=\frac{dJ(E)}{dE}\ \text{个粒子}\cdot(\text{厘米}^2\cdot\text{秒}\cdot\text{球面度}\cdot\text{兆电子伏或京电子伏})^{-1}。\tag{4-430}$$

检测器往往对能量高于某一阈能的粒子才是灵敏的，所以下列积分能谱也是一种经常测量的量：

$$J(>E)=\int_E^\infty J(E)dE\ \text{个粒子}\cdot(\text{厘米}^2\cdot\text{秒}\cdot\text{球面度})^{-1},\tag{4-431}$$

宇宙线电子的微分能谱(首先为厄尔(Earl, 1961)所观测到)示于图 30。此能谱可用下列近似式很好地代表：

$$\left.\begin{aligned}
&J(E)=1.32\times10^{-2}E^{-1.75}(\text{厘米}^2\cdot\text{秒}\cdot\text{球面度}\cdot\text{兆电子伏})^{-1}\\
&\qquad(\text{当 3 兆电子伏}\leqslant E\leqslant 20\text{ 兆电子伏}),\\
&J(E)=1.00\times10^{-5}(\text{厘米}^2\cdot\text{秒}\cdot\text{球面度}\cdot\text{兆电子伏})^{-1}\\
&\qquad(\text{当 30 兆电子伏}\leqslant E\leqslant 300\text{ 兆电子伏}),\\
&J(E)=3.5\times10^{-8}E^{-1.6}(\text{厘米}^2\cdot\text{秒}\cdot\text{球面度}\cdot\text{兆电子伏})^{-1}\\
&\qquad(\text{当 0.5 京电子伏}\leqslant E\leqslant 3\text{ 京电子伏}),\\
&J(E)=1.16\times10^{-2}E^{-2.6}(\text{厘米}^2\cdot\text{秒}\cdot\text{球面度}\cdot\text{兆电子伏})^{-1}\\
&\qquad(\text{当 3 京电子伏}\leqslant E\leqslant 300\text{ 京电子伏})。
\end{aligned}\right\}\tag{4–432}$$

原质子能谱只要将高能($3\leqslant E\leqslant 300$ 京电子伏)电子能谱平行地向右移动，取能量差别因子约为 20 即可。质子及原子核的微分能谱(首先为弗雷尔等 (Freier 等 1948; 以及 Bradt 和 Peters, 1948)所观测到)由下式给出(Ryan, Ormes 和 Balasubrahmanyan, 1972):
对质子及氦(He)原子核，当 10 京电子伏 $\leqslant E\leqslant 10^3$ 京电子伏，

$$\begin{aligned}
&J(E)=2.0\pm0.2E^{-2.75\pm0.03}\text{ 个质子}\cdot(\text{厘米}^2\cdot\text{秒}\cdot\text{球面度}\cdot\text{京电子伏})^{-1};\\
&J(E)=8.6\pm1.4\times10^{-2}E^{-2.77\pm0.05}\text{ 个氦核}\cdot(\text{厘米}^2\cdot\text{秒}\cdot\text{球面度}\cdot\text{京电子伏})^{-1},
\end{aligned}\tag{4–433}$$

这里能量 E 的单位是京电子伏。积分能谱由下式给出(Hayakawa, 1969):

$$\begin{aligned}
&J(>E)=1.6\times10^{-5}\left(\frac{E}{10^8}\right)^{-1.6}(\text{厘米}^2\cdot\text{秒}\cdot\text{球面度})^{-1}\\
&\qquad(\text{当 10 京电子伏}\leqslant E\leqslant 10^4\text{ 京电子伏});\\
&J(>E)=2.0\times10^{-14}\left(\frac{E}{10^8}\right)^{-2.2}(\text{厘米}^2\cdot\text{秒}\cdot\text{球面度})^{-1}\\
&\qquad(\text{当 }10^6\text{ 京电子伏}\leqslant E\leqslant 10^9\text{ 京电子伏}),
\end{aligned}\tag{4–434}$$

式中 E 的单位是京电子伏。韦伯等(Webber, 1967; 以及 Shapiro 和 Silberberg, 1970)分别综述过原宇宙线及重宇宙线核的能谱及成分。

在低能范围 (3 至 20 兆电子伏)，宇宙线电子使星际氢电离而损失了大部分能量，并且一般认为宇宙线电子是由较高能量的质子的撞击碰撞而形成的 (Abraham, Brunstein 和 Cline, 1966; Simnett 和 McDonald, 1969)。在电子–正电子中正电子的相对丰度 R 的观测表明，较高能量电子是直接在源中受到加速，而不是起源于次级质子。正电子相对丰度 R 由下式给出:

$$R=\frac{J^+(E)}{J^+(E)+J^-(E)},\tag{4–435}$$

式中下标 + 及 − 分别表示正电子及电子。在表 52 中给出 R 的观测值。高能电子必定是在我们银河系中产生的，因为否则 X 射线背景就会比观测到的背景要大得多 (Felten 和 Morrison, 1966)。于是，高能粒子的起源问题就归结为在我们银河系中加速粒子的适当机制的问题。

表 52 在原宇宙线的电子成分中正电子占的比例[1]

能量范围(京电子伏)	$R=\frac{J^+(E)}{J^+(E)+J^-(E)}$	能量范围(京电子伏)	$R=\frac{J^+(E)}{J^+(E)+J^-(E)}$
0.053～0.088	0.31±0.19	0.86～1.70	0.083±0.024
0.088～0.173	0.45±0.08	1.70～4.2	0.046±0.018
0.173～0.44	0.29±0.09	4.2～8.4	0.013±0.05
0.44～0.86	0.10±0.07	8.4～14.3	0.15±0.18

[1] 取自范斯洛等(Fanselow 等，1969)的文章。

4.5.3.2. 高能粒子的加速机制

当一个荷电粒子遇到运动着的较强磁场区时，按照碰撞方式是对撞或追上，粒子的能量将增加或减少。统计论证(Fermi, 1949, 1954)得出结论：一个粒子与随机运动的磁场对撞碰撞比追上碰撞更有可能，而平均说来粒子将是受到加速的。费密加速机制的感兴趣的原因是它导出的幂律谱就象对宇宙线电子及同步加速射电源所观测到的那样。由动量守恒定律可知，若 $\boldsymbol{W}$ 是强磁场区(磁镜)的速度，则对一个相对论性粒子的一次碰撞而言，粒子能量的变化 ΔE 由下式给出：

$$\Delta E=-2E\frac{\boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{V}_{/\!/}}{c^2},\tag{4-436}$$

式中 E 是粒子能量，$\boldsymbol{V}_{/\!/}$ 是粒子速度在平行于 $\boldsymbol{W}$ 方向的分量。因为对撞碰撞的几率正比于 $V+W$，而追上碰撞的几率正比于 $V-W$，每次碰撞的平均能量增益 $\langle\Delta E\rangle$ 由下式给出：

$$\langle\Delta E\rangle\approx\frac{V+W}{2V}\Delta E-\frac{V-W}{2V}\Delta E\approx2\frac{W^2}{c^2}E。\tag{4-437}$$

若 t_F 是两次碰撞之间的平均时间，则平均能量增益率由下式给出：

$$\frac{dE}{dt}\approx\frac{2W^2}{t_Fc^2}E。\tag{4-438}$$

一旦粒子能量增益超过电离损耗及其他损耗，它将得到加速直到它离开加速区或经受一次原子核碰撞时为止。若 T 表示平均加速时间，则找到一个年龄在 t 与 $t+dt$ 之间的粒子的几率 $P(t)dt$ 由下式给出：

$$P(t)dt=\frac{1}{T}\exp\left(-\frac{t}{T}\right)dt。\tag{4-439}$$

由(4-338)式可知

$$t=\frac{t_Fc^2}{2W^2}\ln\left(\frac{E}{mc^2}\right),\tag{4-440}$$

式中 mc^2 取作起始粒子能量。于是由(4-439)式及(4-440)式可知，具有能量在 E 与 $E+dE$ 之间的粒子数 $N(E)dE$ 由下式给出：

$$N(E)dE\propto E^{-\gamma}dE,\tag{4-441}$$

式中能谱指数 γ 由下式给出：

$$\gamma=1+\frac{t_Fc^2}{2TW^2}。$$

莫里森等(Morrison, Olbert 和 Rossi, 1954; Parker, 1955, 1958; Davis, 1956; Burbidge, 1957; Wentzel, 1963, 1964; 以及 Tsytovich, 1964, 1966)讨论了用到湍流、流体力学波及等离子体波等的各种变型的费密加速机制。例如，温策尔(Wentzel, 1963)证明：一个具有强度为 H 的强磁场激波在通过一条封闭的、弯曲的磁力线而运动时，将把能量为 E_0 的一个粒子加速到

$$E_f=E_0\left[1+\frac{2}{3}\frac{\cos^3\theta}{\sin^2\theta}\right]\left[1-\frac{1}{3}\cos^2\theta\right],\tag{4-442}$$

式中

$$\sin^2\theta=\frac{H_0}{H},$$

H_0 是沿磁力线的未扰动磁场强度，并已假定粒子以大于反射磁场的速度在激波前面运动。

巴德等(Baade 和 Zwicky, 1934)首先注意到，为了说明宇宙线的能量以及超新星爆发的辐射能及动能，只需要一颗坍缩星的静质量能的一部分就够了。因此他们提出了超新星发射宇宙线的假说。当接收到高能粒子的射电辐射以后，超新星是高能粒子的来源这一事

实就得到了证实,并且已经证明,这种射电辐射是相对论性电子的同步加速辐射(Shklovski, 1953)。帕西尼(Pacini, 1967)首先指出,一颗超新星能够从它的遗迹中子星得到这种辐射。当半径 $R_0 \approx 10^{11}$ 厘米的一颗正常恒星坍缩形成 $R \approx 10^6$ 厘米的一颗中子星时,由于磁通量守恒,恒星表面磁场将从 $B_0 \approx 100$ 高斯增加到

$$B \approx B_0\left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \approx 10^{12} \text{ 高斯。} \tag{4-443}$$

自转磁偶极的光度 L 由下式给出:

$$L = \frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{I\omega^2}{2}\right] = \frac{2m_{\perp}^2\omega^4}{3c^3}, \tag{4-444}$$

式中自转动能 T 由下式给出:

$$T = \frac{M\omega^2 R^2}{2}, \tag{4-445}$$

其中 I 是转动惯量;磁偶极矩在垂直于自转轴方向的分量是 $m_{\perp} \approx BR^3$,而 B 是在半径 R 处的表面磁场强度;恒星的角速度 ω 可由角动量 J 守恒得出,而

$$J = M\omega R^2\text{。} \tag{4-446}$$

例如,具有 $\omega_0 \approx 10^{-6}$ 弧度·秒$^{-1}$ 的一颗正常恒星在坍缩成一颗中子星以后将具有角速度 $\omega \approx 10^4$ 弧度·秒$^{-1}$。于是,若 $B = 10^{12}$ 高斯及 $R = 10$ 公里,(4-444) 式给出 $L = 10^{40}$ 尔格·秒$^{-1}$。这差不多是观测到的超新星遗迹的光度。这种能源是恒星的自转动能 $T \approx 10^{53}$ 尔格。在发现脉冲星(Hewish 等, 1968)以后,戈尔德(Gold, 1968)提出脉冲星是自转中子星,应该观测到它们的周期 P 以 dP/dt 的速率变慢。若中子星具有偶极磁场,则脉冲星的特征年龄 τ_0 由下式给出(Ostriker 和 Gunn, 1969):

$$\tau_0 = \left[\frac{1}{P}\frac{dP}{dt}\right]^{-1} \approx \frac{3c^3 M}{2B^2 R^4 \omega^2}\text{。} \tag{4-447}$$

在第一章的表 5 中给出了一份脉冲星参数表。

若利用(4-444)式及(4-447)式,脉冲星周期及周期变慢率的观测也与对超新星观测到的光度一致。奥斯特赖克等(Ostriker 和 Gunn, 1969)进一步提出宇宙线粒子是由自转磁偶极的低频波所加速的。这种机制利用下列事实:在足够强的波场中,在远小于波长的距离内,一个荷电粒子在传播方向可加速到接近光速,此后则以基本上不变的相位随波前进,缓慢地从波中取走能量。对电子可供利用的最大能量 E_{max} 由下式给出:

$$E_{max} \approx mc^2\left[2\omega_B r_0 c^{-1} \ln \frac{r_c}{r_0}\right]^{2/3}, \tag{4-448}$$

式中 r_c 是波能量耗尽处的半径,r_0 是内波半径,$r_0 \approx c/\omega$,ω_B 是在 r_0 处的磁场的最大振幅的回旋加速频率 $eB/(mc)$。例如,若在 $r_0 = 10^8$ 厘米处 $B = 10^6$ 高斯,如果 $r_c = 10^{12}$ 厘米,则 $E_{max} = 10^{13}$ 电子伏。对原子质量为 A 及原子序数为 Z 的一个粒子,

$$E_{max} \approx 3.8 \times 10^{13} A\left(\frac{Z}{A}\right)^{2/3}\left(\frac{\omega}{10^2}\right)^{4/3}\left(\frac{B}{10^{12}}\right)^{2/3}\left(\frac{R}{10^6}\right)^2 \text{ 电子伏}, \tag{4-449}$$

式中 R 是恒星的半径。戈德莱奇等(Goldreich 和 Julian, 1969)首先指出,宇宙线粒子能够起始于中子星的表面,而显著的加速同样可能发生于中子星的表面。他们证明,在中子星的极区与赤道之间的势差 V 由下式给出(参看(1-98)式):

$$V \approx \frac{\omega R^2 B}{c} \approx 10^{16}\omega\left(\frac{B}{10^{12}}\right)\left(\frac{R}{10^6}\right)^2 \text{ 伏}, \tag{4-450}$$

阿耳文(Alfvén, 1938)首先把此式应用于自转恒星。因此势差大到 10^{14} 伏是可能的,这种

表53 97个超新星遗迹的名称、银河源号数、方位、角大小、流量密度、频谱指数、表面亮度及距离资料[1]

名称	银河源号数	α(1950)			δ(1950)		角大小 $\varphi_1\times\varphi_2$ (角分)	在1京赫的流量密度 S_0(央)[1)]	在1京赫的频谱指数 α	在1京赫的表面亮度 Σ (瓦·米$^{-2}$·赫$^{-1}$·球面度$^{-1}$)	与太阳的距离 d (千秒差距)
		h	m	s	°	′					
CTA1	G119.5+10.0	00	02	35	+72	20	125′ 直径	38	−0.2	2.89[−22]	
公元1572年第谷新星	G120.1+1.4	00	22	28	+63	51.9	6.0×7.0	58	−0.74	1.64[−19]	5.0
3C10											
HB3	G132.4+2.2	02	14		+63	15	80′ 直径	36	−0.7	6.70[−22]	1.7
CTB13	G156.4−1.2	04	24		+47	00	300×120	225	−0.5	7.43[−22]	
HB9	G160.5+2.8	04	57	30	+46	30	120×140	150	−0.35	1.06[−21]	
VRO42.05.01	G166.2+4.3	05	23	06	+42	50	45′ 直径	6.6	(−0.5)	3.88[−22]	
OA184	G166.3+2.4	05	15		+41	40	75′ 直径	10.0	−0.5	2.12[−22]	
S147	G180.0−1.7	05	36		+28	00	180′ 直径	120	−0.3?	4.41[−22]	
公元1054年蟹状星云，金牛座A	G184.6−5.8	05	31	31	+21	59.0	3.0×4.2	1,000	−0.25	9.45[−18]	2.02
IC443	G189.1+2.9	06	14		+22	30	40′ 直径	160	−0.45	1.19[−20]	1.5至2.0
PKS0607+17	G193.3−1.5	06	06		+16	40	80′ 直径	27	−0.5	5.03[−22]	
麒麟座星云	G205.5+0.2	06	35		+06	30	210′ 直径	150	−0.5	4.05[−22]	
船尾座A	G260.4−3.4	08	20	30	+42	50	55′ 直径	145	−0.5	5.70[−21]	
PKS0902−38	G261.9+5.5	09	02	22	−38	29	35′ 直径	10.0	−0.38	9.70[−22]	
船帆座X、Y、Z	G263.4−3.0	08	32		−45	00	220×180	1,800	−0.30	5.40[−21]	0.5
MSH10−53	G284.2−1.8	10	15	40	−58	40.5	23×12	25	−0.46	1.05[−20]	
	G289.1−0.4	10	54	28	−59	49.6	3.0×3.2	20	−0.65	2.48[−19]	
MSH11−6/B[3] }	G289.9−0.8	10	59	02	−60	33.8	4.1×5.2	15	−0.6	8.37[−20]	
MSH11−6/A[3] }	G290.1−0.8	11	00	45	−60	38.0	13×12	80	−0.6	6.10[−20]	
MSH11−62	G291.0−0.1	11	09	49	−60	22.0	4.2×5.4	30	−0.65	1.57[−19]	
MSH11−54	G292.0+1.8	11	22	21	−58	59.4	2.8×2.7	15	−0.36	2.37[−19]	
Kes16	G295.1−0.6	11	40	57	−62	10.4	13×14	29	−0.6	1.87[−20]	
PKS1209−51/52	G296.3+10.0	12	06		−52	10	86×75	49	−0.52	9.05[−22]	
Kes17	G304.6+0.1	13	02	39	−62	26.7	5.2×6.1	15	−0.50	5.62[−20]	
	G307.1+1.2	13	22	59	−61	07.4	1.3×0.1	13	−0.72	1.19[−17]	
	G307.6−0.3	13	29	08	−62	32	3.7′ 直径	24	−0.45	2.09[−19]	

13S6AB[3]	G309.6+1.7	13	42	42	−60	13.9	6.3′ 直径	47	−0.60	1.41[−19]	
13S6AA[3]	G309.7+1.8	13	43	33	−60	08.3	7.1×5.4	83	−0.60	2.58[−19]	
Kes20B[3]	G310.6−0.3	13	54	41	−61	56.6	7.5′ 直径	9	−0.6	1.91[−20]	
Kes20A[3]	G310.8−0.4	13	56	32	−62	00.8	8×11	20	−0.35	2.71[−20]	
MSH14−63, RCW86	G315.4−2.3	14	39	08	−62	15	40′ 直径	33	−0.5	2.46[−21]	2.5
MSH14−57	G316.3+0.0	14	37	43	−59	47	17′ 直径	42	−0.5	1.73[−20]	
MSH15−52A, Kes23[3]	G320.4−1.0	15	09	39	−58	49	8′ 直径	40	−0.6	7.44[−20]	
MSH15+52B[3]	G320.3−1.4	15	11	20	−59	07	14.5×12.5	25	(−0.5)	1.65[−20]	
Kes24	G322.3−1.2	15	23	03	−57	55.6	2.6′ 直径	4.3	−0.7	7.56[−20]	
MSH15−56	G326.2−1.7	15	48	26	−56	02.8	11×8.6	145	−0.24	1.84[−19]	
Kes27	G327.4+0.4	15	45	24	−53	39.9	10′ 直径	26	−0.78	3.10[−20]	
PKS1459−41, SN1006A. D.	G327.6+14.5	15	00	00	−41	45	30×22	25	−0.63	4.52[−21]	1.3
MSH15−57, Kes29	G328.4+0.2	15	51	47	−53	08.4	3.7′ 直径	18	−0.7	1.56[−19]	
豺狼座圈	G330.0+15.0	15	09		−40		270′ 直径	340	−0.3	5.56[−22]	
	G332.0+0.1	16	10	32	−50	51	—	—	—	—	
MSH16−51, Kes32	G332.5+0.1	16	11	48	−50	33.2	22′ 直径	25	−0.45	6.15[−21]	
PKS1613−50, RCW103	G332.4−0.4	16	13	44	−50	56.0	7.0×7.9	22	−0.34	4.73[−20]	3.9
	G336.7+0.5	16	28	30	−47	16.0	—	—	—	—	
部分 CTB33, MHR55	G337.0−0.1	16	32	10	−47	30	9.0×4.0	31	−0.8	1.02[−19]	
Kes39											
Kes40	G337.3+1.0	16	29	06	−46	29.5	11′ 直径	15	−0.2	1.48[−20]	
Kes41	G337.8−0.1	16	35	22	−46	51.9	5.0×4.0	15	−0.2	8.93[−20]	
MSH16−48, MHR58, Kes45	G342.1+0.1	16	50	11	−43	30.3	30′ 直径	54	−0.5	7.15[−21]	
CTB37A[3]	G348.5+0.1	17	11	12	−38	26.7	8.1×5.3	84	−0.5	2.33[−19]	
CTB37B[3]	G348.7+0.3	17	10	47	−38	07.7	3.8×6.0	47	−0.5	2.44[−19]	
	G349.7+0.2	17	14	37	−37	23.3	1.9×2.6	23	−0.6	5.54[−19]	
NGC6383	G355.2+0.1	17	30	09	−32	52.7	7.5×9.5	30	−0.6	5.01[−20]	
MSH17−39	G357.7−0.1	17	37	05	−30	56.9	4.4×3.4	38	−0.6	3.02[−19]	
	G359.4−0.1	17	41	24	−29	24.0	5.7×6.7	29	−0.4	9.05[−20]	
公元 1604 年开普勒新星 3C358	G4.5+6.8	17	27	43	−21	26.0	2.2′ 直径	20.0	−0.58	4.92[−19]	6.7 至 10.0

（续表）

名　　称	银河源号数	α(1950)			δ(1950)		角大小 $\varphi_1\times\varphi_2$ （角分）	在1京赫的流量密度 S_0（央）	在1京赫的频谱指数 α	在1京赫的表面亮度 Σ （瓦·米$^{-2}$·赫$^{-1}$·球面度$^{-1}$）	与太阳的距离 d （千秒差距）
		h	m	s	°	′					
A4	G 5.3−1.1	17	58	44	−24	54	12×18	38	−0.3	2.06[−20]	
A1, W28	G 6.5−0.1	17	57	30	−23	25	30′直径	300	−0.42	3.97[−20]	
	G11.2−0.4	18	08	32	−19	26.9	2.7×3.7	13	−0.2	1.55[−19]	
MSH18−18, Kes67	G18.9+0.3	18	21	21	−12	22.2	7.0×14	35	−0.57	4.25[−20]	
MSH18−1/3, Kes69	G21.8−0.5	18	30	16	−10	13.0	16′直径	64	−0.70	2.97[−20]	
W41, Kes70	G23.1+0.0	18	30	38	−08	48	45×60	350	−0.22	1.54[−20]	
	G27.3+0.0	18	38	30	−05	01	32′直径	41	−0.4	4.77[−21]	
Kes75, 4C−03.70	G29.7−0.2	18	43	49	−03	02.1	2.2×1.2	7.3	−0.5	3.29[−19]	
PKS1846−00, 3C391	G31.9+0.0	18	46	47	−00	58.7	3.5′直径	22	−0.50	2.13[−19]	
3C396.1	G32.0−4.9	19	04	32	−03	06.5	60′直径	19	−0.45	6.28[−22]	
	G33.0+0.1	18	48	50	−00	05	31×10	25	−0.4?	9.61[−21]	
4C+00.70	G33.7+0.0	18	50	04	+00	35.9	7.3×5.6	12	−0.5	3.49[−20]	
W44, 3C392	G34.6−0.5	18	53	45	+01	13.0	28×35	230	−0.40	2.79[−20]	
	G35.6−0.0	18	55	18	+02	06	10′直径	25	−0.3	2.98[−20]	
W47, CTB64	G37.6−0.1	18	57	42	+04	04	30′直径	48	−0.6	6.35[−21]	
部分NRAO 593	G39.2−0.3	19	01	31	+05	22.5	4.6′直径	16	−0.3	9.00[−20]	
3C396, CTB65											
W50, CTB69	G39.7−2.0	19	08	24	+05	04	50′直径	48	−0.7	2.29[−21]	
3C397	G41.1−0.3	19	05	05	+07	03.6	10′×8′	17	−0.3	2.53[−20]	
CTB72	G41.9−4.1	19	20		+06	00	165×140	150	−0.5?	7.74[−21]	
W49B	G43.3−0.2	19	08	39	+09	00.5	5.4×3.0	33	−0.33	2.43[−19]	14.0

库兹明 47, 部分 CTB70	G 45.5+0.1	19	11	59	+11	04.3	3.9×2.9	23	−0.4	2.42[−19]	
	G 46.8−0.3	19	15	48	+12	06	12′×5′	18	−0.5	3.57[−20]	
CTB63	G 47.6+6.1	18	54		+15	45	60′ 直径	12	(−0.5)	3.97[−22]	
部分 W51	G 49.0−0.3	19	20		+14	00	24′ 直径	180	−0.25	3.72[−20]	
3C400.2	G 53.7−2.2	19	36	20	+17	13	20′ 直径	8.5	−0.6	2.53[−21]	
天鹅座圈	G 74.0−8.6	20	49		+30	30	200×160	180	−0.45	6.70[−22]	0.77
	G 74.8+0.6	20	15	49	+36	36.1	4.7×3.9	(10)	(−0.5)	6.50[−20]	
	G 74.9+1.2	20	14	04	+37	03.8	9.3×4.7	(18)	(−0.5)	4.89[−20]	
W66, CTB91, DR4	G 78.1+1.8	20	20	44	+40	02.3	30×20	230	−0.7	4.56[−20]	
DR3	G 78.3+2.5	20	18	16	+40	36.5	13.3×9.5	18	−0.2	1.71[−20]	
DR12	G 78.5−0.1	20	29	31	+39	13.1	9.5×8.0	8	−0.2	1.25[−20]	
	G 78.6+1.0	20	25	25	+39	56.1	12×15	54	−0.5	3.57[−20]	
DR1	G 78.9+3.7	20	14	37	+41	45.1	37×38	480	−0.2	1.52[−20]	
DR11	G 79.8+1.2	20	28	32	+41	04.3	13×29	39	−0.2	1.23[−20]	
W63	G 82.2+5.4	20	17	15	+45	24.6	80×55	130	−0.5	3.52[−21]	
HB21	G 89.1+4.7	20	45		+50	30	120′ 直径	175	−0.15	1.44[−21]	
CTB104	G 93.6−0.3	21	27	11	+50	30	54′ 直径	45	−0.69	1.83[−21]	
CasA	G111.7−2.1	23	21	11	+58	32.8	4.0×3.8	3,000	−0.72	2.34[−17]	3.4
CTB1	G117.3+0.1	23	59	48	+62	11	130′ 直径	55	−0.5	3.87[−21]	
N49 在大麦哲伦	L. M. C.	05	26	00	−66	08.0	1.12′ 直径	3.5	−1.01	3.33[−19]	55
N63A 云中的三个	L. M. C.	05	35	39	−66	03.5	0.45′ 直径	1.9	−0.50	1.12[−18]	55
N132D 超新星遗迹	L. M. C.	05	25	32	−69	41.0	0.37′ 直径	4.6	−0.50	4.00[−18]	55

[1] 取自米尔恩(Milne, 1970)的文章。流量密度的单位是央(斯基)[1)], 1 央(斯基)$=10^{-23}$ 尔格·秒$^{-1}$·厘米$^{-2}$·赫$^{-1}$。

[2] 每一数值后面方括号中的值是 10 的方次的乘数。

[3] 一个源的可能子源。

[1)] 原文为流量单位,现已不用,所以改为央(斯基)。——译者注

加速足以使粒子摆脱恒星表面引力并使它沿磁力线外流到宇宙空间，粒子沿磁力线也是受到加速的。

粒子的注入率 r 由下式给出：

$$r=\frac{B\omega^2R^3}{Zec}\approx 7\times 10^{32}\left(\frac{\omega}{10^2}\right)^2\left(\frac{B}{10^{12}}\right)\left(\frac{R}{10^6}\right)^3 Z^{-1}\text{个粒子·秒}^{-1}。\qquad (4\text{–}451)$$

由(4–444)式、(4–447)式及(4–450)式可知，具有能量在 E 与 $E+dE$ 之间的粒子数 $N(E)dE$ 由下式给出：

$$N(E)dE=r\left[\left(\frac{dE}{d\omega}\right)\left(\frac{d\omega}{dt}\right)\right]^{-1}dE\propto E^{-2.5}dE,\qquad (4\text{–}452)$$

此能谱相当接近在高能宇宙线中观测到的能谱指数 -2.6。宇宙线的数密度随脉冲星的形成率而变，从而随超新星的形成率而变，这形成率据认为约为每 30 年出现一颗。在此数的不确定度范围内，可以解释观测到的高能宇宙线粒子数。在上述情况，这种理论只能解释能量范围为 $10^{18}\sim 10^{23}$ 电子伏的高能宇宙线。然而，在中子星附近，波能量或许不为加速粒子而耗尽，而在超新星爆发的星云状碎屑中可能加速中等相对论性粒子 (10^9 至 10^{16} 电子伏) (Kulsrud, Ostriker 和 Gunn, 1972)。

按照巴德等 (Baade 和 Zwicky, 1934) 的意见，一颗超新星是一颗普通恒星到中子星的过渡，伯比奇等(Burbidge, Burbidge, Fowler 和 Hoyle, 1957；以及 Hoyle 和 Fowler, 1960)随后提出了有关超新星爆发的一种机制。在一颗普通恒星演化终了时，它的核燃料已经用完，它的中心区密度的增高远比温度的增高要快得多。因此违反维里定理((3–188)式)而恒星核心必定发生灾变性爆聚。随后，恒星外壳向内运动的动力学能量转换成热，把较轻元素的温度升高到爆炸性状态。科尔盖特等(Colgate 和 White, 1966)后来指出，中微子的发射及吸收所释出的能量远比可利用的热核能量为多。超新星爆发的现代描述包括爆前超新星的起始成分及质量、理想气体、简并气体及光子气的状态方程(第 3.3 节及表 36)，中微子的产出率(第 4.3 节)，中微子的吸收截面及散射截面(第 4.4.3.6 节)，绝热流动及激波的流体动力学方程(第 3.5.6 及 3.5.7 节)。在表 53 中给出超新星遗迹表。

一旦一颗恒星的质量 M 大于稳定电子简并度的极限质量，即 $M\gtrsim 1.4587M_\odot$，则由于电子俘获引起的中微子发射所带走的热将比准静态收缩能够提供的热更快，因而将发生爆聚。达到原子核密度时，因为简并中子气的压力，恒星核心坍缩将会停止，向内降落物质的动能由向内进入的激波转换成热能。激波后面产生的热由中微子发射出去，中微子的能量则为恒星外壳所吸收。于是中微子能量的吸收引起向外逸出的激波，随后发生恒星外壳的绝热膨胀(Colgate 和 Johnson, 1960; Colgate 和 White, 1966; Arnett, 1966, 1967, 1968; Arnett 和 Cameron, 1967)。中微子被吸收的能量能够大到一颗恒星的结合能的大小，即 GM^2/R，或者当 $M\approx M_\odot$ 及 $R\approx 10^8$ 厘米时约为 10^{50} 尔格。中微子被吸收能量的径向较差引起起始速度 $v_0\approx[10^{50}/M_\odot]^{1/2}\approx 0.05c$ 的激波。当平面强激波通过理想气体传播时，气体的比热比值 $\gamma=5/3$ 及密度 $\rho(X)$ 是与恒星中心的距离 X 的函数，并由下式给出：

$$\rho(X)=\rho_0\left(\frac{X_0}{X}\right)^{7/4},\qquad (4\text{–}453)$$

式中 ρ_0 是在距离 X_0 处的密度，激波的速度 v 由下式给出：

$$v=v_0\left(\frac{X_s}{X_0}\right)^{1/4},\qquad (4\text{–}454)$$

式中在时间 t 以后激波的距离 X_s 由下式给出：

$$X_s = X_0\left(\frac{t}{t_0}\right)^{4/3}。\qquad (4–455)$$

(4–454)式表明，当激波通过星幔的密度梯度向外传播时，激波速度可能达到 $v\approx c$。这样一种过程可以解释许多中等相对论性宇宙线的加速度问题。然而，高能电子具有的同步加速辐射寿命远短于超新星的寿命。如果超新星的辐射是在其寿命内由同步加速辐射机制所致，则电子必须不断地被加速而不会是初始爆发的一种残存物。

4.5.3.3. 高能光子的起源

按照可能观测到宇宙 X 射线及 γ 射线的预言(Morrison, 1958)，好几个研究小组已观测到弥散的、各向同性的、河外星系的 X 射线及 γ 射线背景加上一些分立的银河系 X 射线源。图 31 所示弥漫背景的微分能谱可由下式给出 (Friedman, 1973):

$$\left.\begin{aligned}
&J(E)\propto E^{-1}\text{ 至 }E^{-2}(\text{厘米}^2\cdot\text{秒}\cdot\text{球面度}\cdot\text{千电子伏})^{-1}\\
&\qquad(\text{当 }100\text{ 电子伏}\leqslant E\leqslant 1\text{ 千电子伏});\\
&J(E)\propto E^{-0.4}(\text{厘米}^2\cdot\text{秒}\cdot\text{球面度}\cdot\text{千电子伏})^{-1}\\
&\qquad(\text{当 }1\text{ 千电子伏}\leqslant E\leqslant 10\text{ 千电子伏});\\
&J(E)\propto E^{-0.75}(\text{厘米}^2\cdot\text{秒}\cdot\text{球面度}\cdot\text{千电子伏})^{-1}\\
&\qquad(\text{当 }20\text{ 千电子伏}\leqslant E\leqslant 40\text{ 千电子伏});\\
&J(E)\propto E^{-1.3}(\text{厘米}^2\cdot\text{秒}\cdot\text{球面度}\cdot\text{千电子伏})^{-1}\\
&\qquad(\text{当 }40\text{ 千电子伏}\leqslant E\leqslant 1\text{ 兆电子伏});\\
&J(E)\propto E^{-2}(\text{厘米}^2\cdot\text{秒}\cdot\text{球面度}\cdot\text{千电子伏})^{-1}\\
&\qquad(\text{当 }1\text{ 兆电子伏}\leqslant E\leqslant 10\text{ 兆电子伏})。
\end{aligned}\right\}\qquad(4–456)$$

或用积分形式(Silk, 1973)

$$\begin{aligned}
&dJ(E)=90\text{ 千电子伏}\cdot(\text{厘米}^2\cdot\text{秒}\cdot\text{球面度}\cdot\text{千电子伏})^{-1}\\
&\qquad(\text{当 }E=0.25\text{ 千电子伏});\\
&dJ(E)=12E^{-0.5}\text{ 千电子伏}\cdot(\text{厘米}^2\cdot\text{秒}\cdot\text{球面度}\cdot\text{千电子伏})^{-1}\\
&\qquad(\text{当 }1\text{ 千电子伏}\leqslant E\leqslant 20\text{ 千电子伏});\\
&dJ(E)=40E^{-1.2}\text{ 千电子伏}\cdot(\text{厘米}^2\cdot\text{秒}\cdot\text{球面度}\cdot\text{千电子伏})^{-1}\\
&\qquad(\text{当 }20\text{ 千电子伏}\leqslant E\leqslant 1000\text{ 千电子伏})。
\end{aligned}$$

若角大小以 10° 考虑、精度在 5% 以内，(10 至 100)千电子伏的弥漫 X 射线是各向同性的(Schwartz, 1970)，并且它或许是河外星系的。低于 1 千电子伏的软 X 射线通量在银极方向强度增高，这可能是由于吸收效应。

亨利等(Henry 等, 1968)曾提出在低于 1 千电子伏范围中的陡的能谱可能是由于密度为 10^{-5} 至 10^{-6} 克·厘米$^{-3}$ 及温度为(3 至 8)$\times 10^5$ 开的热的星系际电离气体的热轫致辐射。当光学深度大于 1 时，从银道面接收到的比强度 I 由下式给出:

$$I=\frac{S}{4\pi N_{\mathrm{H}}\sigma},\qquad (4–457)$$

式中 N_{H} 是沿视线方向中性氢的柱密度，对宇宙丰度的吸收截面 σ 由下式给出 (Brown 和 Gould, 1970):

$$\sigma\approx 0.7\times 10^{-22}\left(\frac{h\nu}{1\text{ 千电子伏}}\right)^{-3}\text{厘米}^2\quad(\text{一直适用到 }532\text{ 电子伏}),$$

式中 $h\nu$ 是光子能量，用于 X 射线自由-自由发射率的源函数 S 随宇宙模型、星系际气体的

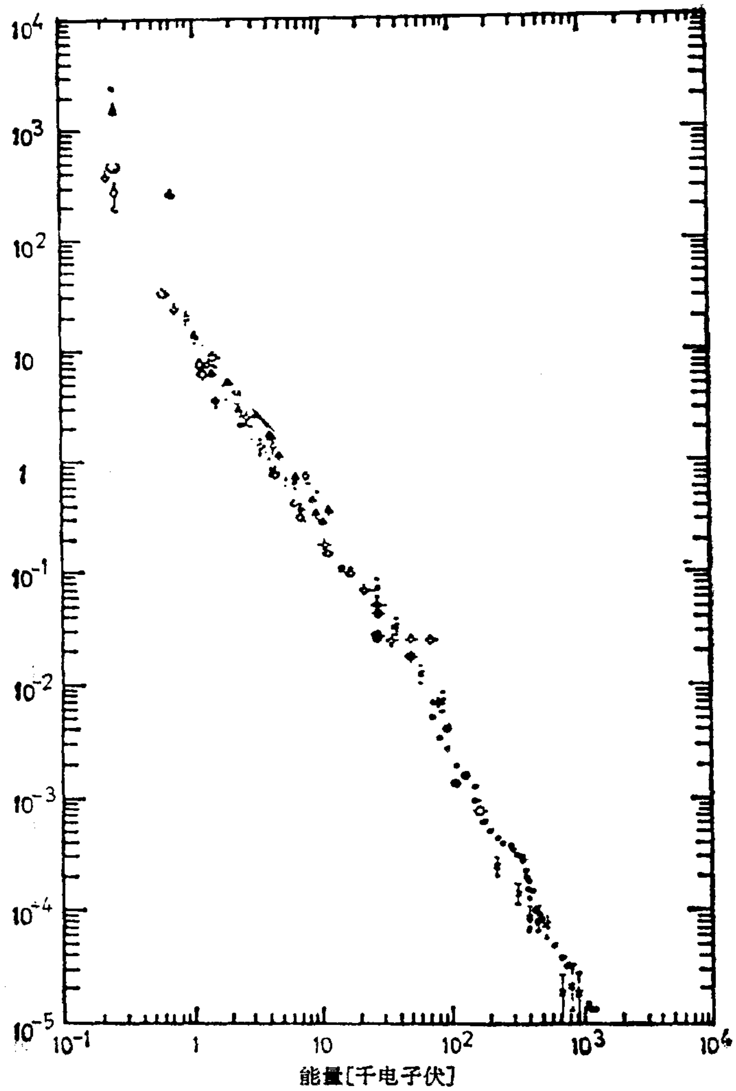


图31 0.27千电子伏至1000千电子伏的弥散X射线及γ射线背景的微分能谱(取自Oda, 1970的文章)。在1～100千电子伏能量范围内的资料用幂律谱$E^{-1.7\pm0.2}$表示，其中E是能量。图中每一种符号表示小田(Oda)所参考的不同的观测资料

温度T_0以及星系际物质的密度N_0而变。若H_0是哈勃常数，则当不存在银河系吸收的情况下，比强度I_0为(Field和Henry, 1964; Weymann, 1966, 1967):

$$I_0 \approx 5.44\times10^{-39} N_0^2 T_0^{-1/2} c H_0^{-1} \text{尔格·厘米}^{-3}\text{·秒}^{-1}\text{·球面度}^{-1}\text{·赫}^{-1},$$

式中

$$N_0 = \frac{3H_0^2 q_0}{4\pi G m_{\mathrm{H}}} \approx 2.2\times10^{-5} q_0 \text{ 厘米}^{-3}, \tag{4-458}$$

而q_0是减速因子。对稳恒态情况，N_0公式中的$q_0=0.5$。

数字系数5.44×10^{-39}尔格·厘米$^{-3}$·秒$^{-1}$·球面度$^{-1}$·赫$^{-1}$取为8.2×10^{-13}千电子伏·(厘米^3·秒·球面度·千电子伏)$^{-1}$的等效值。在(4-458)式中，I_0是厚度为cH_0^{-1}的一层气体的热轫致辐射强度；$N_0^2 \approx C\Sigma\langle N_e\rangle\langle N_i\rangle Z_i^2$，其中成块因子$C=\langle N^2\rangle/\langle N\rangle^2$，$\langle N_e\rangle$及$\langle N_i\rangle$

分别表示沿视线方向电子密度及离子密度的平均值。第 i 个离子具有电荷 eZ_i。星系际的热的电离气体的热韧致辐射所用详尽公式随宇宙模型而不同（参看 Field 和 Henry, 1964; Weymann, 1966, 1967; Benjamini, Londrillo 和 Setti, 1967; 以及 Bergeron, 1969）。例如，能量范围为(1～20)千电子伏的观测到的 X 射线能谱与理论模型的比较给出下列约束 (Silk, 1973)：

$$\langle g\rangle C\left(\frac{\rho}{\rho_{临界}}\right)^2\left(\frac{H_0}{50\text{ 公里·秒}^{-1}\text{·兆秒差距}^{-1}}\right)^3 f\lesssim 0.38\left(\frac{E}{kT}\right)^{-1/2}\exp\left(\frac{E}{kT}\right),\quad (4\text{–}459)$$

式中 $\langle g\rangle\approx 1$ 是沿视线方向的平均冈特因子，成块因子 $C=\langle\rho^2\rangle/\langle\rho\rangle^2$，$\rho$ 是星系际气体质量密度，闭合宇宙的临界质量密度是 $\rho_{临界}=3H_0^2/(8\pi G)$，$H_0$ 是哈勃常数，E 是所研究的 X 射线的能量，T 是星系际气体的温度的现代值，以及

$$f=\int_0^z\frac{(1+z)^{5/2-3/2\gamma}}{[1+(\rho z/\rho_{临界})]^{1/2}}[1-(1+z)^{4-3\gamma}]\exp\left(\frac{E}{kT}\right)dz,$$

其中 γ 是绝热指数，z 是红移以及当 $z\ll 1$ 时，$f\approx z$。如前面提及的，菲尔德等 (Field 和 Henry, 1964) 已指出软 X 射线发射(100 电子伏至 1 千电子伏)可能是由于 $\rho\approx 10^{-6}$ 克·厘米$^{-3}$ 及 $T\approx 10^6$ 开的星系际气体的热韧致辐射。反对这种解释的证据是当通过小麦哲伦云观测 X 射线时没有发现吸收现象(McCammon 等, 1971)。考西克等(Cowsik 和 Kobetich, 1972)以能量范围为 10 千电子伏到 1 兆电子伏的 X 射线背景能谱拟合 $\rho=3\times10^{-6}$ 克·厘米$^{-3}$ 及 $T=3\times10^8$ 开（设 $H_0=50$ 公里·秒$^{-1}$·兆秒差距$^{-1}$）的韧致辐射能谱来重新提出星系际热气体假说。

费尔顿等(Felten 和 Morrison, 1966; 以及 Brecher 和 Morrison, 1969)已提出由宇宙线电子对宇宙 2.7 开微波背景光子的康普顿散射产生弥漫的、各向同性的 X 射线背景的一些模型。这种模型流行的原因，一部分是由于高能 X 射线[(50 ～ 300)千电子伏]的能谱斜率与我们银河系中观测到的电子的能谱斜率大致符合所造成的。当总能量为 $E=\gamma mc^2$ 的一个快速电子与能量为 $\varepsilon=h\nu$ 的一个低能光子碰撞时，被散射光子的能量 ε_c 由下式给出（参看(4–371)式)：

$$\varepsilon_c=4\gamma^2\varepsilon/3\quad(\text{当 }\gamma h\nu\ll mc^2);\qquad(4\text{–}460)$$

而被一个电子散射的康普顿功率为(参看(4–419)式)：

$$P_c=\frac{4}{3}\gamma^2\sigma_T cU=2.66\times10^{-14}\gamma^2 U\text{ 电子伏·秒}^{-1}\quad(\text{当 }\gamma h\nu\ll mc^2),\qquad(4\text{–}461)$$

式中 $\sigma_T={}^*6.652448\times10^{-24}$ 厘米^2 是汤姆孙散射截面，各向同性辐射场的能量密度 U 在数值近似式中以电子伏·厘米$^{-3}$ 为单位。电子由逆康普顿辐射损耗所致寿命 τ_c 由下式给出：

$$\tau_c\approx\frac{\gamma mc^2}{P_c}\approx 2\times10^{19}\gamma^{-1}U^{-1}\text{ 秒},\qquad(4\text{–}462)$$

式中 U 也以电子伏·厘米$^{-3}$ 为单位。

电磁辐射在各个频谱区的能量密度值 U 示于图 29。相对论性电子的分布 $N(\gamma)$ 通常取能谱指数为 m 的幂律分布，

$$N(\gamma)d\gamma=N_0\gamma^{-m}d\gamma。\qquad(4\text{–}463)$$

假定低能光子具有平均能量为 $\langle\varepsilon\rangle=2.7kT$ 的黑体能量分布，其中 T 是黑体温度。假定电子分布及光子分布两者都是在整个相互作用区域内是均匀的及各向同性的，则康普顿散射辐射的比强度 I_c 由下式给出 (Felten 和 Morrison, 1966)：

$$I_c(h\nu)\approx 1.06\times10^{-15}(3.66\times10^{-6})^{3-m}N_0DUT^{(m-3)/2}\nu^{(1-m)/2}\ \text{尔格·秒}^{-1}\text{·厘米}^{-2}\text{·球面度}^{-1}\text{·赫}^{-1}$$
$$\approx 10^3(56.9)^{3-m}N_0DUT^{(m-3)/2}(h\nu)^{(1-m)/2}\text{电子伏·(厘米}^2\text{·秒·球面度·电子伏)}^{-1}, \tag{4-464}$$

式中 D 是与源的距离，参量在第一个数值近似式中用厘米·克·秒制单位，在第二个数值近似式中 N_0 的单位是厘米$^{-3}$，D 的单位是光年(1 光年 $=$ *9.460528×10^{17} 厘米)，U 的单位是电子伏·厘米$^{-3}$，T 的单位是开，$h\nu$ 的单位是电子伏。逆康普顿模型要求在整个星系际空间中存在 10^{-4} 电子伏·厘米$^{-3}$ 的超相对论性电子密度，以使可以用它与 $U\approx0.3$ 电子伏·厘米$^{-3}$ 的 2.7 开黑体光子辐射的散射来解释所观测到的背景。

若相对论性电子也引起频率为 ν_s 的同步加速辐射，则逆康普顿光子的能量 ε_c 由下式给出(Felten 和 Morrison, 1966)：

$$\varepsilon_c\approx 0.9\times10^2\,\frac{T\nu_s}{H}, \tag{4-465}$$

式中 ε_c 的单位是电子伏，在同步加速源中的磁场强度 H 的单位是微高斯，低能光子的温度 T 的单位是开，频率 ν_s 的单位是兆赫。同步加速辐射强度 I_s 与逆康普顿辐射强度 I_c 之比由下式给出(Felten 和 Morrison, 1966)：

$$\frac{I_s}{I_c}=\frac{H^2}{8\pi U}\left(\frac{2\times10^4T}{H}\right)^{(3-m)/2}, \tag{4-466}$$

式中的单位是厘米·克·秒制单位。这里热光子具有温度 T 及能量密度 U，m 为电子的频谱指数。同步加速辐射应具有的频谱指数为 $(1-m)/2$。对银河系及总星系的电磁辐射在不同频谱区的能量密度的估算值示于图 49。

若射电星系发出辐射达 10^9 年并产生相对论性电子的能量约 10^{60} 尔格，则由此提供的相对论性电子的能量密度约为 10^{-5} 电子伏·厘米$^{-3}$。

要把观测到的 X 射线能谱与逆康普顿散射理论作详尽的比较，需要知道，2.7 开黑体光子的角分布、能量为 ε 及 $T=2.7$ 开的光子的普朗克数密度分布：

$$N(\varepsilon)=\frac{8\pi}{h^3c^3}\frac{\varepsilon^2}{\left[\exp\left(\frac{\varepsilon}{kT}\right)-1\right]} \tag{4-467}$$

及康普顿散射过程的能谱(参看 Cowsik 和 Kobetich, 1972)。康普顿微分散射截面的精确表达式为(Klein 和 Nishina, 1929)：

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{r_0^2(1+\cos^2\theta)}{2[1+2q\sin^2(\theta/2)]^2}\left\{1+\frac{4q^2\sin^4(\theta/2)}{[1+\cos^2\theta][1+2q\sin^2(\theta/2)]}\right\}\text{厘米}^2\text{·球面度}^{-1}, \tag{4-468}$$

式中 $r_0=e^2/(mc^2)=$ *2.8179380×10^{-13} 厘米是经典电子半径，θ 是光子的偏转角，$q=\varepsilon/(mc^2)$ 是以 mc^2 为单位的入射光子的能量。在一个能量为 E 的电子与一个能量为 ε 的光子碰撞时，发射一个能量为 ε_x 的 X 射线光子的散射截面对入射光子及出射光子的角分布进行积分得出(Blumenthal 和 Gould, 1970)：

$$\sigma=\frac{8DB}{E^2\varepsilon}(1+x-2x^2+2x\ln x)\quad(\text{当 } x\lesssim1), \tag{4-469}$$

式中 $$B=(mc^2)^2,\ D=\pi r_0^2/4 \text{ 及 } x=B\varepsilon_x/(4E^2\varepsilon)。$$

也可能有相当大部分的各向同性的 X 射线背景是由于分立 X 射线源的重迭所形成

的。对一个X射线光度为L及空间密度为N的分立源，观测到的X射线背景通量为(Silk, 1973)：

$$F=\frac{cNL}{4\pi H_0}[g(z)-g(0)]\text{千电子伏}\cdot(\text{厘米}^2\cdot\text{秒}\cdot\text{球面度})^{-1}, \tag{4-470}$$

式中已假定在2千电子伏到$10(1+Z)$千电子伏的能量范围内分立源能谱是平坦的，F适用于2～10千电子伏的能量范围，而

$$\text{若 } \Omega<1,\ g(z)=\frac{1}{(1-\Omega)^{1/2}}\ln\left[\frac{(1+\Omega z)^{1/2}-(1-\Omega)^{1/2}}{(1+\Omega z)^{1/2}+(1+\Omega)^{1/2}}\right];$$

$$\text{若 } \Omega=1,\ g(z)=-2(1+z)^{-1/2};$$

$$\text{若 } \Omega>1,\ g(z)=\frac{1}{(\Omega-1)^{1/2}}\tan^{-1}\left[\frac{1+\Omega z}{\Omega-1}\right]^{1/2},$$

式中$\Omega=\rho/\rho_{\text{临界}}$是星系际气体质量密度与临界值$\rho_{\text{临界}}=3H_0^2/(8\pi G)$之比。小星系、正常星系、射电星系、赛弗特星系、星系团及类星体的空间密度分别是$10N_0$、N_0、$10^{-3}N_0$、$0.02N_0$、$10^{-5}\sim5\times10^{-6}N_0$及$3\times10^{-8}N_0$，其中$N_0=0.03$兆秒差距$^{-3}$。

贾科尼等(Giacconi 等, 1972)已列表给出分立X射线源，这些源中有许多与有名的天体的位置相符合，这些天体的位置及其他参量已在本书的各表中给出。分立X射线源及分立γ射线源可以分成下列典型类型。

已知是X射线源的射电星系及类星体(Silk, 1970, 1973)

源	射电光度 (0.3毫米～30米)	X射线光度 (2～10千电子伏)
NGC1275(英仙座A)		4×10^{45} 尔格·秒$^{-1}$
NGC4151(赛弗特星系)	1×10^{41} 尔格·秒$^{-1}$	2×10^{41}
NGC4486(M87)	1×10^{43}	3×10^{43}
NGC5158(半人马座A)	2×10^{41}	8×10^{41}
3C273(类星体)	2×10^{46}	7×10^{45}

已知是X射线源的星系团(Silk, 1973)

星系团	X射线光度 (2～10千电子伏)
室女座星系团	1.5×10^{43} 尔格·秒$^{-1}$
半人马座星系团	4×10^{43}
后发座星系团	5×10^{44}
英仙座星系团	1×10^{45}
艾贝尔 2256	8×10^{44}

超新星遗迹X射线源(Friedman, 1973)

超新星遗迹	年龄 (年)	X射线光度 (尔格·秒$^{-1}$)	能量范围 (千电子伏)
蟹状星云	900	10^{37}	1～200
仙后座A	300	5×10^{36}	1～10
第谷 1572	400	5×10^{36}	1～10
船尾座A	10^4～10^5	10^{36}	0.2～3
船帆座X、Y、Z	10^4～10^5	10^{36}	0.2～3
天鹅座射电圈	10^4～10^5	2×10^{36}	0.2～1
IC443		2×10^{34}	2～10
MSH15-52A		5×10^{35}	2～10

已知是 X 射线源的正常星系及小星系(Silk, 1973)

星　　系	X 射线光度(2～10 千电子伏)
大麦哲伦云	4×10^{38} 尔格·秒$^{-1}$
小麦哲伦云	1×10^{38}
M31	3×10^{39}
银河系	5×10^{39}

可能是 X 射线源的变星及(或)恒星(Forman 等, 1972; Giacconi 等, 1972; Schreier 等, 1972; 及 Tananbaum 等, 1972)

源	α(1950.0)			δ(1950.0)			交食周期(日)	脉冲周期(秒)
	h	m	s	°	′	″		
2U(0115-73)	01	15	02	−73	41	24	4.0	—
PSR0531+21[1]	05	31	31	21	58	55	—	0.033129
2U(0900-40)	09	00	19	−40	22	48	8.95	—
半人马座 X-3	11	19	00	−60	19	12	2.08712(4)	4.843496(7)
2U(1543-47)	15	43	50	−47	33	36	—	类似新星
天蝎座 X-1	16	17	04.3	−15	31	13	—	—
武仙座 X-1	16	56	42	35	25		1.70017(4)	1.237772(1)
2U(1700-37)	17	00	19	−37	48	00	3.4	—
天鹅座 X-1	19	56	22.0	35	03	36	5.6	≳0.1
天鹅座 X-3	20	30	37.6	40	47	13	—	17280.0
天鹅座 X-2	21	42	36.91	38	05	27.9	—	—

脉冲星 PSR0531+21 在 1～10^6 千电子伏的能量范围内的 X 射线光度是 10^{36} 尔格·秒$^{-1}$，而大多数食变星在 1～10 千电子伏的能量范围内是 10^{36}～10^{37} 尔格·秒$^{-1}$。

最近，已观测到在 0.1 至 1.2 兆电子伏能量范围内的硬 X 射线或 γ 射线辐射的爆发。这些爆发具有下列特征 (Klebesadel, Strong 和 Olson, 1973; Cline, Desa, Klebesadel 和 Strong, 1973; 以及 Wheaton 等, 1973)：

γ 射线爆发的特征

能量范围	0.2～1.5 兆电子伏
持续时间	0.1～30 秒
对时间积分的通量密度	$\Phi=\int E\frac{dN}{dE}dE=10^{-5}$ 至 2×10^{-4} 尔格·厘米$^{-2}$
能谱	$\frac{dN}{dE}=I_0\exp\left(\frac{-E}{E_0}\right)$ 个光子·厘米$^{-2}$·千电子伏$^{-1}$·个爆发$^{-1}$

其中 100 千电子伏 $\leqslant E_0\leqslant$ 300 千电子伏。

与射电星系、类星体以及或许与星系团、正常星系成协的分立 X 射线源可以用逆康普顿机制解释。把光子能量、电子能量、电子分布、同步加速辐射及 X 射线辐射等联系起来的相应的方程由(4-460)至(4-466)式给出。详尽的逆康普顿公式由 (4-467) 至 (4-469) 式给出。结合热气体的轫致辐射发射的模型有可能解释从星系团及超新星遗迹来的 X 射线发射。一个温度为 T、电子密度为 N_e 及半径为 R 的光学薄的等离子体的自由-自由发射(轫致辐射)由下式给出(参看(1-219)式)：

1) 原文为 NP0532，按现在国际通用脉冲星命名法改为 PSR0531+21，也可用 P0531+21。——译者注

$$I(\nu)=5.4\times10^{-39}\langle g\rangle RN_e^2T^{-1/2}$$
$$\cdot\exp\left(\frac{-h\nu}{kT}\right)\text{尔格·秒}^{-1}\cdot\text{厘米}^{-2}\cdot\text{球面度}^{-1}\cdot\text{赫}^{-1};$$
$$I(E)=800\langle g\rangle\left(\frac{R}{10^{28}\text{ 厘米}}\right)\left(\frac{N_e}{10^{-5}\text{ 厘米}^{-3}}\right)^2\left(\frac{T}{10^6}\right)^{-1/2} \tag{4-471}$$
$$\cdot\exp\left(\frac{-h\nu}{kT}\right)\text{千电子伏}\cdot(\text{厘米}^2\cdot\text{秒}\cdot\text{球面度}\cdot\text{千电子伏})^{-1},$$

式中 $E=h\nu$ 是 X 射线光子能量，$\langle g\rangle\approx1$ 是平均冈特因子。作为一个例子，在 2 千电子伏 $\leqslant E\leqslant10$ 千电子伏的能量范围内，星系团 X 射线光度为 $10^{43}\sim10^{45}$ 尔格·秒$^{-1}$，可以用 $T=10^7\sim10^8$ 开、$N_e=10^{-4}\sim10^{-3}$ 厘米$^{-3}$ 及 $R\approx1$ 兆秒差距的一团热气体来解释。

有几个可变 X 射线源已证认为双星系统，在这种系统中从一个可见主星（一颗蓝超巨星）到一颗看不见的伴星（一颗中子星或一个黑洞）的质量转移可能发生吸积。主星要足够大，双星系统要足够靠近，则洛希临界等势面是充满的（参看(3-246)式及(3-247)式）。例如，半人马座 X-3 作为一颗 X 射线伴星的双星的物理参量由下式给出（Schreier 等，1972）：

$$\left.\begin{aligned}&415\text{ 公里·秒}^{-1}<v<588\text{ 公里·秒}^{-1};\\&1.19\times10^{12}\text{ 厘米}<\frac{A}{2}<1.69\times10^{12}\text{ 厘米};\\&30.7\times10^{34}\text{ 克}<\frac{M^3}{(M+m)^2}<8.81\times10^{34}\text{ 克};\\&0.84\times10^{12}\text{ 厘米}<R<\frac{A}{2}\left(1+\frac{m}{M}\right),\end{aligned}\right\} \tag{4-472}$$

其中 v 是质心系的轨道速度，$A/2$ 是质心系的轨道半径，R 是中心掩星的半径，m 及 M 是两个天体的质量。根据武仙座 X-1 的光变曲线可以推导出类似的数据。若 i 表示轨道倾角，T 表示轨道周期，$\Delta\tau$ 表示周期变化的半振幅，τ 表示平均脉冲周期，则推导出的参量为（Tananbaum 等，1972）：

	半人马座 X-3	武仙座 X-1
$v\sin i=\Delta\tau c/T$	415.1 ± 0.4 公里·秒$^{-1}$	169.2 ± 0.4 公里·秒$^{-1}$
$A\sin i/2=Tv\sin i/2\pi$	$1.191\pm0.001\times10^{12}$ 厘米	$3.95\pm0.001\times10^{11}$ 厘米
$\frac{M^3\sin^3 i}{(m+M)^2}=\frac{4\pi^2(A\sin i)^3}{8T^2G}$	$3.074\pm0.008\times10^{34}$ 克	$1.69\pm0.01\times10^{33}$ 克

在双星系统之间的质量流动的判据为（参看(3-247)式）：

$$\frac{R}{A}>0.38+0.2\log\left(\frac{M}{m}\right)。 \tag{4-473}$$

若质量为 m 的一颗中子星正以速度 v 通过质量密度为 ρ 的气体，则在下列半径（参看(3-145)式）以内的物质向内落到中子星上：

$$R_A=\frac{Gm}{v^2}=1.3\times10^{14}\left(\frac{10\text{ 公里·秒}^{-1}}{v}\right)^2\left(\frac{M}{M_\odot}\right)\text{厘米} \tag{4-474}$$

以及球对称吸积的质量吸积率为（参看(3-416)式）：

$$\frac{dm}{dt}=\pi\xi R_A^2v\rho, \tag{4-475}$$

这里因子 ξ 小于 1，它是辐射压力改正引起的。在光学薄的气体中被电子散射的 X 射线光度 L_x 产生一种成平方反比的推斥力，这种推斥力有效地减少 X 射线源的引力

(Eddington, 1926)。

$$\xi \approx \left[1-10^{-4.6}\left(\frac{L_x}{L_\odot}\right)\left(\frac{M_\odot}{m}\right)\right]^2, \tag{4-476}$$

式中 $L_\odot$ 及 $M_\odot$ 分别表示太阳光度及太阳质量。这种效应对吸积所提供的 X 射线光度确定了一个上限

$$L_x < 10^{38} \text{ 尔格·秒}^{-1}, \tag{4-477}$$

这称为爱丁顿极限。吸积提供的光度 L_x 由下式给出(参看(3-424)式):

$$L=\left(\frac{dm}{dt}\right)\left(\frac{Gm}{R}\right)。 \tag{4-478}$$

因为被汲取到致密伴星上的气体具有高的角动量,吸积将不是球对称的,而气体将在一个吸积盘内环绕致密源旋转。在这种情况下,用于(4-475)式中相应的速度为:

$$v \approx \left(\frac{2Gm}{R}\right)^{1/2} \approx 1.15\times 10^{10}\left(\frac{m}{M_\odot}\right)^{1/2}\left(\frac{R}{10^6}\right)^{-1/2} \text{ 厘米·秒}^{-1}。 \tag{4-479}$$

粘滞性消除角动量并加热气体以提供 X 射线轫致辐射。气体流动的动力学受恒星自转及恒星磁场两者支配。例如,在中子星的情况下,吸积物质沿磁力线向磁极输送。在这种情况,X 射线的发射不是来自吸积盘,而是来自靠近磁极的热斑。普伦德加斯特等(Prendergast 和 Burbidge, 1968; Pringle 和 Rees, 1972; Davidson 和 Ostriker, 1973; 以及 Lamb, Pethick 和 Pines, 1973)已讨论过这类效应的细节。

第五章　天体测量学和宇宙学

5.1.　方位

5.1.1.　地球形状

对参考来说，在海平面上的地球表面可以用长轴为 a_e 及偏心率为 e 的椭圆绕极轴旋转来表示。扁率 f(或椭率)与偏心率 e 的关系为：

$$e^2=2f-f^2。\tag{5-1}$$

扁率也称为椭率。长轴 a_e 是赤道半径，它与极半径 a_p 的关系为：

$$a_p=a_e(1-f)=a_e(1-e^2)^{1/2},\tag{5-2}$$

而平均半径 $\langle a\rangle$ 则为：

$$\langle a\rangle=(a_e^2a_p)^{1/3}\ ^{1)}。\tag{5-3}$$

直到 1964 年为止，国际上采用的参考椭球参数是海福特椭球(Hayford, 1910)的参数。此椭球的 $a_e=6.378388\times10^8$ 厘米及 $f=0.0033670=1/297.0$。新的天文常数系统(Clemence, 1965)采用 $a_e=6.378160\times10^8$ 厘米及一个导出值 $f=0.0033529=1/298.25$ [2)]。

对于质量为 M 及角速度为 ω 的一个均匀流体椭球，我们得出关系式(Newton, 1687)：

$$\frac{a_e-a_p}{\langle a\rangle}=\frac{5}{4}\frac{\omega^2\langle a\rangle^3}{GM},\tag{5-4}$$

式中牛顿引力常数[3)]

$$G=6.668\times10^{-8}\ 达因\cdot厘米^2\cdot克^{-2}。$$

对于地球，我们得出下列值[3)]：

$$\left.\begin{aligned}M&=5.977\times10^{27}\ 克,\\ \omega&=7.292115\times10^{-5}\ 弧度\cdot秒^{-1},\\ a_e&=6.378160\times10^8\ 厘米,\\ \langle a\rangle&=6.371030\times10^8\ 厘米。\end{aligned}\right\}\tag{5-5}$$

地球表面可以看成为一个恒量势 U 的大地水准面，其中

$$U=V-\frac{1}{2}\omega^2r^2\cos^2\varphi,\tag{5-6}$$

式中 r 及 φ 分别是地面上一点的半径及地心纬度，而引力势 V 满足以极坐标表示的拉普拉斯方程(Laplace, 1782, 1816, 1817)

$$\nabla^2V=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2V}{\partial\lambda^2}=0,\tag{5-7}$$

式中 $\theta=\pi/2-\varphi$，而包含经度 λ 的项由于假定对 z 轴为旋转对称，可以不予考虑。因而拉普拉斯方程(5-7)式可解得(Legendre, 1789, 1817)：

---

1) 原文误为 1/2。——译者注

2) 最新的天文常数系统采用 $a_e=6.378140\times10^8$ 厘米及推导值 $f=0.00335281=1/298.257$，见 IAU Information Bulletin No. 37, 1977 January。——译者注

3) 最新的值采用下列值：——经霍耶

$G=6.672\times10^{-8}$ 达因·厘米²·克⁻²；　　$M=5.9742\times10^{27}$ 克；

$\omega=7.29211515\times10^{-5}$ 弧度·秒⁻¹(公元 1900 年)；　　$a_e=6.378140\times10^8$ 厘米；

$\langle a\rangle=6.371004\times10^8$ 厘米。——译者注

$$V=-\frac{GM}{r}\sum_{n=0}^{\infty}J_n\left(\frac{a_e}{r}\right)^n P_n(\theta), \tag{5-8}$$

式中带谐系数 J_n 是无量纲常数，$P_n(\theta)$ 是勒让德多项式。假定坐标系的原点位于质量中心，$J_1=0$，并取 $J_0=1$，式(5-8)取近似形式：

$$V\approx-\frac{GM}{r}+\frac{GMa_e^2J_2}{2r^3}(3\sin^2\varphi-1)。 \tag{5-9}$$

当假定 U 在各处是常数时，由(5-6)式及(5-9)式可知

$$f=\frac{a_e-a_p}{a_e}=\frac{3}{2}J_2+\frac{1}{2}m, \tag{5-10}$$

式中在赤道上的离心加速度与在赤道上的重力加速度之比由下式给出：

$$m=\frac{\omega^2a_e^3}{GM}。 \tag{5-11}$$

对于地球，我们得到：

$$m=3.4678\times10^{-3}\ {}^{1)}, \tag{5-12}$$

而人造卫星测量给出(Clemence, 1965)：

$$J_2=1.08270\times10^{-3}\ {}^{1)}, \tag{5-13}$$

导致

$$f=3.35289\times10^{-3}=\frac{1}{298.25}\ {}^{1)}。 \tag{5-14}$$

J_2 能够从人造卫星升交点 Ω 赤经的长期运动以及近地点角距 ω 的观测推导得出。作为一级近似，我们得出(Krause, 1956; Lecar, Sorenson 和 Eckels, 1959)：

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Omega}{\partial t}&=-3\pi\left(\frac{a_e}{a_0}\right)^2\frac{\cos i_0J_2}{(1-e_0^2)^2}\ \text{弧度/周期}\\&\approx-9.97\left(\frac{a_e}{a_0}\right)^{3/2}(1-e_0^2)^{-2}\cos i_0\ \text{度/日；}\\\frac{\partial\omega}{\partial t}&=6\pi\left(\frac{a_e}{a_0}\right)^2\frac{\left(1-\frac{5}{4}\sin^2i_0\right)}{(1-e_0^2)^2}J_2\ \text{弧度/周期}\\&\approx4.98\left(\frac{a_e}{a_0}\right)^{3/2}(1-e_0^2)^{-2}(5\cos^2i_0-1)\quad\text{度/日，}\end{aligned} \tag{5-15}$$

式中 t 是时间变数，$a_e=$*6.378140×10^8 厘米是地球半径，人造卫星轨道的半长径 a_0 与轨道周期 P 及近点平均运动 n 的关系为：

$$P=\frac{2\pi a_0^{3/2}}{(GM)^{1/2}}$$

以及

$$n^2a_0^3=GM\left\{1+\frac{3}{4}\frac{J_2(1-e_0^2)^{1/2}}{a_0^2(1-e_0^2)^2}(1-3\cos^2i_0)\right\},$$

式中对于地球来说，引力常数 G 与质量 M 的乘积为：

$$GM=3.986032\times10^{20}\ \text{厘米}^3\cdot\text{秒}^{-2}\ {}^{2)},$$

或 $\sqrt{GM}=17.043615$ [2)]（设平均运动的单位是每天的绕转圈数以及轨道半长径以地球半径为单位）。人造卫星轨道的偏心率 e_0 及倾角 i_0 在 5.4.2 节中与 a、Ω 以及 ω 一起确定。对人造卫星来说，这些变数是相对于地心、地球的赤道面及发射时刻的垂直圈而确定的。

1) 按最新数据，$m=3.4614\times10^{-3}$，$J_2=1.08264\times10^{-3}$，$f=3.35281\times10^{-3}=1/298.257$。——译者注

2) 按最新数据 $GM=3.986005\times10^{20}$ 厘米$^3\cdot$秒$^{-2}$ 计算得出的值。——译者注

人造卫星测量表明,(5-8)式的谐振系数 J_n 取下列值[1]:

$$J_2=1082.645\times10^{-6}\pm6 \qquad J_3=-2.546\times10^{-6}\pm20$$

$$J_4=-1.649\times10^{-6}\pm16 \qquad J_5=-0.210\times10^{-6}\pm25$$

$$J_6=0.646\times10^{-6}\pm30 \qquad J_7=-0.333\times10^{-6}\pm39$$

$$J_8=-0.270\times10^{-6}\pm50 \qquad J_9=-0.053\times10^{-6}\pm60$$

$$J_{10}=-0.054\times10^{-6}\pm50 \qquad J_{11}=0.302\times10^{-6}\pm35$$

$$J_{12}=-0.357\times10^{-6}\pm47 \qquad J_{13}=-0.114\times10^{-6}\pm84$$

$$J_{14}=-0.179\times10^{-6}\pm63$$

测量高次系数的详尽公式见莱卡尔等(Lecar, Sorenson 和 Eckels, 1959; O'Keefe, Eckels, 和 Squires, 1959; King-Hele, 1961; Kozai, 1959, 1961, 1966)的文章及考拉(Kaula, 1966)的书。

1) 这是1964年的数据,按最新数据应取下列值:

$$J_2=1082.637\times10^{-6}\pm1 \qquad J_3=-2.541\times10^{-6}\pm3$$

$$J_4=-1.618\times10^{-6}\pm1 \qquad J_5=-0.228\times10^{-6}\pm4$$

$$J_6=0.552\times10^{-6}\pm2 \qquad J_7=-0.352\times10^{-6}\pm7$$

$$J_8=-0.205\times10^{-6}\pm2 \qquad J_9=-0.154\times10^{-6}\pm7$$

$$J_{10}=-0.237\times10^{-6}\pm2 \qquad J_{11}=0.312\times10^{-6}\pm6$$

$$J_{12}=-0.192\times10^{-6}\pm2 \qquad J_{13}=-0.339\times10^{-6}\pm7$$

$$J_{14}=0.105\times10^{-6}\pm4 \qquad J_{15}=0.105\times10^{-6}\pm9$$

$$J_{16}=0.034\times10^{-6}\pm4 \qquad J_{17}=-0.220\times10^{-6}\pm10$$

$$J_{18}=-0.102\times10^{-6}\pm5 \qquad J_{19}=0.099\times10^{-6}\pm11$$

$$J_{20}=-0.119\times10^{-6}\pm7 \qquad J_{21}=-0.083\times10^{-6}\pm11$$

$$J_{22}=0.092\times10^{-6}\pm5 \qquad J_{23}=0.145\times10^{-6}\pm15$$

$$J_{36}=0.199\times10^{-6}\pm22 \qquad J_{35}=-0.134\times10^{-6}\pm36$$

可参看 Smithsonian Astrophysical Observatory Special Report 353, p. 276, 1973。——译者注

地面重力加速度 g 由下式给出：

$$g=-\nabla U。\tag{5-16}$$

由(5-6)式、(5-9)式及(5-16)式可知：

$$g=g_e\left[1+\left(\frac{5m}{2}-f\right)\sin^2\varphi\right],\tag{5-17}$$

式中赤道重力加速度

$$g_e=\frac{-GM}{a_e^2}\left(1+\frac{3}{2}J_2-m\right)。\tag{5-18}$$

(5-17)式通称为克来罗定理，因为这是克来罗(Clairaut, 1743)假定旋转体是个均匀流体椭球而推导出的结果。保留高次项，得到下列结果：

$$g=g_e\left[1+\left(\frac{5}{2}m-f-\frac{17}{14}mf\right)\sin^2\varphi+\left(\frac{f^2}{8}-\frac{5}{8}mf\right)\sin^2 2\varphi\right]。\tag{5-19}$$

利用前面有关地球的方程式给出的 f、m、J_2 和 a_e 值，我们得出：

$$g_e=978.03090\ \text{厘米·秒}^{-2}\tag{5-20}$$

以及

$$g=(978.03090+5.18552\sin^2\varphi-0.00570\sin^2 2\varphi)\ \text{厘米·秒}^{-2}。\tag{5-21}$$

地球大地水准面的表面由下式给出：

$$r=a_e(1-f\sin^2\varphi)。\tag{5-22}$$

地面上位置的另一种测量是天文纬度 φ，它的定义是在地面上一点的铅垂线的方向与赤道面之间的最小角度。由(5-17)式可知，在高度为 h 处的天文纬度要比海平面上的相应值大 $\Delta\varphi$:

$$\Delta\varphi=\frac{-h}{a_e g_e}\frac{\partial g}{\partial\varphi}\approx\frac{-h}{a_e}\left(\frac{5m}{2}-f\right)\sin 2\varphi\approx-1.72\times10^{-4}h\sin 2\varphi\ \text{角秒},\tag{5-23}$$

上式数值近似中 h 以米为单位，假定1弧度＝206264.806角秒。

当从天文纬度归算到海平面上的值并作局部重力异常的改正以后，就称为测地纬度 φ。地心径矢 ρ 及地心纬度 φ' 与测地纬度 φ 的关系为：

$$\tan\varphi'=(1-f)^2\tan\varphi\tag{5-24}$$

或 $$\varphi'-\varphi=-11'32.7430''\sin 2\varphi+1.1633''\sin 4\varphi-0.0026''\sin 6\varphi$$

以及 $$\rho=a_e(0.998327073+0.001676438\cos 2\varphi-0.000003519\cos 4\varphi+0.000000008\cos 6\varphi)。$$

莫里森等(Morrison 和 Pines, 1961)已给出把 h 及 φ 与 ρ 及 φ' 联系起来的级数表达式。

5.1.2. 在天球上的坐标

天球坐标由参考在天球上的下列点和大圆而确定。

北天极和南天极　地球自转轴向北和向南的延长线分别与天球的交点。

天顶及天底　观测者的铅垂线向上及向下的延长线分别与天球的交点。

天赤道　地球赤道面的投影与天球相交所确定的大圆。

黄道　在一年的过程中太阳在天球上的视大圆轨迹。黄道面与天赤道面的交角约23°27′。这个倾角的更精确的值以黄赤交角在历书中列出。

春分点　太阳由天赤道以南穿到天赤道以北时与天赤道的交点。春分点的符号为 Υ[1]。

1) 原文误为 γ。——译者注

英国格林尼治天文台观测到的春分点的时角和中天时刻在历书中列表给出。

地平　在观测者的位置上，垂直于观测点的铅垂线的平面与天球相交的大圆叫做地平。

子午圈　垂直于地平面并通过天顶及北天极的大圆。

北点　子午圈与地平圈向北的交点。

垂直圈　通过天顶及天底的任何大圆，所以是垂直于地平圈的。

时角　通过北天极和南天极的任何大圆，所以是垂直于天赤道的。

黄经圈[1]　通过黄极的任何大圆，所以是垂直于黄道的。

银道　银河系对称面的投影与天球相交的大圆。银道面与天赤道面的交角是 62°36′。

北银极　银河系自转轴的向北延长线与天球的交点。此点的赤道坐标是 $\alpha=12^h49^m$ 及 $\delta=27°24'$(1950.0) (Blaauw, Gum, Pawsey 和 Westerhout, 1960)。

银心　银河系中心的赤道坐标是 $\alpha=17^h42^m24^s$ 及 $\delta=-28°55'$(1950.0) (Blaauw 等, 1960)。

银经圈[2]　通过银极的任何大圆，所以是垂直于银道的。天球坐标系有：

地平坐标系　天体的高度（即地平纬度）a 是沿通过天体的垂直圈测出的从地平到天体的角度（以度为单位）。当天体在地平以上或以下时，分别称测得的高度为正或负。天顶距 z，即 $90°-a$。方位角 A 是从南点沿地平向西[3]测量到通过天体的垂直圈的垂足的角度（以度为单位）。

赤道坐标系　天体的赤纬 δ 是沿通过天体的时圈测量从天赤道到天体的角度（以度为单位）。赤纬自天赤道向北为正、向南为负。赤经 α 是沿天赤道测量从春分点向东到通过天体的时圈的垂足的角度（以度或小时为单位）。时角 h 就是沿天赤道从子午圈的垂足向西测量到通过天体的时圈的垂足的角度（是以度或小时为单位的）。

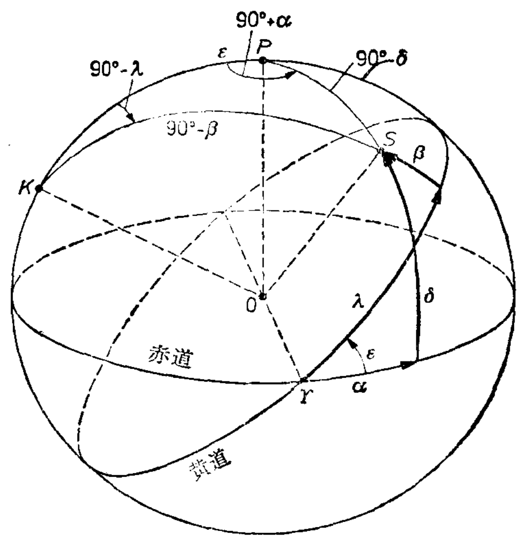


图 32　天球上赤道坐标系及日心坐标系的图示。图中 α 及 δ 分别表示赤经及赤纬，λ 及 β 分别表示黄经及黄纬，Υ 表示春分点，ε 表示黄赤交角，以及 K、P、S 及 O 分别表示黄极、北天极、天体方位及观测者。黄道是太阳在一年的时间内在天球上经过的视轨迹，天赤道是地球赤道投影在天球上的交线

黄道坐标系　天体的黄纬 β 是沿通过天体的黄经圈测量从黄道到天体的角度（以度为单位）。黄纬自黄道向北为正、向南为负。黄经 λ 是沿黄道测量从春分点向东到通过天体的黄经圈的垂足的角度（以度为单位）。

银道坐标系　天体的银纬 b^{II} 是沿通过天体的银经圈测量从银道到天体的角度（以度为单位）。银纬自银道向北为正、向南为负。银经 l^{II} 是沿银道测量从银心方向向东到通过天体的银经圈的垂足的角度（以度为单位）。银道坐标的旧的奥尔森系统 (Ohlsson, 1932) 把北银极取为 $\alpha=12^h40^m$，$\delta=28°$(1900.0)，旧系统银经的零点取为银道面对天赤道的升交

1) 原文为黄纬圈，按我国习惯，译为黄经圈。——译者注

2) 原文为银纬圈，按我国习惯，译为银经圈。——译者注

3) 原文误为从北点沿地平向东测量。——译者注

点(1900.0)。旧银道坐标系的银心是 $l^{\mathrm{I}}=327.69^\circ$ 和 $b^{\mathrm{I}}=-1.40^\circ$，而新银道坐标系的银极是 $l^{\mathrm{I}}=347.7^\circ$ 和 $b^{\mathrm{I}}=88.51^\circ$。两个系统间的交角是 1.4866°。

图 32 给出在天球上的赤道坐标及地心坐标的图示。

5.1.3. 岁差、章动、光行差及折射

地球的扁率以及黄赤交角导致了由于月球及太阳的较差引力效应引起天赤道在黄道上的缓慢转动。这种效应引起春分点沿黄道以约每年 50 角秒的速率向西运动。把地球质心与其他行星质心间的引力耦合，春分点以每年约 0.12 角秒的附加速率向东运动以及黄赤交角每年减小约 0.47 角秒。月球-太阳效应及行星效应两者的净结果是赤经 m、赤纬 n 及黄经 χ 的总岁差，这是喜帕恰斯(公元前 125 年)首先观测到的。理论值为(Newcomb, 1892, 1906)：

$$\left.\begin{aligned} m&=3.07234+0.00186T \text{ 时秒/年;}\\ m&=46.0851+0.0279T \text{ 角秒/年;}\\ n&=20.0468-0.0085T \text{ 角秒/年;}\\ \chi&=50.2564+0.0222T \text{ 角秒/年,}\end{aligned}\right\} \tag{5-25}$$

其中 T 是从 1900.0 算起的回归世纪数。1900.0 参考历元的黄赤交角是 $23^\circ27'08''.26$[1]。赤经的增量 $\Delta\alpha$ 和赤纬的增量 $\Delta\delta$ 如下：

$$\begin{aligned}\Delta\alpha&=[m+n\sin\alpha\tan\delta]N;\\ \Delta\delta&=[n\cos\alpha]N,\end{aligned} \tag{5-26}$$

式中 α 及 δ 分别是参考历元的赤经及赤纬，N 是所要求日期与参考日期间的年数。例如根据(5-25)式，参考历元 1950.0的 m 及 n 值是 $m=3.07327$ 时秒/年及 $n=20.0426$ 角秒/年。

布拉德雷(Bradley, 1748)首先在地轴进动中观测到周期性章动项，这是月球绕地球及地球绕太阳作周期轨道运动所引起的[2]。主要项随月球轨道交点的赤经而变，具有 18.6 年的周期及 $N=9''.210$(1900.0)[3]的振幅。常数 N 称为章动常数。章动可以按伍拉德(Woolard, 1953)给出的理论分为对太阳赤经的改正 $\Delta\psi$ 及对平均黄赤交角改正 $\Delta\varepsilon$。赤经的章动在历书中给出，黄赤交角的章动 $\Delta\varepsilon$ 是 $-B$，其中贝塞耳日数 B 在历书中列表给出。对赤经和赤纬的一级章动改正如下：

$$\begin{aligned}\Delta\alpha&=(\cos\varepsilon+\sin\varepsilon\sin\alpha\tan\delta)\Delta\psi-\cos\alpha\tan\delta\Delta\varepsilon;\\ \Delta\delta&=\sin\varepsilon\cos\alpha\Delta\psi+\sin\alpha\Delta\varepsilon,\end{aligned} \tag{5-27}$$

式中 α 及 δ 分别是参考历元的赤经及赤纬，ε 是黄赤交角，这是在历书中给出的。

布拉德雷(Bradley, 1728)首先观测到光行差，这是天体的视方向向观测者运动方向的偏斜。光行差的大小 $\Delta\theta$ 随观测者的速度 v 与光速 c 的比值及观测方向与运动方向间的夹角 θ 而变。在视位置减平均位置的意义下，位移 $\Delta\theta$ 由下式给出：

$$\tan\Delta\theta=\frac{v\sin\theta}{c+v\cos\theta} \tag{5-28}$$

或
$$\Delta\theta\approx\frac{v}{c}\sin\theta-\frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2\sin 2\theta+\left(\frac{v}{c}\right)^3(\sin\theta\cos^2\theta-0.33\sin^3\theta)+\cdots。$$

1) 2000.0 参考历元的黄赤交角是 $23^\circ26'21''.448$。

2) 原文误为"这是太阳和月球在它们绕地球的轨道上的周期运动所引起的"。——译者注

3) $N=9''.2109$(2000.0)。——译者注

对地球运动来说，上式第二项的系数约为 0.001 角秒。对小的 $\Delta\theta$ 但是高的速度 v，位移由下式给出(Lorentz, 1904; Einstein, 1905)：

$$\Delta\theta \approx \left[\frac{1+\frac{v}{c}\cos\theta}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}-1\right]\frac{\sin\theta}{\cos\theta}。\tag{5-29}$$

对于地球绕太阳的轨道运动，赤经 α 及赤纬 δ 的周年光行差一级改正如下：

$$\Delta\alpha=\frac{1}{\cos\delta}[-k\sin\lambda\sin\alpha-k\cos\lambda\cos\varepsilon\cos\alpha]$$

以及 $$\Delta\delta=-k\sin\lambda\cos\alpha\sin\delta+k\cos\lambda[\cos\varepsilon\sin\alpha\sin\delta-\sin\varepsilon\cos\delta],\tag{5-30}$$

式中 λ 是太阳的真赤经，ε 是黄赤交角，光行差常数由下式给出：

$$k=\frac{2\pi a}{Pc}(1-e^2)^{-1/2}=20.496^{1)}\text{ 角秒},\tag{5-31}$$

这里 $a={}^*1.49597870\times10^{13}$ 厘米是天文单位距离[2]（地球与太阳的平均距离），$e={}^*0.016722$ 是地球轨道的平均偏心率，$P={}^*3.155814999\times10^7$ 秒是恒星年的长度，$c={}^*2.99792458\times10^{10}$ 厘米·秒$^{-1}$是光速，其中已假定 1 弧度 $={}^*2.06264806\times10^5$ 角秒。(5-31)式中给出的改正是在 $\Delta\alpha$ 和 $\Delta\delta$ 为视坐标减平均坐标的意义上而言的，且该改正能够大到 20.496 角秒。

由于地球绕轴自转引起的周日光行差具有周日光行差常数：

$$k_d=\frac{\omega a_e}{c}\rho\cos\varphi'=0.3198\,\rho\cos\varphi'\text{ 角秒}=0.02132\,\rho\cos\varphi'\text{ 时秒},\tag{5-32}$$

式中地球角速度是 $\omega={}^*7.292115\times10^{-5}$ 弧度/秒，地球半径是 $a_e={}^*6.378140\times10^8$ 厘米，c 是光速，ρ 是观测者的地心向径的大小（以 a_e 为单位），φ' 是观测者的地心纬度。在视位置减平位置的定义下，对赤经及赤纬的周日光行差改正为：

$$\begin{aligned}\Delta\alpha&=k_d\cos h\sec\delta;\\ \Delta\delta&=k_d\sin h\sin\delta,\end{aligned}\tag{5-33}$$

式中平均时角 h 是地方恒星时减平均赤经 α，而 δ 是天体的平均赤纬。

就地-月质心及地-木质心两者来说，对地球运动的光行差改正可以大到 0.008 角秒，伍拉德等(Woolard 和 Clemence, 1966)给出了用于这些改正的公式。

对赤经及赤纬作岁差、章动及周年光行差的总改正可以利用历书中的独立日数作出。对最近的岁首的平位置 α_0 及 δ_0 与视位置 α 及 δ 的关系为：

$$15.0(\alpha-\alpha_0)=f+g\sin(G+\alpha_0)\tan\delta_0+h\sin(H+\alpha_0)\sec\delta_0+J\tan^2\delta_0\tag{5-34}$$

以及 $$\delta-\delta_0=g\cos(G+\alpha_0)+h\cos(H+\alpha_0)\sin\delta_0+i\cos\delta_0+J'\tan\delta_0,\tag{5-35}$$

式中独立日数 f、g、G、H、h、i、J 及 J' 在历书中以角秒为单位给出。为了把所涉及日数的真春分点的位置改正到某种标准春分点，利用(5-26)式、(5-27)式及(5-30)式作附加改正是必要的。在历书中也给出这种归算到 1950.0 标准春分点的近似日数。

由于辐射在地球大气中的折射，观测到的天体位置与真位置也有差别。在光波段，折射率 n 由下式给出(Edlén, 1953, 参看(2-237)式)：

$$(n-1)\times10^7=64.328+\frac{294981}{146-\sigma^2}+\frac{2554.0}{41-\sigma^2},\tag{5-36}$$

---

1) 2000.0 参考历元的光行差常数 $k=20''.49552$。——译者注

2) 原文为"$a=1.49598\times10^{13}$ 厘米是天文单位"，已根据最新的数据改正，本页其他数据亦已改正。——译者注

式中 σ 是真空中的波数，以微米的倒数为单位(1 微米 $=10^{-4}$ 厘米)。在空气中的波长 $\lambda_{空气}$ 与真空中的波长 $\lambda_{真空}$ 的关系式为：

$$\lambda_{真空}-\lambda_{空气}=\lambda_{空气}(n-1)。\tag{5-37}$$

经常利用近似值 $n=1.000297$。在光学波段，折射所引起的赤经变化 $\Delta\alpha$ 及赤纬变化 $\Delta\delta$ 由下式给出：

$$\Delta\alpha=(n-1)\cos\varphi\sin h\,\mathrm{cosec}\,z\sec\delta=\pm R\sec\delta\sin q$$

及

$$\Delta\delta=(n-1)\left[\frac{\sin\varphi}{\cos\delta\cos z}-\tan\delta\right]=\pm R\cos q,\tag{5-38}$$

式中折射常数 $R=n-1=0.0002927=60.4$ 角秒，视差角 q 由 $\sin q=\cos\varphi\sin h/\sin z$ 给出，φ 是观测者的纬度，z 是天顶距，h 是时角，δ 是赤纬。这里 $\Delta\alpha$ 及 $\Delta\delta$ 是真值减观测值，符号 $\pm$ 的用法如下：当 $0^h<h<12^h$ 时，$\Delta\alpha$ 为 $-$，当 $12^h<h<24^h$ 时，$\Delta\alpha$ 为 $+$；当 $\varphi>0$ 时，$\Delta\delta$ 为 $-$，当 $\varphi<0$ 时，$\Delta\delta$ 为 $+$。在无线电频段，电离层中的折射也使方位发生位移。科姆萨罗夫(Komesaroff, 1960)给出了由于电离层折射所致源方位视位移的详尽公式。

对方位的进一步改正需要考虑自行及视差效应，这些在后面几节中讨论。

5.1.4. 球面三角

对于角度为 A、B 及 C，而这些角所对的边分别为 a、b 及 c 的一个球面三角形，应用下列公式。

正弦公式：

$$\frac{\sin A}{\sin a}=\frac{\sin B}{\sin b}=\frac{\sin C}{\sin c}。\tag{5-39}$$

余弦公式：

$$\left.\begin{aligned}\cos a&=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A;\\\cos b&=\cos a\cos c+\sin a\sin c\cos B;\\\cos c&=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C。\end{aligned}\right\}\tag{5-40}$$

广义余弦公式：

$$\left.\begin{aligned}\sin a\cos B&=\cos b\sin c-\sin b\cos c\cos A;\\\sin a\cos C&=\cos c\sin b-\sin c\cos b\cos A;\\\sin b\cos A&=\cos a\sin c-\sin a\cos c\cos B;\\\sin b\cos C&=\cos c\sin a-\sin c\cos a\cos B;\\\sin c\cos A&=\cos a\sin b-\sin a\cos b\cos C;\\\sin c\cos B&=\cos b\sin a-\sin b\cos a\cos C。\end{aligned}\right\}\tag{5-41}$$

半正弦公式：

$$\left.\begin{aligned}\cos\frac{A}{2}&=\left[\frac{\sin s\sin(s-a)}{\sin b\sin c}\right]^{1/2};\\\sin\frac{A}{2}&=\left[\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}\right]^{1/2};\\\tan\frac{A}{2}&=\left[\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s\sin(s-a)}\right]^{1/2};\end{aligned}\right\}\tag{5-42}$$

式中

$$s=(a+b+c)/2。$$

把上述公式中的边和角以相对应的角和边来代替，就可得到下述公式：

$$\left.\begin{aligned}\cos A&=\sin B\sin C\cos a-\cos B\cos C;\\ \cos B&=\sin A\sin C\cos b-\cos A\cos C;\\ \cos C&=\sin A\sin B\cos c-\cos A\cos B,\end{aligned}\right\}\quad(5\text{–}43)$$

以及

$$\left.\begin{aligned}\sin A\cos b&=\cos B\sin C+\sin B\cos C\cos a;\\ \sin A\cos c&=\cos C\sin B+\sin C\cos B\cos a;\\ \sin B\cos a&=\cos A\sin C+\sin A\cos C\cos b;\\ \sin B\cos c&=\cos C\sin A+\sin C\cos A\cos b;\\ \sin C\cos a&=\cos A\sin B+\sin A\cos B\cos c;\\ \sin C\cos b&=\cos B\sin A+\sin B\cos A\cos c。\end{aligned}\right\}\quad(5\text{–}44)$$

5.1.5. 坐标变换

把方位角 A 及地平纬度 a 与时角 h 及赤纬 δ 联系起来的公式是:

$$\left.\begin{aligned}\cos a\sin A&=-\cos\delta\sin h;\\ \cos a\cos A&=\sin\delta\cos\varphi-\cos\delta\cos h\sin\varphi;\\ \sin a&=\sin\delta\sin\varphi+\cos\delta\cos h\cos\varphi;\\ \cos\delta\cos h&=\sin a\cos\varphi-\cos a\cos A\sin\varphi;\\ \sin\delta&=\sin a\sin\varphi+\cos a\cos A\cos\varphi,\end{aligned}\right\}\quad(5\text{–}45)$$

式中 φ 是观测者的纬度, 而时角 h 与赤经 α 的关系式是:

$$h=\text{地方恒星时}-\alpha。\quad(5\text{–}46)$$

黄经 λ 及黄纬 β 与赤经 α 及赤纬 δ 的关系公式是:

$$\left.\begin{aligned}\cos\delta\cos\alpha&=\cos\beta\cos\lambda;\\ \cos\delta\sin\alpha&=\cos\beta\sin\lambda\cos\varepsilon-\sin\beta\sin\varepsilon;\\ \sin\delta&=\cos\beta\sin\lambda\sin\varepsilon+\sin\beta\cos\varepsilon;\\ \cos\beta\sin\lambda&=\cos\delta\sin\alpha\cos\varepsilon+\sin\delta\sin\varepsilon;\\ \sin\beta&=\sin\delta\cos\varepsilon-\cos\delta\sin\alpha\sin\varepsilon,\end{aligned}\right\}\quad(5\text{–}47)$$

式中 ε 是黄赤交角, 这是在历书中给出的。

新银经 l^{II} 及新银纬 b^{II} 与赤经 α 及赤纬 δ 的转换公式是:

$$\left.\begin{aligned}\cos b^{\text{II}}\cos(l^{\text{II}}-33^\circ)&=\cos\delta\cos(\alpha-282^\circ\!.25);\\ \cos b^{\text{II}}\sin(l^{\text{II}}-330)&=\cos\delta\sin(\alpha-282^\circ\!.25)\cos 62^\circ\!.6+\sin\delta\sin 62^\circ\!.6;\\ \sin b^{\text{II}}&=\sin\delta\cos 62^\circ\!.6-\cos\delta\sin(\alpha-282^\circ\!.25)\sin 62^\circ\!.6;\\ \cos\delta\sin(\alpha-282^\circ\!.25)&=\cos b^{\text{II}}\sin(l^{\text{II}}-33^\circ)\cos 62^\circ\!.6-\sin b^{\text{II}}\sin 62^\circ\!.6;\\ \sin\delta&=\cos b^{\text{II}}\sin(l^{\text{II}}-33^\circ)\sin 62^\circ\!.6+\sin b^{\text{II}}\cos 62^\circ\!.6,\end{aligned}\right\}\quad(5\text{–}48)$$

式中假定 α 及 δ 是 1950.0 的值。图 33 给出赤道坐标(1950.0)与新银道坐标间的换算曲线图。瑞典伦德天文台(Lund Observatory, 1961)发表了赤道坐标与新银道坐标的相互换算表以及旧银道坐标与新银道坐标的换算表。

旧银经 l^{I} 及旧银纬 b^{I} 与新银经 l^{II} 及新银纬 b^{II} 的转换公式是:

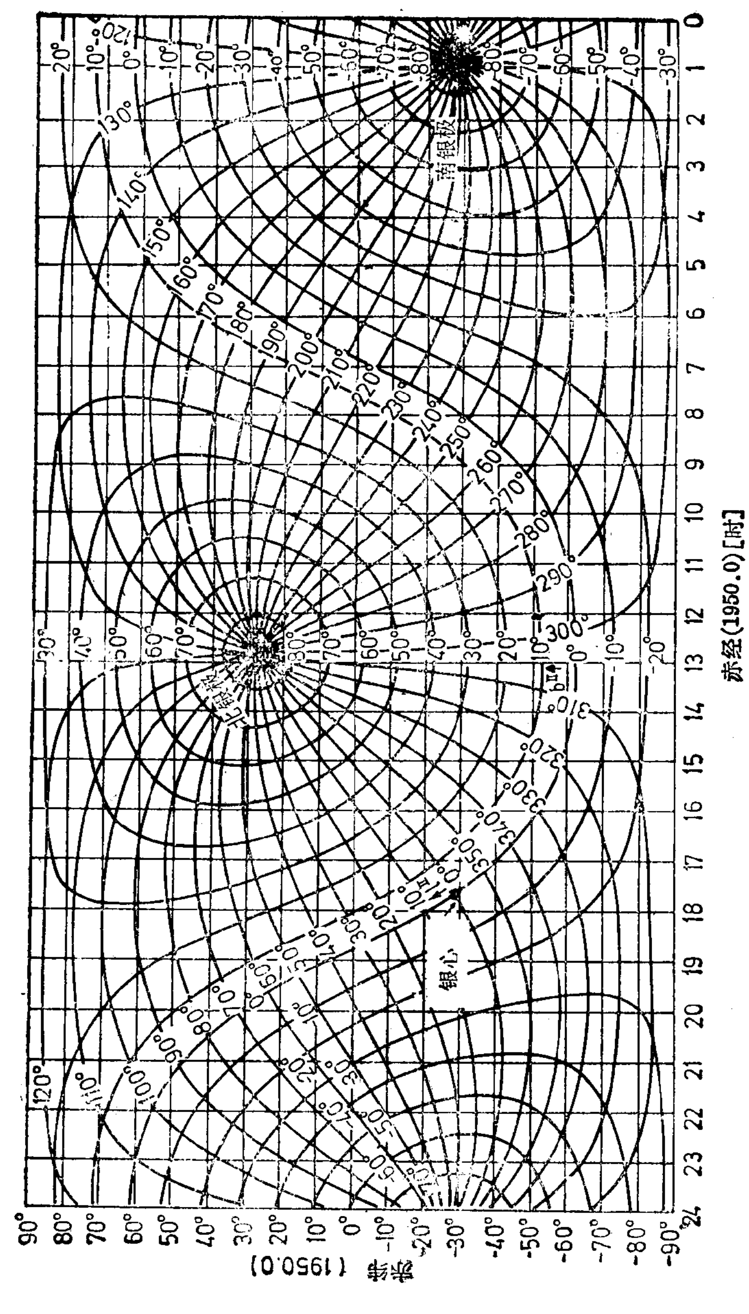


图 33 赤道坐标(1950.0)与新银道坐标(l^{II}, b^{II})的相互换算图

$$\cos b^{\rm II}\cos(l^{\rm II}-109.9497°)=\cos b^{\rm I}\cos(l^{\rm I}-77.6500°);$$
$$\cos b^{\rm II}\sin(l^{\rm II}-109.9497°)=\cos b^{\rm I}\sin(l^{\rm I}-77.6500°)\cos 1.4866° + \sin b^{\rm I}\sin 1.4866°; \quad (5\text{–}49)$$
$$\sin b^{\rm II}=-\cos b^{\rm I}\sin(l^{\rm I}-77.6500°)\sin 1.4866° + \sin b^{\rm I}\cos 1.4866°。$$

这些公式是根据假定新银道坐标系对旧银道坐标系的倾角是 1.4866° 以及升交点坐标是 $b^{\rm I}=b^{\rm II}=0$, $l^{\rm I}=77.6500°$ 及 $l^{\rm II}=109.9497°$ 而得出的。

河外星系用的天然参考坐标系是超星系坐标系，它的北极是在 $l^{\rm I}=15°$, $b^{\rm I}=5°$; 而它的原点是在 $l^{\rm I}=105°$, $b^{\rm I}=0°$。

5.2. 时间

5.2.1. 历书时

在纽康(Newcomb, 1898)的太阳及行星的引力理论中作为独立变量的时间称为历书时 E. T.。在此理论中，假定一个假平太阳在所有时间具有一种均匀的恒星运动而这种运动等于真太阳在历书时历元 1900 年 1 月 0.5 日具有的恒星平运动。从平春分点日期测起的、太阳绕地球的平均视运动的黄经 L 的纽康表达式是:

$$L=279°41'48''.04+129602768''.13T_E+1''.089T_E^2, \quad (5\text{–}50)$$

式中 T_E 是从历元 1900 年 1 月 0 日 12 时起所经过的历书时的儒略世纪数。假平太阳的赤经 α_E 由下式给出:

$$\alpha_E=18^{\rm h}38^{\rm m}45^{\rm s}.836+8640184^{\rm s}.542T_E+0^{\rm s}.0929T_E^2。 \quad (5\text{–}51)$$

按定义，一个儒略世纪有 36525 日而每日有 86400 历书秒。因此由(5–51)式可知，在历元 1900 年 1 月 0 日历书时 12 时:

$$1\ 回归年=31556925.9747\ 历书秒=365.24219879\ 日。 \quad (5\text{–}52)$$

中心在时刻 T_E 的回归年的日数由下式给出:

$$1\ 回归年=365.24219879-0.00000614T_E\ 日。 \quad (5\text{–}53)$$

为了便于计算日期，儒略日数定义为从公元前 4713 年 1 月 1 日历书时 12 时算起到所考虑日的历书时 12 时以前所经过的历书日数。基本历元 1900 年 1 月 0 日历书时 12 时的儒略日数是 2415020.0, 而 1950.0 年 1 月 0 日历书时 12 时的儒略日数是 2433282 [1]。

5.2.2. 世界时

世界时 U. T. 定义为纽康假平太阳的格林尼治时角加 12 时。也就是说世界时是 12 时加天赤道上一点的格林尼治时角，这一点从平春分点测起的赤经 α_U 是(Newcomb, 1895):

$$\alpha_U=18^{\rm h}38^{\rm m}45^{\rm s}.836+8640184^{\rm s}.542T_U+0^{\rm s}.0929T_U^2, \quad (5\text{–}54)$$

式中 T_U 是从历元 1900 年 1 月 0 日[2] 格林尼治平正午世界时(U. T.)12 时算起所经过的世界时儒略世纪数(36525 日为一世纪)。因为这个时间是基于平太阳的位置，所以也称为平太阳时或格林尼治平时(G. M. T.)。对于测地经度为 λ 的一个天文台，地方平太阳时(L. M. T.)由下式给出:

---

1) 2000.0 年 1 月 0 日历书时 12 时的儒略日数是 2451544。——译者注

2) 1900 年 1 月 0 日相当于 1899 年 12 月 31 日。——译者注

$$\text{L. M. T.}=\text{U. T.}-\lambda, \tag{5-55}$$

这是赤经为 α_U 的点的地方时角。

5.2.3. 恒星时

视恒星时定义为真春分点的时角。当真春分点的位置作了地轴的章动改正后，所得恒星时称为平恒星时。视恒星时与平恒星时之差称为二分差。在历书中给出每日世界时 0 时的格林尼治平恒星时(G. M. S. T.)。由(5-54)式可知：

$$\begin{aligned}&\text{在世界时 0 时的格林尼治平恒星时(G. M. S. T.)}\\&=6^{h}38^{m}45.836^{s}+8640184.542^{s}T_U+0.0929^{s}T_U^2。\end{aligned} \tag{5-56}$$

测地经度为 λ 的天文台的地方平恒星时(L. M. S. T.)由下式给出：

$$\text{L. M. S. T.}=\text{G. M. S. T.}-\lambda。 \tag{5-57}$$

[1]

当地方恒星时等于天体的赤经时，这个天体与观测者的子午线相交。平恒星时只受岁差的影响，而这种岁差引起平恒星时比平太阳时每日增加 $3^{m}56.55536^{s}$。两种时间的关系式是：

$$\begin{aligned}\frac{\text{平恒星日}}{\text{平太阳日}}&=0.99726956614-0.586T_U\times10^{-10};\\\frac{\text{平太阳日}}{\text{平恒星日}}&=1.002737909265+0.589T_U\times10^{-10},\end{aligned} \tag{5-58}$$

式中 T_U 是从历元 1900 年 1 月 0 日世界时 12 时格林尼治平正午算起所经过的世界时儒略世纪数(36525 日为一世纪)。日的长度的等效量度是：

$$\begin{aligned}&\text{平恒星日}=\text{平太阳时的 }23^{h}56^{m}04.09054^{s};\\&\text{平太阳日}=\text{平恒星时的 }24^{h}03^{m}56.55536^{s}。\end{aligned} \tag{5-59}$$

5.2.4. 时间的计量——原子时

世界时的实用计量以观测月球的中天时刻并将它与布朗等(Brown, 1919; 以及 Jones, 1939)给出的月球引力理论相比较作出为最好。引力理论指出历书时(E. T.)与世界时(U. T.)之差由下式给出：

$$\Delta T=\text{E. T.}-\text{U. T.}\approx24.349^{s}+72.318^{s}T_U+29.950^{s}T_U^2, \tag{5-60}$$

式中 T_U 是从历元 1900 年 1 月 0 日格林尼治平正午算起所经过的世界时的儒略世纪数(36525 日为一世纪)。ΔT_0 的值在历书中给出，其中

$$\Delta T_0=\text{E. T.}-\text{U. T. 2}, \tag{5-61}$$

而 U. T. 2 是对观测到的地极移动及地球自转速率的外推年变化作了改正后的世界时(U. T.)。未作改正的世界时称为 U. T. 0，而世界时作极移改正后称为 U. T. 1。根据对铯的超精细跃迁的频率(Essen, 1969)：

$$\nu_c=9192631770\text{ 赫} \tag{5-62}$$

的观测，时间计量的精度可达 10^{-12}。

原子时 A. T. 的历元取为 1958 年 1 月 1 日 U. T. $20^{h}0^{m}0^{s}$，在此时刻 A. T. = U. T. 2 和 E. T. = A. T. + 32.15^{s}。其他可用的是氢及铷的超精细跃迁，它们的频率分别是 1420405751 赫及 6834682614 赫。

各个天文台的钟对照人造卫星发播的原子时加以校准。这种无线电频率时间脉冲称为

1) 设格林尼治以西的经度为正。——译者注

协调世界时(U. T. C.)，据信精度可达几微秒。天文台的钟由于作 U. T. 2. 与 U. T. C. 之差的改正而进一步得到校准，这种 U. T. 2.－U. T. C. 的值由美国海军天文台每星期发布。

5.2.5. 天体的年龄

设放射衰变常数是 λ，则在时间 t 的放射性核素 N_t 由下式给出：

$$N_t = N_0 \exp(-\lambda t) = N_0 \exp(-0.693t/\tau_{1/2}), \tag{5-63}$$

式中 N_0 是在时间 $t=0$ 的原始核数，$\tau_{1/2}$ 是放射性核的半寿命。在表 54 中给出一些长寿命放射性核的衰变常数及半寿命。霍姆斯等(Holmes 和 Lawson, 1926)指出，从观测到的铅与铀的丰度比确定的地球年龄的下限是 1.3×10^9 年；卢瑟福等 (Rutherford, 1929；以及 Aston, 1929)指出，若铀由同位素 U^{235} 和 U^{238} 以相同的丰度构成，那么现在的丰度比表明衰变年龄是 3×10^9 年。

表 54　长寿命放射性衰变链的衰变常数及半寿命。
平均寿命 $T=\tau_{1/2}/0.693=\lambda^{-1}$

母 元 素	子 元 素	衰变常数 λ (年)$^{-1}$	半寿命 $\tau_{1/2}$ (年)
Rb^{87}	Sr^{87}	1.391×10^{-11}	4.982×10^{10}
Re^{187}	Os^{187}	1.613×10^{-11}	4.297×10^{10}
Th^{232}	Pb^{208}	4.990×10^{-11}	1.389×10^{10}
U^{238}	Pb^{206}	1.537×10^{-10}	4.508×10^{9}
U^{235}	Pb^{207}	9.718×10^{-10}	0.713×10^{9}
I^{129}	I^{127}	4.082×10^{-8}	1.697×10^{7}

正如尼尔(Nier, 1939)所首先指出的，一个放射衰变链的长寿命母核及稳定子核的相对丰度的测量能够用来确定样品物质的年龄。例如，设两个陨星的铅同位素的原始丰度是相同的，那么同位素形成的时间 t 由下式给出：

$$\left(\frac{Pb^{206}}{Pb^{204}}\right)_a - \left(\frac{Pb^{206}}{Pb^{204}}\right)_b = \left[\left(\frac{U^{238}}{Pb^{204}}\right)_a - \left(\frac{U^{238}}{Pb^{204}}\right)_b\right][\exp(\lambda_{238}t)-1]。 \tag{5-64}$$

此式给出在时间 t 两颗陨星的同位素 Pb^{206} 与 U^{238} 的现在丰度的关系。这里从两颗陨星得到的样品分别以下标 a 和 b 表示，这些丰度都以相对于 $t=0$ 时的 Pb^{204} 的丰度来测定的。设陨星在 $t=0$ 时成为一个封闭系统，那么由(5-64)式可知，Pb 与 U 的现在丰度的关系为：

$$\left(\frac{Pb^{206}}{Pb^{204}}\right)_t = \left(\frac{U^{238}}{Pb^{204}}\right)_t [\exp(\lambda_{238}t)-1] + \left(\frac{Pb^{206}}{Pb^{204}}\right)_0, \tag{5-65}$$

式中下标 t 及 0 分别表示现在的及起始的丰度。设所有陨星具有相同的起始的(Pb^{206}/Pb^{204})丰度，并设所有陨星都有同样的年龄 t，则作(Pb^{206}/Pb^{204})$_t$-(U^{238}/Pb^{204})$_t$ 图将得到一条斜率为$[\exp(\lambda_{238}t)-1]$的直线。这样一张等时图确定了一条年龄为 $4.55\pm0.07\times10^9$ 年的直线(Patterson, 1956)。对其他元素的同位素丰度的考察得出陨星年龄的类似估计(Anders, 1963)。地球的 Pb 与 U 的丰度比表明，地球上原始 Pb 与陨星在 $4.54\pm0.02\times10^9$ 年以前的原始 Pb 具有相同的同位素成分(Ostic, Russell 和 Reynolds, 1963)。

银河系的年龄 T_G 由 $T_G=T+\Delta+t$ 给出，其中 T 是在银河系中太阳系形成以前核合成的持续时间，$\Delta=(1\sim2)\times10^8$ 年是在最后核合成与凝固之间的时间，$t=0.46\pm0.1\times10^9$ 年是太阳系的固体的年龄。年龄 T_G 的估计是假定银河系开始不包含重元素，重元素是按照

r 过程在超新星爆发时产生的，而超新星爆发的频率则随时间按指数律衰减 (Burbidge, Burbidge, Fowler 和 Hoyle, 1957; Fowler 和 Hoyle, 1960; Seeger 和 Schramm, 1970; Schramm 和 Wasserburg, 1970; Fowler, 1972)。T_G 是随模型而变的，流行的估计 (Fowler, 1972; Schramm, 1972) 表明 2×10^9 年 $\leqslant T\leqslant 10\times10^9$ 年及 7×10^9 年 $\leqslant T_G\leqslant 15\times10^9$ 年。

恒星的年龄定义为从主星序开始到图 34(Hertzsprung, 1905; Russell, 1912, 1914) 所示光度与温度关系的赫-罗图上恒星所处位置的时间间隔。主星序的开始定义为核产能正好开始与发光度平衡的阶段。根据沃格特-罗素定理 (Vogt, 1926; Russell, Dugan 和 Stewart, 1926)，一颗给定质量、年龄及起始成分的恒星在赫-罗图上占据唯一的位置。确定此位置的方程式是：

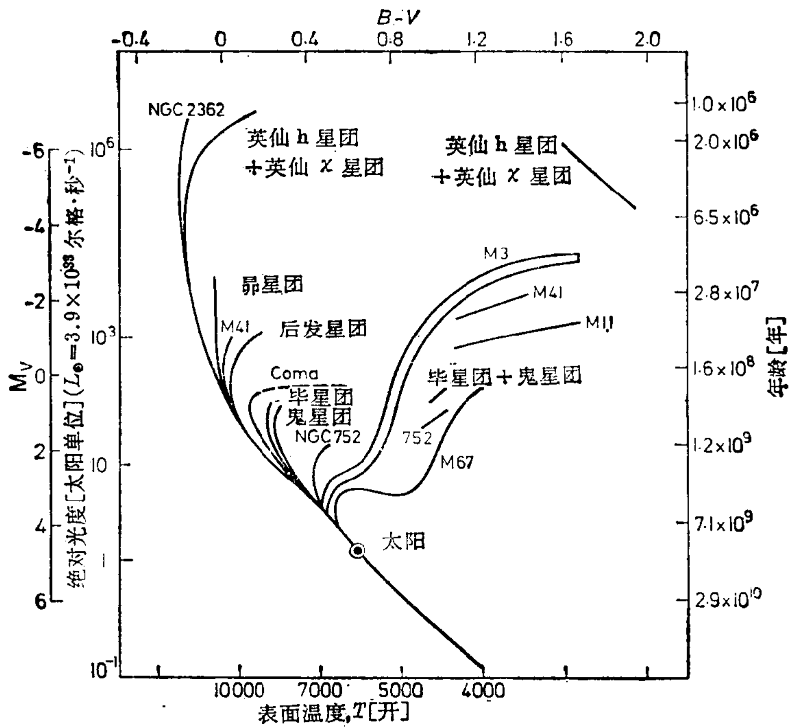


图 34 10 个银河星团及 1 个球状星团的合成赫-罗图。主星序端点位于给定绝对目视星等 M_V 的每一星团的年龄示于图右 (取自 Sandage, 1957 的文章)

质量方程

$$\frac{dM(r)}{dr}=4\pi r^2\rho \quad \text{或} \quad \frac{dr}{dM(r)}=\frac{1}{4\pi r^2\rho}, \tag{5-66}$$

式中 $M(r)$ 是在半径 r 以内的质量，ρ 是质量密度由下式给出：

$$\rho=\left(2X+\frac{3}{4}Y+\frac{1}{2}Z\right)^{-1}Nm_{\rm H}, \tag{5-67}$$

这适用于总的数密度为 N 的全电离气体，X、Y 及 Z 分别相应于氢、氦及更重元素的质量分数，$m_{\rm H}={}^*1.6735595\times10^{-24}$ 克是氢原子的质量。对星族 I 的恒星来说，X、Y 及 Z 的典型值分别是 $X=0.61$、$Y=0.37$ 及 $Z=0.02$，而对星族 II 的恒星来说，$X=0.90$、$Y=0.10$ 及 $Z=0.001$。现在人们通用的太阳起始丰度值是 $X=0.762$、$Y=0.223$ 及 $Z=0.015$[1]。

1) 更新的太阳丰度 $X=0.786$、$Y=0.196$ 及 $Z=0.018$, Aller L. H. *et al.*, Science **191**, 223, 1976。——译者注

流体静力学平衡方程

$$\frac{dP}{dr}=-\rho\frac{GM(r)}{r^2} \quad 或 \quad \frac{dP}{dM(r)}=-\frac{GM(r)}{4\pi r^4}, \tag{5-68}$$

式中 P 是气体压力，G 是引力常数。

能量平衡方程

$$\frac{dL(r)}{dr}=4\pi r^2\rho\varepsilon \quad 或 \quad \frac{dL(r)}{dM(r)}=\varepsilon, \tag{5-69}$$

式中 $L(r)$ 是从半径 r 以内来的能通量，ε 是每单位质量每单位时间的产能率。ε 的值在第四章中讨论过。

辐射能量转移方程

$$\frac{dT}{dr}=\frac{-3\varkappa\rho L(r)}{4acT^3 4\pi r^2} \quad 或 \quad \frac{dT}{dM(r)}=\frac{-3\varkappa L(r)}{64\pi^2 acT^3 r^4}, \tag{5-70}$$

式中 T 是温度，辐射密度常数 $a=$*7.565660×10^{-15} 尔格·厘米$^{-3}$·开$^{-4}$，$\varkappa$ 是每单位质量的面积对辐射的不透明度(参看 Cox 和 Stewart, 1970)。

对流能量输运方程

$$\frac{dT}{dr}=\left(\frac{\Gamma-1}{\Gamma}\right)\frac{T}{P}\frac{dP}{dr} \quad 或 \quad \frac{dT}{dM(r)}=\left(\frac{\Gamma-1}{\Gamma}\right)\frac{T}{P}\frac{dP}{dM(r)}, \tag{5-71}$$

式中 Γ 是绝热指数(参看(3-300)式)。

给定一个起始成分和质量，根据(5-66)至(5-71)式由观测到的天体的光度及温度可确定它的年龄。例如对太阳来说，西尔斯(Sears, 1964)用 $X=0.71$、$Y=0.27$ 及 $Z=0.02$ 以及 $M_\odot=1.989\times10^{33}$ 克，$L_\odot=3.90\times10^{33}$ 尔格·秒$^{-1}$ 及 $T_\odot=5784$ 开，得出太阳年龄为 4.5×10^9 年。不过，这个年龄是暂用值，可用到对流输运的严格理论研究完成时为止。

当一颗恒星氢的量被消耗到它的初始质量的12%时，这颗星就离开主星序(Schönberg 和 Chandrasekhar, 1942)，而其演化进程由霍伊尔(Hoyle, 1959)理论描述。当一颗恒星离开主星序后，它的年龄 T 的量级由下式给出(Sandage 和 Schwarzschild, 1952; Sandage, 1957)：

$$T=1.1\times10^{10}M/L\ 年, \tag{5-72}$$

式中质量 M 及绝对光度 L 都以太阳单位表示。利用(5-180)式的质光定律，(5-72)式成为：

$$T\approx10^{10}\left(\frac{M_\odot}{M}\right)^2\approx10^{10}\left(\frac{L_\odot}{L}\right)^{2/3} \quad (当\ L<L_\odot),$$

式中 $M_\odot$ 及 $L_\odot$ 分别表示太阳质量及太阳光度。图34示出的赫-罗图表明不同恒星的近似年龄。(5-72)式是易按以下假定导出的：一颗恒星在主星序上的位置是由氢燃烧所决定的，氢燃烧时质量转换成能量的百分数是 $\Delta M/(4m_H)=0.007$，其中 ΔM 为核反应 $4H^1\rightarrow He^4+2e^++2\nu_e$ 的质量差，而且假定一颗恒星有百分之十的质量可用于氢燃烧。因而我们得到 $T=0.10\Delta Mc^2M/(Lm_H)$。如果一颗恒星由其储存的热能 T_k 来发光，则其寿命由开尔文-亥姆霍兹(Kelvin-Helmholtz)时间(Kelvin, 1862; Helmholtz, 1854)给出为：

$$T_{K-H}=\frac{T_k}{L}\approx\frac{3GM^2}{10RL}\approx2\times10^7\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^2\left(\frac{L_\odot}{L}\right)\left(\frac{R_\odot}{R}\right)年, \tag{5-73}$$

式中根据维里定理(流体静力学平衡)，气体运动的动能是 $T_k=-\Omega/2$，而引力势能 $\Omega\approx-3GM^2/(5R)$。如果恒星不处于流体静力学平衡状态，则相应的寿命是由下式给出的自由降落时间 T_{f-f}：

$$T_{f-f}=2\left(\frac{R^3}{GM}\right)^{1/2}=466\rho^{-1/2}\text{ 秒}, \tag{5-74}$$

式中 ρ 是气体质量密度。

若假设星团中的所有恒星是同时形成的，可以通过把各种质量、起始成分及年龄的一族演化程与此星团观测到的赫-罗图相拟合来求得星团的年龄。球状星团 M3、M13、M15 及 M92 的年龄是在 9.4×10^9 与 13.4×10^9 年之间 (Sandage, 1970; Iben 和 Rood, 1970; Demarque, Menzel 和 Aizenman, 1971)。史瓦西(Schwarzschild, 1970) 报导球状星团的年龄为 $(1.0\pm0.4)\times10^{10}$ 年。在表 55 及 56 中给出著名的银河星团(疏散星团)及球状星团(密近星团)的天文参数。

星团的动力学研究可得出参考时间，这个参考时间可能与星团年龄有关。对于位于平底及陡壁的势阱中的具有恒定粒子密度 n 的均匀星团，张弛时间 T_R 由下式确定 Spitzer 和 Härm, 1958):

$$T_R=\frac{(3/2)^{3/2}v^3}{2\pi G^2M^2n\ln N},$$

式中 G 是引力常数，质量为 M 及均方根速度为 v 的恒星总数有 N 颗。如果用维里定理求 v 值，则

$$T_R\approx8\times10^5\frac{N^{1/2}R^{3/2}}{M^{1/2}\log_{10}N}\text{ 年}, \tag{5-75}$$

式中星团半径 R 的单位是秒差距，质量 M 的单位是太阳质量。在这些简化假设下，在 T_R 时间内将有百分之一的恒星逃离星团，并在 $40T_R$ 时星团将坍缩成一点(Spitzer, 1971)。对大多数星团来说，密度是不均匀的，径向密度梯度导致较大的张弛时间。另一个有用的时间是碰撞时间 T_c，这是任何一颗恒星与另一颗恒星发生碰撞的平均时间。根据 Spitzer(1971)

$$T_c=\frac{10^{22}R^{7/2}}{N^{3/2}(M^{1/2}r^2)\left(1+8.8\times10^7\dfrac{R}{rN}\right)}\text{ 年}, \tag{5-76}$$

式中星团半径 R 的单位是秒差距，成员星的质量 M 及半径 r 的单位是太阳单位。良好有序的星团为了得以形成，必定比 $1.0T_R$ 更老，但是为了还能被看到，必定比 $1000T_R$ 或 $1000T_c$ 年青。较年青的银河星团的 $T_R\approx10^6$ 年，而大多数球状星团的 $T_R\approx10^9\sim10^{10}$ 年。

射电源描述出一种演化序列，年青的、小的、发光及明亮的天体演化成较老、较大、光度较小及不太明亮的、频谱较陡的天体(Heeschen, 1966; Kellermann, 1966; Simon 和 Drake, 1967)。由于同步加速辐射损失，一个起始具有平坦频谱的射电源将在高频段变成较陡的频谱。一个能量为 E 的电子在强度为 H 的磁场中，在下式给出的频率 ν 上辐射其大部分同步加速辐射(Schott, 1912)(参看(1-154)式):

$$\nu=1.61\times10^7HE^2\text{ 兆赫}。 \tag{5-77}$$

电子由于同步加速辐射损失而失去其能量的速率为(参看(1-163)式):

$$\frac{dE}{dt}=-6.08\times10^{-9}H^2E^2\text{ 尔格}\cdot\text{秒}^{-1}, \tag{5-78}$$

在(5-77)式及(5-78)式中 E 的单位是京电子伏，H 的单位是高斯。由这两式清楚地知道较老的电子在较低的频段辐射。卡尔达晓夫 (Kardashev, 1962) 证明，能量分布为 $N(E)dE\propto E^{-\gamma}dE$ 的电子的辐射频谱将具有频谱指数 α 为:

表 55 97 个银河星团(星族 I)的方位、视角直径 θ、距离模数 $m-M$、距离 D、红化 E_{B-V}、在星团主星序上最早期星或最蓝星作吸收改正后的色指数的转折颜色 $(B-V)_T$、最亮星或第五颗最亮星的视星等 V_B 及星团类型[1]

星团 NGC	名称	α(1950.0) h	α(1950.0) m	δ(1950.0) °	δ(1950.0) ′	θ (角分)	$m-M$ (星等)	D (秒差距)	$E_{(B-V)}$ (星等)	$(B-V)_T$ (星等)	V_B (星等)	类型		
103		00	22.5	61	04	4	12.4	2,980	0.46	−0.13	12.4	B6	I	2*p*
129		00	27.1	59	57	13	11.1	1,660	0.58	−0.16	8.56	B5	IV	2*pU*
225		00	40.5	61	31	14	9.0	630	0.29	−0.11	9.24	B8	III	1*p*
457		01	15.9	58	04	12	12.3	2,880	0.47	−0.25	6.96	B2	I	3*r*
581	(M103)	01	29.9	60	27	6.5	12.1	2,600	0.37	−0.21	7.26	B3	II	3*m*
654		01	40.6	61	38	5.5	10.9	1,550	0.90	−0.30	7.24	O9.5	I	2*p*
663		01	42.6	60	59	14	11.8	2,300	0.85	−0.28	8.29	B0	IV	2*m*
744		01	55.2	55	14	14	10.8	1,490	0.41	−0.08	10.13	B9	I	2*p*
752		01	54.8	37	26	45	7.9	380	0.03	+0.35	9.6	F0	III	1*m*
869														
884	(英仙 $h+\chi$[1)] 星团)	02	15.5	56	55	30	11.8	2,360	0.56	−0.28	9.5	B0.5	IV	3*r*
IC1805		02	29.0	61	13	20	11.6	2,100	0.82	−0.32	8.12	O5	IV	3*mN*
957		02	30.0	57	18	9	11.7	2,250	0.80	−0.26	8.05	B1	II	3*mU*
1027		02	38.8	61	20	21	10.5	1,280	0.40	−0.02	9.33	A0	IV	3*m*
1039	(M34)	02	38.8	42	34	30	8.2	440	0.09	−0.11	8.6	B8	I	3*m*
IC1848		02	47.3	60	14	22	11.7	2,200	0.61	−0.29	8.24	O9	IV	3*mN*
1245		03	11.3	47	03	7	11.8	2,300	0.28	+0.16	7.95	A7	III	2*r*
1342		03	28.4	37	10	15	8.7	550	0.28	+0.05	8.46	A3	II	2*m*

1 方位及视角直径取自霍格(Hogg, 1959)的文章,而后面的资料是按特朗普勒等(Trumpler, 1930; 以及 Collinder, 1931)的表编成的。距离模数、距离、红化、颜色取自约翰逊等(Johnson 等, 1963)的文章。最亮星的星等给出两位小数,数据取自霍埃格等(Hoag 等, 1961)的文章,而第五颗最亮星的星等 V_B 是由沙普利等(Shapley, 1933; 以及 Hogg, 1959)给出。星团的光谱型是相当于 $(B-V)_T$ 的光谱型,资料取自约翰逊等(Johnson 等, 1963)的文章,而特朗普勒类型(Trumpler, 1930)是按密集度的减小以 I–IV 来表示,并以 p、m 及 r 分别表示星团内星数少于 50、50 至 100 及大于 100 颗。

1) 原文误为"−"号。——译者注

（续表）

星团 NGC	名称	α(1950.0) h	α(1950.0) m	δ(1950.0) °	δ(1950.0) ′	θ (角分)	$m-M$ (星等)	D (秒差距)	$E_{(B-V)}$ (星等)	$(B-V)_T$ (星等)	V_B (星等)	类		型
昴星团	(M45)	03	44.1	23	57	120	5.5	126	0.04	−0.12	4.2	B7	II	3rN
1444		03	45.6	52	30	3.5	10.0	1,000	0.70	−0.32	10.37	O	II	3p
1502		04	03.1	62	11	8	9.7	880	0.77	−0.29	7.92	B0	II	3p
1528		04	11.6	51	07	22	9.5	800	0.29	−0.02	8.75	A0	II	2m
毕星团	(金牛座星团)	04	17	15	30	400	3.0	40	0.00	+0.10	4	A2	II	3m
1545		04	17.1	50	08	15	9.5	800	0.36	−0.08	8.08	B9	I	2p
1647		04	43.1	18	59	35	8.7	550	0.39	−0.09	8.59	B9	III	2m
1662		04	45.7	10	51	14	8.1	420	0.34	−0.04	8.30	B9.5	II	2p
1664		04	47.4	43	37	13	10.2	1,100	0.20	—	7.50	—	II	2m
1778		05	04.7	36	59	10	10.7	1,380	0.34	−0.10	9.05	B8	II	2p
1893		05	19.4	33	21	15	13.0	4,000	0.59	−0.34	9.04	O5–O6	I	3m
1907		05	24.7	35	17	5	10.7	1,380	0.38	0.00	9.30	A0	I	2m
1912	(M38)	05	25.3	35	48	18	10.6	1,320	0.27	−0.09	9.13	B8	II	2r
1960	(M36)	05	32.8	34	06	16	10.5	1,260	0.24	−0.24	8.7	—	I	3m
2099	(M37)	05	49.1	32	32	24	10.5	1,280	0.31	−0.10	9.93	B8	I	1r
2129		05	58.1	23	18	7	11.6	2,100	0.67	−0.27	7.36	B1	II	3p
2168	(M35)	06	05.8	24	21	29	9.7	870	0.23	−0.17	8.57	B5	III	3r
2169		06	05.6	13	58	6	10.2	1,100	0.18	−0.27	8.13	B1	II	3p
2215		06	18.4	−07	16	8.5	10.0	1,000	0.10	+0.10	11.2	A3	II	2p
2244		06	29.7	04	54	27	11.1	1,660	0.55	−0.32	8.9	O5	IV	3mN
2251		06	32.0	08	24	7	11.0	1,580	0.20	−0.16	9.11	B5	II	2p
2264	(麒麟座S星团)	06	38.3	09	56	30	9.4	750	0.10	−0.30	8.9	O9.5	II	3pN
2287	(M41)	06	44.9	−20	41	32	9.1	670	0.00	−0.20	7.06	B3	I	3r
2301		06	49.2	00	32	15	9.5	790	0.04	−0.14	8.00	B6	I	3m
2323	(M50)	07	00.6	−08	16	16	9.8	910	0.26	−0.19	7.90	B3	I	2m
2324		07	01.6	01	08	8	12.4	3,000	0.11	+0.15	8.25	A5	I	2m
2353		07	12.2	−10	13	20	10.1	1,050	0.12	−0.25	9.17	B1	I	3mU

(续表)

星团 NGC	名称	α(1950.0) h	α(1950.0) m	δ(1950.0) °	δ(1950.0) ′	θ (角分)	$m-M$ (星等)	D (秒差距)	$E_{(B-V)}$ (星等)	$(B-V)_T$ (星等)	V_B (星等)	类		型
2362	(大犬座τ星团)	07	16.7	−24	51	7	10.9	1,500	0.11	−0.28	9.4	B0.5	I	3p
2422		07	34.3	−14	23	30	8.4	480	0.08	−0.18	7.82	B4	II	3m
2439		07	39.0	−31	32	9	11.0	1,610	0.25	−0.11	10.6	B7	II	3mU
2447	(M93)	07	42.5	−23	45	18	10.2	1,100	0.06	−0.06	9.7	B9	I	3r
2516		07	57.4	−60	44	50	7.8	365	0.10	−0.07	10.1	B9	1	3r
2632	(鬼星团, M44)	08	37.2	20	10	90	6.0	158	0.00	+0.15	7.5	A5	I	2r
2682	(M67)	08	47.8	12	00	18	9.6	830	0.06	+0.40	10.8	F2	II	2r
3330	(哈佛4星团)	10	36.6	−53	53	8	10.7	1,390	0.18	−0.10	10.2	B8	II	3m
4103		12	04.0	−60	58	9	10.4	1,200	0.34	−0.24	9.4	B2	I	3m
后发座星团		12	22.5	26	23	300	4.5	80	0.00	+0.05	5	A2	II	3p
4755	(南十字座κ星团)	12	50.7	−60	04	12	9.6	830	0.31	−0.20	7	B3	I	3r
6405	(M6)	17	36.8	−32	11	26	9.0	630	0.16	−0.18	8.3	B4	II	3m
IC4665		17	43.8	05	44	50	7.6	330	0.17	−0.15	7.62	B5	II	2p
6475	(M7)	17	50.6	−34	48	50	7.0	250	0.08	−0.10	7.4	B8	I	3m
6494	(M23)	17	54.0	−19	01	27	9.1	660	0.38	−0.06	8.25	B9	I	2r
6530		18	01.7	−24	20	14	10.7	1,400	0.32	−0.32	9.3	O5	II	2mN
6531	(M21)	18	01.6	−22	30	12	10.5	1,250	0.27	−0.30	7.24	O9.5	I	3p
6611	(M16)	18	16.0	−13	48	8	12.0	2,500	0.85	−0.32	8.09	O5	II	3mN
6633		18	25.1	06	32	25	7.5	320	0.17	+0.15	8.0	A5	I	2pE
IC4725	(M25)	18	28.8	−19	17	35	8.9	600	0.50	−0.20	9.3	B3	IV	3r
6664		18	34.0	−08	16	20	—	—	0.60	−0.10	11.3	B8	IV	2m
6694	(M26)	18	42.6	−09	27	9	10.9	1,500	0.58	−0.16	9.19	B5	II	2m
6705	(M11)	18	48.4	−06	20	12.5	11.2	1,740	0.40	−0.10	12	B8	II	2r
6709		18	49.1	10	17	12	9.8	910	0.30	−0.16	8.60	B5	II	2p
6755		19	05.3	04	08	15	11.3	1,820	0.93	−0.10	10.23	B8	IV	2m
6802		19	28.4	20	10	5	10.2	1,100	0.81	−0.14	9.23	B6	III	1mE
6823		19	41.0	23	11	7	11.1	1,650	0.80	−0.30	8.75	O9	IV	3p

（续表）

星团 NGC	名称	α(1950.0) h	α(1950.0) m	δ(1950.0) °	δ(1950.0) ′	θ (角分)	m-M (星等)	D (秒差距)	$E_{(B-V)}$ (星等)	$(B-V)_T$ (星等)	V_B (星等)	类型		
6830		19	48.9	22	57	10	11.2	1,740	0.53	−0.29	9.06	B0	IV	2m
6834		19	50.2	29	17	7	12.4	3,030	0.72	−0.23	8.50	B2	I	2m
6866		20	02.1	43	51	10	10.4	1,200	0.14	+0.06	9.82	A3	I	2p
6871		20	04.0	35	38	25	11.2	1,740	0.46	−0.24	6.81	B0	IV	3p
6882/5		20	09.6	26	24	22	8.9	600	0.08	+0.36	9.8	F2	I-IV	2-3p
6910		20	21.3	40	37	13	11.1	1,650	1.05	−0.28	7.37	B0	IV	3p
6913	(M29)	20	22.1	38	22	7	10.5	1,150	1.02	−0.28	8.57	B0	III	3p
6940		20	32.5	28	08	26	9.5	800	0.26	+0.15	8.58	A7	III	1m
7031		21	05.7	50	38	7	10.3	1,150	0.93	—	11.30	—	II	3pU
7062		21	21.4	46	10	6	11.2	1,760	0.74	−0.18	8.05	B4	II	2p
7063		21	22.4	36	17	8	9.0	630	0.08	−0.10	8.90	B8	II	2p
7067		21	22.4	47	48	2.5	12.3	2,900	0.84	−0.25	9.46	B1	II	2p
7086		21	28.8	51	22	7.5	10.7	1,400	0.72	−0.10	10.72	B8	I	2m
7092	(M39)	21	30.4	48	13	32	7.0	250	0.00	−0.06	6.5	B9	II	2p
7128		21	42.3	53	29	3.2	12.0	2,500	1.10	−0.24	7.84	B2	II	2p
7142		21	44.7	65	34	11	10.0	1,000	0.18	−0.40	10.14	F2	II	1m
7160		21	52.3	62	22	10	9.6	840	0.30	−0.30	6.70	O9.5	I	3p
7209		22	03.2	46	15	20	9.8	910	0.15	0.00	8.55	A0	II	2p
7235		22	10.8	57	02	4.5	12.4	3,030	0.92	−0.28	8.79	B0	II	3p
7261		22	18.6	57	50	7	9.4	700	0.58	−0.10	9.61	B8	II	2p
7380		22	45.0	57	50	9	11.6	2,100	0.58	−0.30	7.57	O9	III	2p
7510		23	09.4	60	18	3	12.6	3,300	1.08	−0.30	8.75	O9	II	2mU
7654	(M52)	23	22.0	61	19	13	11.6	2,100	0.68	−0.20	7.76	B3	II	2r
7686		23	27.8	48	51	13	—	—	—	—	7.74	—	I	3p
7789		23	54.5	56	27	19	11.4	1,870	0.28	0.30	12.5	F0	III	1r
7790		23	55.9	60	56	4.5	12.8	3,600	0.52	−0.18	11.7	B4	II	2p

表 56 119 个球状星团(星族 II)的名称、密集类型、方位、吸收 $A=0.24\csc b^{\text{II}}$、视角直径 θ、25 颗最亮星的平均视星等 B、视距离模数 $(m-M)$(假定 $M=-0.8$)、距离 D、作吸收改正后的色指数 $(B-V)_0$、光谱型、视向速度 V_r 及星团内的变星数目 [1]

NGC	星团 (名称)[1)]	密集类型	α(1950.0) h	α(1950.0) m	δ(1950.0) °	δ(1950.0) ′	A (星等)	θ (角分)	25 颗最亮星的平均视星等 B	(m-M) (星等)	D (千秒差距)	$(B-V)_0$	光谱型	V_r (公里·秒⁻¹)	变星数目
104	杜鹃座 47	III	00	21.9	−72	21	0.34	(44.0)	13.54	13.75	5.0	—	G3	−24	11
288		X	00	50.2	−26	52	0.24	(12.4)	14.98	15.78	14.8	—	—	−47	1
362	(Δ62)	III	01	00.6	−71	07	0.33	(17.7)	14.23	15.03	9.7	—	F8	+221	14
1261		II	03	10.9	−55	25	0.31	(4.0)	—	—	(29.0)	—	F8	+46	—
Pal 1		XII	03	25.7	79	28	0.70	(1.3)	19.6	20.4	87.1	—	—	—	0
Pal 2		IX	04	43.1	31	23	1.53	(1.7)	—	—	—	—	—	—	—
1841		—	04	52.5	−84	05	0.48	(2.4)	—	—	—	—	—	—	—
1851	(Δ508)	II	05	12.4	−40	05	0.42	(11.5)	—	—	(17.0)	—	F7	+309	2
1904	(M79)	V	05	22.2	−24	34	0.50	(7.8)	15.52	16.32	16.5	—	F6	+196	5
2298		VI	06	47.2	−35	57	0.87	(4.2)	—	—	(30.0)	—	F7	+64	6
2419		II	07	34.8	39	00	0.55	(6.2)	18.32	20.0	83.2	0.57	F6	+14	36
2808		I	09	10.9	−64	39	1.26	(18.8)	15.09	15.89	9.1	—	F8	+101	4
Pal 3		XII	10	03.0	00	18	0.36	(2.2)	—	20.3	100.0	—	—	—	1
3201	(Δ445)	X	10	15.5	−46	09	1.53	(29.3)	—	—	(4.0)	—	—	+493	77
Pal 4		XII	11	26.6	29	15	0.25	(2.5)	20.59	20.3	100.0	—	—	—	2
4147		VI	12	07.6	18	49	0.25	3.4	16.94	16.55	18.7	0.50	A6	+191	16
4372		XII	12	23.0	−72	24	1.38	(19.8)	—	—	(6.0)	—	—	+66	0
4590	(M68)	X	12	36.8	−26	29	0.40	6.4	14.98	15.78	14.0	0.57	A7	−116	38
4833		VIII	12	56.0	−70	36	1.72	(12.7)	—	—	(5.0)	—	—	+204	10
5024	(M53)	V	13	10.5	18	26	0.24	8.3	15.28	16.7	20.0	0.52	F4	−112	43
5053		XI	13	13.9	17	57	0.24	(8.9)	15.86	16.25	16.4	0.57	(F5)	—	10
5139	半人马座 ω	VIII	13	23.8	−47	03	0.93	(65.4)	—	14.28	5.2	—	F7	+230	165
5272	(M3)	VI	13	39.9	28	38	0.25	9.3	14.35	15.32	10.6	0.58	F7	−153	189
5286	(Δ388)	V	13	43.0	−51	07	1.26	(13.6)	—	—	(12.0)	—	F8	+45	0
5466		XII	14	03.2	28	46	0.25	(9.2)	15.99	16.79	21.3	0.65	(F5)		22
5634		IV	14	27.0	−05	45	0.32	(3.7)	16.65	17.45	26.8	0.56	F5	−63	7
5694		VII	14	36.7	−26	19	0.48	2.3	17.17	17.97	31.6	0.57	F0	−187	0
14499		XI	14	52.7	−82	02	0.67	(6.2)	—	—	—	—	—	—	—
5824		I	15	00.9	−32	53	0.64	3.3	—	—	(46.0)	0.55	F5	−58	27
Pal 5		XII	15	13.5	00	05	0.34	(10.3)	17.27	18.07	35.2	—	—		5
5897		XI	15	14.5	−20	50	0.48	(8.7)	15.49	16.2	14.5	0.58	(F5)	—	4
5904	(M5)	V	15	16.0	02	16	0.33	10.7	14.07	14.80	8.1	0.62	F6	+49	97

1 密集类型、方位、吸收、平均星等 B、距离模数、距离、色指数、光谱型及视向速度取自阿普(Arp, 1965)的文章。密集类型按沙普利(Shapley 和 Sawyer, 1927)的系统，在该系统中，数字 I 至 XII 表示中央恒星减少密集的一系列均等的类型。不在圆括号内的角直径值取自克朗等(Kron 和 Mayall, 1960)的文章，这种直径值是包括 90% 光度的直径。在圆括号内的角直径值取自霍格(Hogg, 1963)的文章，这些值是根据沙普利等(Shapley 和 Sayer, 1935; 以及 Mowbroy, 1946)的文章中的表汇编的。在圆括号内的距离及变星数目取自霍格(Hogg, 1963)的文章，视向速度则取自梅奥尔(Mayall, 1946)的文章。

1) 符号 Δ 是邓洛普(Dunlop)星云星团表，M 是梅西叶(Messier)星云星团表，NGC 是星云星团新总表(New General Catalogue)。NGC 104 又名杜鹃座 47，NGC 5139 又名半人马座 ω，过去以为它们是恒星。——译者注

（续表）

NGC	星团（名称[1]）	密集类型	α(1950.0) h	α(1950.0) m	δ(1950.0) °	δ(1950.0) ′	A（星等）	θ（角分）	25 颗最亮星的平均视星等 B	(m-M)（星等）	D（千秒差距）	$(B-V)_0$	光谱型	V_r（公里·秒$^{-1}$）	变星数目
5927		VIII	15	24.5	−50	29	2.75	(12.0)	—	—	(3.0)	—	G2	−96	—
5946		IX	15	31.8	−50	30	3.44	(2.6)	—	—	—	—	—	—	—
5986	(Δ552)	VII	15	42.8	−37	37	0.99	8.6	—	—	(14.0)	0.57	G1	+2	5
A-vdB	(Pal 14)	—	16	08.8	15	02	0.36	(8.4)	—	20.0	83.2	—	—	—	0
6093	(M80)	II	16	14.1	−22	52	0.74	8.6	15.07	15.87	12.6	0.64	F9	+18	8
6101		X	16	20.0	−72	06	0.87	(14.6)	—	—	—	—	—	—	—
6121	(M4)	IX	16	20.6	−26	24	0.87	22.6	13.21	14.01	4.3	0.76	(G0)	+65	43
6139		II	16	24.3	−38	44	1.97	(2.6)	—	—	(13.0)	—	F8	+20	—
6144		XI	16	24.2	−25	56	0.93	11.1	16.04	16.84	16.9	0.66	(G0)	—	1
6171		X	16	29.7	−12	57	0.61	12.8	15.75	16.55	17.1	0.88	G3	−147	24
6205	(M13)	V	16	39.9	36	33	0.37	12.9	13.85	14.3	6.3	0.56	F6	−241	10
6218	(M12)	IX	16	44.6	−01	52	0.55	21.5	14.07	14.87	7.4	0.70	F8	−16	1
6229		IV	16	45.6	47	37	0.37	3.6	16.50	17.30	24.7	0.62	F8	−150	22
6235		X	16	50.4	−22	06	1.07	(1.9)	16.56	17.36	19.4	—	—	—	2
6254	(M10)	VII	16	54.5	−04	02	0.61	16.2	14.17	14.42	6.2	0.71	G1	+71	3
6266	(M62)	IV	16	58.1	−30	03	1.97	8.8	16.16	16.96	11.7	0.52	G2	−75	83
6273	(M19)	VIII	16	59.5	−26	11	1.53	9.3	14.98	15.78	7.1	0.58	F3	+102	4
6284		IX	17	01.5	−24	41	1.38	5.7	16.37	17.17	16.3	0.62	G2	+22	6
6287		VII	17	02.1	−22	38	1.26	5.8	16.39	17.19	17.0	0.88	(G5)	—	3
6293		IV	17	07.1	−26	30	1.72	6.2	15.63	16.43	9.8	0.50	F0	−73	5
6304		VI	17	11.4	−29	24	2.75	8.0	—	—	(6.0)	0.60	G4	−98	11
6316		III	17	13.4	−28	05	2.75	7.2	—	—	—	0.55	(G5)	—	—
6325		IV	17	15.0	−23	42	1.72	4.9	—	—	—	1.18	(G5)	—	—
6333	(M9)	VIII	17	16.2	−18	28	1.38	7.9	15.75	16.55	12.8	0.59	F2	+224	13
6341	(M92)	IV	17	15.6	+43	12	0.42	12.3	13.96	14.80	7.9	0.50	F1	−118	16
6342		IV	17	18.2	−19	32	1.53	4.7	—	—	—	0.89	(G5)	—	—
6352		XI	17	21.6	−48	26	1.97	(8.9)	—	—	—	—	—	—	—
6355		—	17	20.9	−26	19	2.75	6.1	—	—	—	0.80	(G5)	—	—
6356		II	17	20.7	−17	46	1.38	6.3	16.72	17.4	19.1	0.77	G4	+31	5

(续表)

NGC	星团(名称)	密集类型	α(1950.0)		δ(1950.0)		A	θ	25颗最亮星的平均视星等 B	(m-M)	D	$(B-V)_0$	光谱型	V_r	变星数目
			h	m	°	′	(星等)	(角分)		(星等)	(千秒差距)			(公里·秒$^{-1}$)	
HP1		IX	17	24.9	−29	57	4.59	(1.3)	—	—	—	—	—	—	—
6362	(Δ225)	X	17	26.6	−67	01	0.82	(8.5)	—	—	(7.0)	—	—	−18	31
6366		XI	17	25.1	−05	02	0.87	(5.8)	16.06	16.86	17.4	—	—	—	2
6380		—	17	31.9	−39	02	3.44	—	—	—	—	—	—	—	—
6388		III	17	32.6	−44	43	1.97	(6.8)	—	—	(13.0)	—	G3	+81	—
6397	(Δ366)	IX	17	36.8	−53	39	1.15	(19.0)	12.71	13.51	2.9	—	F5	+11	3
6401		—	17	35.6	−23	53	3.44	(1.0)	—	—	—	—	(G5)	—	—
6402	(M14)	VIII	17	35.0	−03	15	0.99	10.8	15.68	16.48	14.5	0.94	G1	−129	72
Pal 6		XI	17	40.6	−26	12	13.75	(1.8)	20.7	21.5	—	—	—	—	—
6426		IX	17	42.4	03	12	0.87	(2.2)	—	—	(21.0)	0.70	(G0)	—	12
6440		V	17	45.9	−20	21	4.59	5.8	—	—	(4.0)	0.77	G5	−133	—
6441		III	17	46.8	−37	02	2.75	(3.0)	—	—	(9.0)	—	G2	−70	—
6453		IV	17	48.0	−34	37	3.44	(3.6)	—	—	—	0.24	(G5)	—	—
6496		XII	17	55.5	−44	13	1.38	(12.7)	—	—	—	—	—	—	—
6517		IV	17	59.1	−08	57	2.30	7.7	—	—	—	1.19	(G0)	—	—
6522		VI	18	00.4	−30	02	3.44	4.1	—	—	(12.0)	0.22	F8	—	9
6528		V	18	01.6	−30	04	2.75	3.0	—	—	—	0.66	(G5)	—	0
6535		XI	18	01.3	−00	18	1.38	(1.3)	16.27	17.07	15.6	—	—	—	1
6539		X	18	02.1	−07	35	2.30	13.8	—	—	—	1.99	(G0)	—	1
6541	(Δ473)	III	18	04.4	−43	44	1.26	(23.2)	13.45	14.25	4.0	—	F6	−148	1
6544		—	18	04.3	−25	01	6.88	(1.0)	—	—	(5.0)	—	G2	−12	—
6553		XI	18	06.3	−25	56	4.59	8.2	—	—	—	0.32	(G5)	—	6
6558		—	18	07.0	−31	47	2.30	—	—	—	—	—	—	—	9
I1276		XII	18	08.0	−07	14	2.30	(6.0)	18.5	19.3	25.1	—	—	—	5
6569		VIII	18	10.4	−31	50	1.97	6.6	—	—	—	0.69	(G5)	—	5
6584	(Δ376)	VIII	18	14.6	−52	14	0.82	(9.7)	—	—	(13.0)	—	F7	+160	0
6624		VI	18	20.5	−30	23	1.72	4.2	—	—	(13.0)	0.63	G5	+69	—
6626	(M28)	IV	18	21.5	−24	54	2.30	9.1	14.90	15.7	4.8	0.45	G1	+1	16
6637	(M69)	V	18	28.1	−32	23	1.26	6.8	—	—	(7.0)	0.62	G5	+95	5

（续表）

NGC	星团（名称）	密集类型	α(1950.0) h	α(1950.0) m	δ(1950.0) °	δ(1950.0) ′	Δ（星等）	θ（角分）	25颗最亮星的平均视星等 B	$(m-M)$（星等）	D（千秒差距）	$(B-V)_0$	光谱型	V_r（公里·秒$^{-1}$）	变星数目
6638		VI	18	27.9	−25	32	1.72	4.3	16.54	17.34	15.2	0.59	G4	−14	—
6642		—	18	28.4	−23	30	2.30	(0.8)	—	—	—	—	—	—	—
6652		VI	18	32.5	−33	02	1.15	4.2	—	—	(16.0)	0.56	G4	−124	—
6656	(M22)	VII	18	33.3	−23	58	1.72	26.2	13.03	13.7	3.0	0.50	F7	−144	24
Pal8		X	18	38.5	−19	52	1.97	(1.6)	19.6	20.4	47.9	—	—	—	—
6681	(M70)	V	18	40.0	−32	21	1.07	5.1	—	—	(20.0)	0.40	G3	+198	2
6712		IX	18	50.3	−08	47	2.75	12.3	15.59	15.85	5.7	0.41	G5	−131	12
6715	(M54)	III	18	52.0	−30	32	0.93	4.8	—	—	(17.0)	0.87	F8	+122	80
6717		VIII	18	52.1	−22	47	1.26	(2.6)	16.3	17.1	14.7	—	—	—	—
6723	(Δ573)	VII	18	56.2	−36	42	0.78	11.7	14.32	15.12	7.4	0.49	G4	−3	19
6749		—	19	02.6	01	48	6.88	—	—	—	—	—	—	—	—
6752	(Δ295)	VI	19	06.4	−60	04	0.55	(41.9)	13.36	14.16	5.3	—	F6	−39	1
6760		IX	19	08.6	00	57	3.44	8.9	17.15	17.95	8.4	0.78	(G0)	—	4
6779	(M56)	X	19	14.6	30	05	1.53	10.1	15.54	16.34	10.5	0.43	F6	−145	12
Pal10		XII	19	16.0	18	28	6.88	(3.1)	20.7	21.5	8.3	—	—	—	—
Anon		—	19	25.6	−30	27	0.70	—	—	—	—	—	—	—	—
6809	(M55)	XI	19	36.9	−31	03	0.59	21.1	13.68	14.48	6.0	0.48	(F5)	+170	6
Pal11		XI	19	42.6	−08	09	0.87	(2.8)	17.4	18.2	28.8	—	—	—	0
6838	(M71)	—	19	51.5	18	39	2.75	10.2	15.00	14.15	2.6	0.32	G6	−80	4
6864	(M75)	I	20	03.2	−22	04	0.55	4.9	17.47	18.27	35.1	0.64	G2	−198	11
6934		VIII	20	31.7	07	14	0.74	3.3	16.06	16.86	18.3	0.51	G0	−360	51
6981	(M72)	IX	20	50.7	−12	44	0.44	6.4	16.15	16.95	21.1	0.54	G3	−255	39
7006		I	20	59.1	16	00	0.74	3.0	17.51	18.6	39.8	0.50	F2	−348	49
7078	(M15)	IV	21	27.6	11	57	0.53	9.4	14.44	15.50	10.5	0.54	F2	−107	103
7089	(M2)	II	21	30.9	−01	03	0.41	6.8	14.77	15.75	12.3	0.55	F4	−5	17
7099	(M30)	V	21	37.5	−23	25	0.33	6.8	14.79	15.59	13.3	0.48	A7	−174	4
Pal12		XII	21	43.7	−21	28	0.32	(2.1)	17.4	18.2	38.0	—	—	—	3
Pal13		XII	23	04.2	12	28	0.36	(4.0)	19.6	20.4	100.0	—	—	—	4
7492		XII	23	05.7	−15	54	0.27	(4.3)	17.20	18.00	34.7	—	—	—	1

$$
\left.\begin{aligned}
\alpha&=\frac{-(1-\gamma)}{2} \quad (\text{当 } \nu<\nu_c);\\
\alpha&=\frac{-(2\gamma+1)}{3} \quad (\text{当 } \nu>\nu_c \text{ 及瞬时注入});\\
\alpha&=-\frac{\gamma}{2} \quad (\text{当 } \nu>\nu_c \text{ 及连续注入}),
\end{aligned}\right\} \tag{5-79}
$$

式中临界频率 ν_c 由下式给出：

$$\nu_c=340\,H^{-3}T^{-2} \text{ 兆赫}, \tag{5-80}$$

T 是射电源的年龄，以年为单位，H 是磁场强度，以高斯为单位。在低频段射电源的观测表明它们的磁场量级为 $10^{-4\pm1}$ 高斯(Kellermann 和 Pauliny-Toth, 1969)。所以高频截止频率 ν_c 的观测(比 ν_c 更高时，射电源流量很快减小)根据下式将提供一个年龄：

$$T=[10^{16}\nu_c^{-1}]^{1/2} \text{ 年}, \tag{5-81}$$

式中 ν_c 的单位是兆赫并假定 $H=0.3\times10^{-4}$ 高斯。设 $\nu_c=100$ 兆赫，$T=10^7$ 年，而 $\nu_c=10000$ 兆赫时，$T=10^6$ 年。范德兰 (van der Laan, 1963) 给出了把年龄与电子参数联系起来的一种详细的射电源模型。施密特 (Schmidt, 1966) 注意到强射电源与年龄量级为 10^{10} 年的亮椭圆星系成协。射电源及椭圆星系的空间密度统计资料表明类星射电源及射电星系的年龄分别约为 10^6 及 10^9 年。

5.2.6. 宇宙时间尺度

随着星系线光谱的首次测量(Huggins, 1864)之后，发现所有具有线光谱的星系的谱线都移向光谱红端(Slipher, 1914, 1917, 1925)，这表明相对于地球而言星系有普遍的退行运动。当根据星系中最亮恒星的光度或星系团中最亮星系的光度来确定星系的距离时，哈勃等(Hubble, 1929; 以及 Hubble 和 Humason, 1931, 1934) 证明退行速度 v 与星系距离 D 成线性关系。这样哈勃图表示一种宇宙年龄 T，其值如下：

$$T=\frac{D}{v}=\frac{1}{H_0}=0.98\times10^{10}\,h^{-1} \text{ 年}^{1)}, \tag{5-82}$$

式中哈勃常数 $H_0=100h$ 公里·秒$^{-1}$·兆秒差距$^{-1}$，h 是一个常数。h 的详尽值随第 5.3 节所讨论的距离尺度而异，流行的估计给出 $h\approx0.5$。正如博克等(Bok, 1946; 以及 Sandage, 1971)所指出的，放射衰变年龄、恒星演化年龄及哈勃膨胀年龄都得出年龄为 $3\times10^9\sim10^{10}$ 年。作为参考，在图 35 中示出对于 474 个光学星系(Humason, Mayall 和 Sandage, 1956)、射电星系及类星体(Sandage, 1971)观测到的哈勃图。

除了在大的红移情况外，哈勃定律的线性形式是均匀的、各向同性的、膨胀宇宙模型的必然结果。设 k 表示罗伯逊-沃尔克(Robertson-Walker)度规的曲率指数，q_0 表示减速参数，H_0 表示哈勃常数，则弗里特曼(Friedmann)时间 T_0(宇宙年龄)由下式给出：

$$T_0=\frac{1}{H_0}\left[\frac{1}{(1-2q_0)}-\frac{q_0}{(1-2q_0)^{3/2}}\cosh^{-1}\left(\frac{1}{q_0}-1\right)\right]$$
$$(\text{当 } k=-1,\ \rho_0<\rho_c \text{ 和 } 0<q_0<0.5); \tag{5-83}$$

$$T_0=\frac{2}{3}H_0^{-1} \quad (\text{当 } k=0,\ \rho_0=\rho_c \text{ 和 } q_0=0.5); \tag{5-84}$$

1) 原文误为 $0.98\times10^{-10}h^{-1}$ 年。——译者注

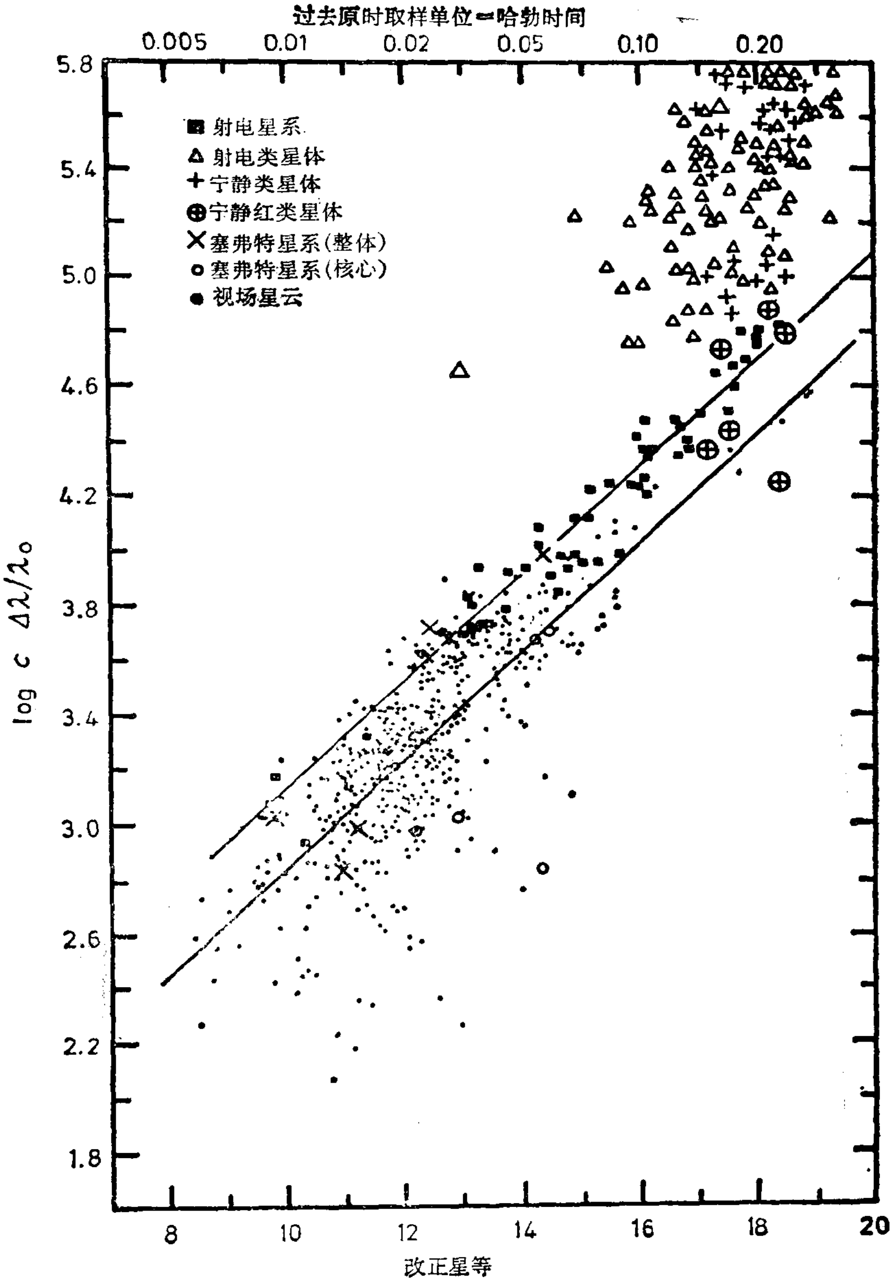


图 35 474 个视场星云的红移-星等关系（哈勃图）（取自 Humason, Mayall 和 Sandage, 1956 的文章），以及射电星系、类星体及塞弗特星系的红移-星等关系（取自 Sadage, 1971 的文章）。纵坐标是乘积值 $c\Delta\lambda/\lambda_0$，其中 $z=\Delta\lambda/\lambda_0$ 是红移，横坐标是视目视星等，已作孔径效应的改正，K 是银河系内的遮光及吸收。图中上面一条直线是桑德奇(Sandage)关于最亮的星系团的数据的拟合线，下面一条直线是视场星云数据的最佳线性拟合

$$T_0=\frac{q_0}{H_0(2q_0-1)^{3/2}}\left[\cos^{-1}\left(\frac{1}{q_0}-1\right)-\frac{1}{q_0(2q_0-1)^{1/2}}\right]$$
$$(当\ k=1,\ \rho_0>\rho_c\ 和\ q_0>0.5), \tag{5-85}$$

这里 ρ_0 表示宇宙物质及辐射能量密度的现在值，临界密度 ρ_c 由下式给出·

$$\rho_c=\frac{3H_0^2}{8\pi G}=1.9\times10^{-29}h^2\ 克·厘米^{-3}。 \tag{5-86}$$

在第 5.7.1 节中将详细描述 k、q_0 及 H_0 等宇宙学参数。若 $k=1$，宇宙是封闭的，并且是振荡的；若 $k=0$，则是欧几里得的，并且是膨胀着的；$k=-1$，则是开放的，并且是膨胀着的。若 $k=0$ 及 $q_0=0.5$，则当 $H_0=50$ 公里·秒$^{-1}$·兆秒差距$^{-1}$时，弗里特曼时间 $T_0=2H_0^{-1}/3=1.3\times10^{10}$ 年。

5.3. 距离

5.3.1. 月球、太阳及行星的距离

希腊人首先在月食时观测地影的角宽度 φ 以估计月球的视差 $\pi_☾$:

$$\pi_☾\approx\pi_☾+\pi_\odot=(\theta+\varphi)/2, \tag{5-87}$$

式中太阳视差 $\pi_\odot$ 与月球视差比较可忽略不计，θ 是太阳的角大小。喜帕恰斯(Hipparchus, 公元前 125 年)测出 $\theta/2=16'36.9''$，$\varphi\approx2.5\theta$ 及 $\pi_☾=3489''$。现在通用的值是 (Clemence, 1965)：

$$\sin\pi_☾=\frac{a_e}{a_☾}={}^*3422.431\ 角秒, \tag{5-88}$$

式中地球半径 $a_e={}^*6.378140\times10^8$ 厘米，与月球的平均距离是：

$$a_☾={}^*3.84401\times10^{10}\ 厘米。 \tag{5-89}$$

正如开普勒(Kepler, 1619)所首先指出并为牛顿(Newton, 1687)所解释的，一颗行星绕太阳公转的轨道周期 P 与其椭圆轨道的半长径 a 的关系式为(开普勒第三定律)：

$$P^2=\frac{4\pi^2a^3}{G(m+M_\odot)}, \tag{5-90}$$

式中牛顿引力常数 $G={}^*6.6720\times10^{-8}$ 达因·厘米$^{-2}$·克$^{-2}$，m 是行星质量，太阳质量 $M_\odot={}^*1.9891\times10^{33}$ 克。由(5-90)式可知，地球轨道的半长径即天文单位距离[1] 由下式给出：

$$a=\left(\frac{m_e+M_\odot}{m_p+M_\odot}\right)^{1/3}\left(\frac{P}{P_p}\right)^{2/3}a_p\approx\left(\frac{P}{P_p}\right)^{2/3}a_p, \tag{5-91}$$

式中 m_e 及 P 分别是地球的质量及轨道周期，m_p 和 P_p 是另一颗行星的质量和轨道周期，a_p 是另一颗行星轨道的半长径。利用(5-91)式，由火星(Cassini, 1672)及金星(Encke, 1835)的观测可以估算出太阳视差 $\pi_\odot=a_e/a$，分别得出 $\pi_\odot=9.5''$ 和 $\pi_\odot=8.6''$。现在通用的值是：

$$\pi_\odot={}^*8.794148\ 角秒, \tag{5-92}$$

这是根据天文单位距离 a 的精确的雷达测定值而推导出的。最精确的天文单位距离 a 的值(Ash, Shapiro 和 Smith, 1967; Muhleman, 1969)是：

$$a={}^*1.49597870\times10^{13}\ 厘米。 \tag{5-93}$$

在表 57 中列出用雷达测量行星轨道运动所得的参数。这些数据粗略地符合行星距离的提丢斯(Titius, 1772)-波得(Bode, 1772)定则。设 a_n 表示行星 n 的平均距离，则提丢斯-波得定则为：

---

1) 原文为"天文单位"，系"天文单位距离"的旧称。——译者注

表57[1)] 太阳系行星的距离、半径、倒数质量、恒星周期、自转周期、偏心率、倾角、密度、反照率及理论温度[1]

天体	符号	平均距离 a (以天文单位距离为单位)	半径 (公里)	倒数质量	恒星周期 (回归年)	自转周期 (日)	偏心率 e(1970.0)	轨道面与黄道面的交角 °	′	″	密度 (克·厘米$^{-3}$)	反照率	温度[3] (开)
太阳	☉	—	695,990	1.0		25.38	—	—			1.409	—	5770
月球	☽	[2]	1,738.2	27,068,742.9	2		0.05490	05	08	±09′	3.341	0.068	~441
水星	☿	0.387099	2,439	6,023,600	0.241	58.65	0.205628	07	00	10.37	5.48	0.056	441
金星	♀	0.723332	6,050	408,523.5	0.615	−243	0.006787	03	23	37.07	5.25	0.76	230
地球	⊕	1.000000	6,378.140	332,946.0	1.000	1.00	0.016722	00	00	00.00	5.518	0.39	246
火星	♂	1.523691	3,395	3,098,710	1.881	1.03	0.093377	01	51	01.20	3.96	0.15	218
木星	♃	5.202803	71,400	1,047.355	11.862	0.4135	0.04845	01	18	17	1.33	0.51	102
土星	♄	9.53884	60,000	3,498.5	29.458	0.43	0.05565	02	29	22	0.704	0.50	76
天王星	♅	19.1819	25,900	22,869	84.014	(1.00)	0.04724	00	46	23	1.24	0.66	49
海王星	♆	30.0578	24,750	19,314	164.793	0.76	0.00858	01	46	22	1.66	0.62	40
冥王星	♇	39.4387	1,350	138,727,500	247.687	6.387	0.250	17	10		1.47	—	42

[1] 地球＋月球的倒数质量是 *328900.5。地球质量与月球质量之比为 μ^{-1}=*81.3007。

[2] 月球平均距离是 384400 公里。月球的恒星周期是 27.32166 日。

[3] 行星的温度是指球形黑体的温度。

[1)] 原文表中数据已陈旧，现已改列新数据。——译者注

$$a_n = 0.1[4+3\times 2^n], \tag{5-94}$$

式中 $n=-\infty$、0、1、…、7，距离以天文单位距离为单位。塔哈尔等(Ter Haar 和 Cameron, 1963)指出用下列形式的定则表示上述数据则更好

$$a_n = 2.05[1.89^n], \tag{5-95}$$

式中 $n=0$、1、2、…、9，尼托(Nieto, 1972)对提丢斯-波得定则作了历史的及理论的讨论。

5.3.2. 近邻星的距离——周年视差、长期视差、动力学视差及太阳运动

贝塞耳等(Bessel 和 Rath, 1839)首先测出天鹅座 61 星的周年视差是 0.3136″；紧接着亨德森等 (Henderson, 1839；以及 Struve, 1840) 分别测定了半人马座 α 及织女星的视差。周年视差 π 与恒星距离 D 及天文单位距离 a 的关系式如下：

$$\tan\pi \approx \pi = \frac{a}{D}。 \tag{5-96}$$

以秒差距为单位的恒星距离由下式给出：

$$D = \pi^{-1} \text{ 秒差距}, \tag{5-97}$$

式中 π 的单位是角秒。距离的秒差距单位是：

$$1 \text{ 秒差距} = {}^*3.08567757\times 10^{18} \text{ 厘米} = {}^*3.26163343 \text{ 光年}, \tag{5-98}$$

式中 1 光年是光在 1 年中所经过的距离。在表 58 中给出在 5 秒差距以内的恒星的距离及视差。格利斯星表(Gliese, 1969)给出了在 20 秒差距以内 1049 颗恒星的距离及视差。

赫歇耳(Herschel, 1753)首先观测到太阳相对于本星群的运动，并定出太阳运动的向点与现在通用值只相差几度。相对于给出视向速度及自行的一般星表中的大多数恒星而言，标准太阳运动速度为(Delhaye, 1965)：

$$v_\odot = 19.5 \text{ 公里}\cdot\text{秒}^{-1}, \tag{5-99}$$

在历元 1900.0 的运动方向为：

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha_\odot = 18^{\text{h}}.0; & \delta_\odot = 30^\circ; \\ l_\odot^{\text{II}} = 56^\circ; & b_\odot^{\text{II}} = 23^\circ。 \end{array}\right\} \tag{5-100}$$

相对于太阳近邻星的基本的太阳运动速度为：

$$v_\odot = 15.4 \text{ 公里}\cdot\text{秒}^{-1}, \tag{5-101}$$

在历元 1900.0 的运动方向为：

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha_\odot = 17^{\text{h}}.8; & \delta_\odot = 25^\circ; \\ l_\odot^{\text{II}} = 51^\circ; & b_\odot^{\text{II}} = 23^\circ。 \end{array}\right\} \tag{5-102}$$

当一些测量作了太阳运动的改正后，就称它们是属于本地静止标准。太阳相对于恒星的运动的早期讨论已由博斯等(Boss, 1910; Eddington, 1910; 以及 Smart 和 Green, 1936)给出。

长期视差 π_s 定义为在一年内太阳对其向点运动的距离。

$$\pi_s = \frac{v_\odot}{4.74}\pi \approx 4.11\pi \text{ 角秒}, \tag{5-103}$$

式中 π 是周年视差，单位是角秒；每年 1 天文单位距离相当于 4.74 公里·秒$^{-1}$。这里的近似数值是对于 $v_\odot = 15.4$ 公里·秒$^{-1}$ 计算的，但是 $v_\odot$ 随参考恒星而变，可高达 100 公里·秒$^{-1}$。

赫歇耳(Herschel, 1803)还首先观测到双星相互绕转。设恒星在椭圆轨道上运动，则按照开普勒第三定律((5-90)式)双星的动力学视差 π_D 由下式给出：

表 58 距离在 5 秒差距以内的恒星的方位、自行、方位角、

号数	格里斯号数	星名	α(1950.0)		δ(1950.0)		自行	方位角	视向速度	视差	距离
			h	m	°	′	″	°	(公里·秒[1])	(″)	(光年)
1		太阳									
2	559.551	半人马座 α [2]	14	36.2	−60	38	3.68	281	−22	0.760	4.3
3	699	巴纳德星	17	55.4	+04	33	10.31	356	−108	0.552	5.9
4	406	沃尔夫 359	10	54.1	+07	19	4.71	235	+13	0.431	7.6
5	411	BD+36°2147	11	00.6	+36	18	4.78	187	−84	0.402	8.1
6	244	天狼星	06	42.9	−16	39	1.33	204	−8	0.377	8.6
7	65	卢伊顿 726-8	01	36.4	−18	13	3.36	80	+30	0.365	8.9
8	729	罗斯 154	18	46.7	−23	53	0.72	103	−4	0.345	9.4
9	905	罗斯 248	23	39.4	+43	55	1.58	176	−81	0.317	10.3
10	144	波江座 ε	03	30.6	−09	38	0.98	271	+16	0.305	10.7
11	866	卢伊顿 789-6	22	35.7	−15	36	3.26	46	−60	0.302	10.8
12	447	罗斯 128	11	45.1	+01	06	1.37	153	−13	0.301	10.8
13	820	天鹅座 61	21	04.7	+38	30	5.22	52	−64	0.292	11.2
14	845	印第安座 ε	21	59.6	−57	00	4.69	123	−40	0.291	11.2
15	280	南河三	07	36.7	+05	21	1.25	214	−3	0.287	11.4
16	725	Σ2398	18	42.2	+59	33	2.28	324	+5	0.284	11.5
17	15	BD+43°44	00	15.5	+43	44	2.89	82	+17	0.282	11.6
18	887	CD−36°15693	23	02.6	−36	09	6.90	79	+10	0.279	11.7
19	71	鲸鱼座 τ	01	41.7	−16	12	1.92	297	−16	0.273	11.9
20	273	BD+5°1668	07	24.7	+05	23	3.73	171	+26	0.266	12.2
21	825	CD−39°14192	21	14.3	−39	04	3.46	251	+21	0.260	12.5
22	191	卡普坦星	05	09.7	−45	00	8.89	131	+245	0.256	12.7
23	860	克鲁格60	22	26.3	+57	27	0.86	246	−26	0.254	12.8
24	234	罗斯 614	06	26.8	−02	46	0.99	134	+24	0.249	13.1
25	628	BD-12°4523	16	27.5	−12	32	1.18	182	−13	0.249	13.1
26	35	范玛伦星	00	46.5	+05	09	2.95	155	+54	0.234	13.9
27	473	沃尔夫 424	12	30.9	+09	18	1.75	277	−5	0.229	14.2
28		G158-27	00	04.2	−07	48	2.06	204		0.226	14.4
29	1	CD-37°15492	00	02.5	−37	36	6.08	113	+23	0.225	14.5
30	380	BD+50°1725	10	08.3	+49	42	1.45	249	−26	0.217	15.0
31	674	CD-46°11540	17	24.9	−46	51	1.13	147		0.216	15.1
32	832	CD-49°13515	21	30.2	−49	13	1.81	185	+8	0.214	15.2
33	682	CD-44°11909	17	33.5	−44	17	1.16	217		0.213	15.3
34	83.1	卢伊顿 1159-16	01	57.4	+12	51	2.08	149		0.212	15.4
35	526	BD+15°2620	13	43.2	+15	10	2.30	129	+15	0.208	15.7
36	687	BD+68°946	17	36.7	+68	23	1.33	194	−22	0.207	15.7
37	440	卢伊顿 145-141	11	43.0	−64	33	2.68	97		0.206	15.8
38	876	BD-15°6290	22	50.6	−14	31	1.16	125	+9	0.206	15.8
39	166	波江座 40	04	13.0	−07	44	4.08	213	−43	0.205	15.9
40	388	BD+20°2465	10	16.9	+20	07	0.49	264	+11	0.202	16.1
41	768	河鼓二，牵牛星	19	48.3	+08	44	0.66	54	−26	0.196	16.6
42	702	蛇夫座 70	18	02.9	+02	31	1.13	167	−7	0.195	16.7
43	445	AC+79°3888	11	44.6	+78	58	0.89	57	−119	0.194	16.8
44	873	BD+43°4305	22	44.7	+44	05	0.83	237	−2	0.193	16.9
45	169.1	斯坦 2051	04	26.8	+58	53	2.37	146		0.192	17.0

[1] 取自范德坎普(van de Kamp, 1971)的文章。符号 b 表示一颗看不见的伴星。

[2] 半人马座 α 子星 C(“比邻星”)的方位是 $14^h26.3^m$, $-62°28'$; 离开半人马座 α 子星 A 及 B 的质心 2°11′。子星 C

视向速度、视差、距离、视星等、光谱型、绝对星等及光度[1]

号数	目视视星等及光谱型			目视绝对星等			目视光度			号数
	A	B	C	A	B	C	A	B	C	
1	−26.8 G2			4.8			1.0			1
2	0.1 G2	1.5 K6	11 M5e	4.5	5.9	15.4	0.3	0.36	0.00006	2
3	9.5 M5	b		13.2	b		0.00044	b		3
4	13.5 M8e			16.7			0.00002			4
5	7.5 M2	b		10.5	b		0.0052	b		5
6	−1.5 A1	8.3 DA		1.4	11.2		23.0	0.0028		6
7	12.5 M6e	13.0 M6e		15.3	15.8		0.00006	0.00004		7
8	10.6 M5e			13.3			0.0004			8
9	12.2 M6e			14.7			0.00011			9
10	3.7 K2			6.1			0.30			10
11	12.2 M6			14.6			0.00012			11
12	11.1 M5			13.5			0.00033			12
13	5.2 K5	6.0 K7	b	7.5	8.3	b	0.083	0.040	b	13
14	4.7 K5			7.0			0.13			14
15	0.3 F5	10.8		2.6	13.1		7.6	0.0005		15
16	8.9 M4	9.7 M5		11.2	12.0		0.0028	0.0013		16
17	8.1 M1	11.0 M6		10.4	13.3		0.0058	0.00040		17
18	7.4 M2			9.6			0.012			18
19	3.5 G8			5.7			0.44			19
20	9.8 M4	b		11.9	b		0.0014	b		20
21	6.7 M1			8.8			0.025			21
22	8.8 M0			10.8			0.0040			22
23	9.7 M4	11.2 M6		11.7	13.2		0.0017	0.00044		23
24	11.3 M5e	14.8		13.3	16.8		0.0004	0.00002		24
25	10.0 M5			12.0			0.0013			25
26	12.4 DG			14.2			0.00017			26
27	12.6 M6e	12.6 M6e		14.4	14.4		0.00014	0.00014		27
28	13.8 m			15.5			0.00005			28
29	8.6 M3			10.4			0.00058			29
30	6.6 K7			8.3			0.040			30
31	9.4 M4			11.1			0.0030			31
32	8.7 M3			10.4			0.0058			32
33	11.2 M5			12.8			0.00063			33
34	12.3 M8			13.9			0.00023			34
35	8.5 M2			10.1			0.0076			35
36	9.1 M3.5	b		10.7	b		0.0044	b		36
37	11.4			12.6			0.0008			37
38	10.2 M5			11.8			0.0016			38
39	4.4 K0	9.5 DA	11.2 M4e	6.0	11.2	12.8	0.33	0.0027	0.00063	39
40	9.4 M4.5	b		10.9	b		0.0036	b		40
41	0.8 A7			2.3			10.0			41
42	4.2 K1	6.0 K6		5.7	7.5		0.44	0.083		42
43	11.0 M4			12.4			0.0009			43
44	10.1 M5e	b		11.5	b		0.0021	b		44
45	11.1 M5	12.4 DC		12.5	13.8		0.0008	0.0003		45

在方位角 282° 的自行是 3.84″。1 光年＝9.46052840×10¹⁷ 厘米。

$$\pi_D=\frac{\alpha}{(M_1+M_2)^{1/3}P^{2/3}} \text{ 角秒}, \tag{5-104}$$

式中 α 是轨道半长径的角大小，单位是角秒；M_1 及 M_2 是恒星质量，单位是太阳质量单位；P 是轨道周期，单位是年。因为 π_D 随质量的变化是很小的，M_1+M_2 经常取为 2。

设视向速度能够由观测得出，轨道要素就能够测定。作为一级近似，视向速度 v_r 由下式给出(Doppler, 1842)：

$$v_r=\frac{c\Delta\lambda}{\lambda}, \tag{5-105}$$

式中 $\Delta\lambda$ 是波长 λ 相对其静止值的位移，退行天体(红移)的 v_r 取为正值，近行天体的 v_r 取为负值。皮克林(Pickering, 1889)及沃格尔(Vogel, 1890)几乎同时发表对分光双星的观测；观测到谱线分离随时间而变。观测到的轨道视向速度 v_r 与轨道要素的关系式为：

$$v_r=\frac{2\pi a_1\sin i}{P\sqrt{1-e^2}}(e\cos\omega+u)=K(e\cos\omega+u), \tag{5-106}$$

式中 $\pi=3.14159$，轨道周期 P 是 v_r 的变化周期，a_1 是子星 1 的轨道半长径，i 是其倾角，$a\sin i$ 是半长径在视线上的投影，e 是偏心率，ω 是交点线与拱线间的夹角，u 是向径与交点线间的夹角。常数 K 是直接从视向速度的最大值 $v_{\max}$ 及最小值 $v_{\min}$ 得出的。

$$K=\frac{v_{\max}-v_{\min}}{2}。 \tag{5-107}$$

常数 e 及 ω 能够由 v_r 对时间的曲线形状与各种各样 e 及 ω 的 $(e\cos\omega+u)$ 曲线作比较而定出(King, 1920)。然后根据 K、P 及 e 求得 $a\sin i$。子星 1 的质量由下式给出：

$$M_1\sin^3 i=\frac{(a\sin i)^3}{P^2\left(1+\frac{a_1\sin i}{a_2\sin i}\right)}, \tag{5-108}$$

式中 $a\sin i=a_1\sin i+a_2\sin i$ 能够根据两颗子星的视向速度图定出。我们还有关系式 $a^3=GP^2(M_1+M_2)/(4\pi^2)$ 以及 $a_1M_1=a_2M_2$。

5.3.3. 移动星团的距离及统计视差

哈雷(Halley, 1718)首先注意到天狼星、毕宿五、参宿四及大角所占的方位不同于托勒玫(Ptolemy)在《大综合论》[1]一书中所给出的方位。设 v_T 是恒星空间速度在与视线相切方向的分量，则观测到的自行 μ 由下式给出：

$$\mu=\frac{v_T}{4.74D} \text{ 角秒/年}, \tag{5-109}$$

式中 v_T 的单位是公里·秒$^{-1}$，恒星距离 D 的单位是秒差距。方位及自行的测量精度分别是每世纪 0.05″ 和 0.2″，这是弗里克等(Fricke 和 Kopff, 1963)对 1535 颗基本星和 1987 颗补充星的测量分析结果。这个基本星表称为 FK4 星表并用作给出历元及春分点 1950.0 的 258997 颗恒星的方位及自行的史密松天体物理台星表(1966)的参考星表。这些数据录有电子计算机用的磁带，可供利用。

当一群星显示汇聚到一个公共点时，视差 π 由下式给出：

$$\pi=\frac{4.74\,\mu}{v_r\tan\theta}, \tag{5-110}$$

式中 v_r 是沿视线方向的速度分量，单位是公里·秒$^{-1}$ 这是可以由线光谱的测量((5-105)

1) 《大综合论》英文译名为《天文学大成》，共 13 卷。阿拉伯文译本改名《伟大论》。——译者注

式)得出的，θ 是给出恒星与汇聚点之间的角距离。威尔逊等(Wilson, 1953；以及 Abt 和 Biggs, 1972) 列表给出了恒星的视向速度。在表 58 中给出在 5 秒差距以内的恒星的视向速度。

卡普坦(Kapteyn, 1950, 1912)首先注意到恒星在两个星流中流动，这两个星流的向点在历元 1900.0 分别是 $\alpha=91°$、$\delta=-15°$ 及 $\alpha=288°$、$\delta=-64°$ (参看 Eddington, 1910)。对于单一星流，易于根据卡普坦的习惯把自行分成 ν 及 τ 两个分量，即沿着和垂直于经过恒星及太阳向点位置的大圆方向。设 μ_α 及 μ_δ 分别表示自行在赤经及赤纬方向的分量，则

$$\begin{aligned}\nu&=\mu_\alpha\cos\delta\sin\psi-\mu_\delta\cos\psi;\\ \tau&=\mu_\delta\sin\psi+\mu_\alpha\cos\delta\sin\psi,\end{aligned}\tag{5-111}$$

式中 δ 是恒星的赤纬，ψ 是连接恒星至太阳向点及恒星至北天极的两个大圆弧间的夹角。恒星与太阳运动向点间的角距离 λ 由下式给出：

$$\cos\lambda=\sin\delta\sin\delta_\odot+\cos\delta\cos\delta_\odot\cos(\alpha-\alpha_\odot),\tag{5-112}$$

式中 α、δ 是恒星在历元 1900.0 的赤道坐标，$\alpha_\odot$、$\delta_\odot$ 是(5-100)式所给出的太阳向点的坐标。角度 ψ 由下式给出：

$$\sin\lambda\cos\psi=\sin\delta_\odot\cos\delta-\sin\delta\cos\delta_\odot\cos(\alpha-\alpha_\odot)。\tag{5-113}$$

统计视差 π 则由下式给出：

$$\pi=\frac{4.74}{v_\odot}\frac{\langle\nu\sin\lambda\rangle}{\langle\sin^2\lambda\rangle}\ 角秒,\tag{5-114}$$

式中 $v_\odot$ 由(5-99)式给出，ν 的单位是角秒/年，$\langle\ \rangle$ 表示对整个星群的平均。设星群具有随机取向的速度，则统计视差可由下式确定：

$$\pi=\frac{4.74\langle|\tau|\rangle}{\langle|v_R+v_\odot\cos\lambda|\rangle}\ 角秒,\tag{5-115}$$

式中 v_R 是视向速度，单位是公里·秒$^{-1}$，τ 的单位是角秒/年，$|\ |$ 表示绝对值。这些统计视差方法能够在约 500 秒差距内得出精确距离，而上节讨论的周年视差只能在约 30 秒差距内得出精确距离。

5.3.4. 银河系自转及运动距离

斯利弗(Slipher, 1914)首先观测到河外星系的自转，沙普利(Shapley, 1918)首先证明球状星团系统集聚于银心而不是集聚于太阳。林德伯拉特(Lindblad, 1927)因而提出星团的高的视速度可能是由于太阳及球状星团在绕银心旋转。奥尔特(Oort, 1927, 1928)提供了银河系较差自转的一些观测证据，并给出绕银心作圆周运动的下列公式。与银心距离为 R 的一个银河系天体的视向速度 v_r 由下式给出：

$$\begin{aligned}v_r&=R_0[\omega(R)-\omega(R_0)]\sin l^{\rm II}\cos b^{\rm II};\\ v_r&\approx R_0\left(\frac{d\omega}{dR}\right)_{R=R_0}(R-R_0)\sin l^{\rm II}\cos b^{\rm II}\quad(当\ R-R_0\ll R_0),\end{aligned}\tag{5-116}$$

式中 R_0 是本地静止标准与银心的距离，$\omega(R)$是在 R 处银河系的圆周角速度，$l^{\rm II}$ 及 $b^{\rm II}$ 分别表示银经及银纬。第 5.1.5 节给出赤道坐标转换成银道坐标的公式。银经为 $l^{\rm II}$ 的天体的自行 μ 为：

$$\mu=\frac{1}{4.74}\left[-\frac{1}{2}R_0\left(\frac{d\omega}{dR}\right)_{R=R_0}\cos l^{\rm II}-\frac{1}{2}R_0\left(\frac{d\omega}{dR}\right)_{R=R_0}-\omega(R_0)\right],\tag{5-117}$$

式中μ的单位是角秒/年。银河系较差自转的奥尔特常数 A 及 B 由下式给出 (Schmidt, 1965):

$$\begin{aligned} A &= -\frac{1}{2} R_0 \left(\frac{d\omega}{dR}\right)_{R=R_0} = 15\ \text{公里}\cdot\text{秒}^{-1}\cdot\text{千秒差距}^{-1}; \\ B &= -\frac{1}{2} R_0 \left(\frac{d\omega}{dR}\right)_{R=R_0} - \omega(R_0) = -10\ \text{公里}\cdot\text{秒}^{-1}\cdot\text{千秒差距}^{-1}, \end{aligned} \tag{5-118}$$

式中数字值是国际通用值。利用(5-118)式于(5-116)式与(5-117)式,我们得到:

$$v_r = -2A(R-R_0)\sin l^{\text{II}}\cos b^{\text{II}} \quad (\text{当 } R-R_0 \ll R_0), \tag{5-119}$$

以及

$$\mu = \frac{1}{4.74}[B + A\cos 2l^{\text{II}}]。 \tag{5-120}$$

沿 $|l^{\text{II}}|<90$ 并在银道面内的一个方向,在最靠近银心的点,将出现极大视向速度 $v_{r\max}$。在这一点上,$R=R_0|\sin l^{\text{II}}|$ 及(5-116)式变成:

$$v_{r\max} = 2AR_0\sin l^{\text{II}}(1-|\sin l^{\text{II}}|) = R_0\left[\frac{\theta_c(R)}{R} - \frac{\theta_c(R_0)}{R_0}\right]\sin l^{\text{II}}, \tag{5-121}$$

式中 $R\omega(R)=\theta_c(R)$ 是与银心距离为 R 处的圆周速度。R_0 及 $\theta_c(R_0)$ 的国际通用值为:

$$\begin{aligned} R_0 &= 10\ \text{千秒差距}; \\ \theta_c(R_0) &= R_0(A-B) = 250\ \text{公里}\cdot\text{秒}^{-1}。 \end{aligned} \tag{5-122}$$

由(5-116)式可知,根据视向速度 v_r 的测量可以得出银河系天体与本地静止标准之间的距离 D 的量度。例如,对于邻近太阳的天体,(5-116)式成为:

$$v_r = AD\sin 2l^{\text{II}}\cos^2 b^{\text{II}}。 \tag{5-123}$$

对于在银道面内的天体($b^{\text{II}}\approx 0$),

$$R^2 = R_0^2 + D^2 - 2R_0 D\cos l^{\text{II}}, \tag{5-124}$$

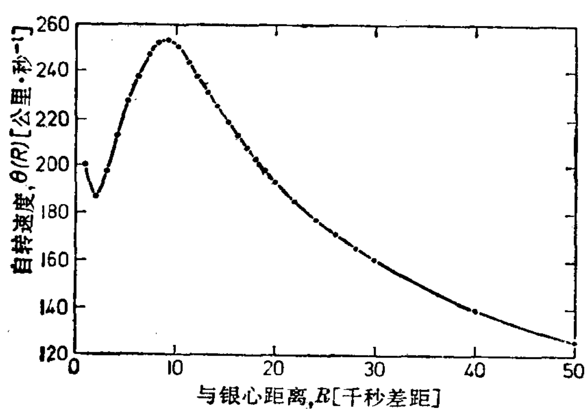


图 36 根据 $R\leqslant R_0$ 时质量密度 $\rho=3930\,R^{-1}-0.02489\,R$ 以及 $R>R_0$ 时 $\rho=1449.2\,R^{-4}$ 的质量模型得出的银河系自转曲线。这里质量密度的单位是太阳质量·秒差距$^{-3}$,R 是与银心的距离,单位是秒差距。在太阳附近,$R=R_0=10$ 千秒差距,$\rho=0.145$ 太阳质量·秒差距$^{-3}$(取自 Schmidt, 1965 的文章)

式中 R 可以根据 v_r 及(5-119)式定出。不过,当 $R<R_0$ 时,与一个视向速度 v_r 值相应的 R 值有两个,因而在确定与银河天体的距离时有不确定性。解决此种不确定的办法是利用 (5-116) 式从 v_r 得出 $\omega(R)$,然后把 $\omega(R)$ 与给出 $\omega(R)$ 随 R 而变的函数的模型作比较。利用中性氢谱线的观测 (Kwee, Muller 和 Westerhout, 1954; Kerr, 1962) 及银河质量分布的理论模型 (Schmidt, 1956, 1965),可以作出一张圆周速度 $\theta_c(R)=R\omega(R)$ 对距离 R 的曲线图(参看图 36 及 37)。从视向速度以及这样的自转曲线得到的距离称为运动距离。我们银河系的自转曲线的外边部分不是由观测确定的,它是根据对图 36 的说明给出的一种假设的质量模型确定的。罗伯茨等 (Roberts 和 Rots, 1973) 证明一些邻近旋涡星系的自转曲线下降得没有象图 36 在距离大于 15 千秒差距范围所显示的那么快。他们的资料表明在远离旋涡星系中心的大距离上可

能存在着大量物质，而这些星系比用光度测量所得到的范围要大。

林德伯拉特(Lindblad, 1927)首先提出如果物质臂与一个以图样速度 $\Omega_p(R)$ 绕银河系传播的密度波图样共存，则就能解释星系旋臂能在较差自转中持续这一观测事实，$\Omega_p(R)$ 满足下列条件：

$$\Omega_c(R)-\frac{\varkappa(R)}{m}<\Omega_p(R)<\Omega_c(R)+\frac{\varkappa(R)}{m}, \tag{5-125}$$

式中 $\Omega_c(R)$ 及 $\Omega_p(R)$ 分别是物质及密度波在距离星系中心 R 处绕星系中心旋转的角速度，$\varkappa(R)$ 是周转圆频率，m 是一个整数，它表示旋臂的数目。周转圆频率用下式定义：

$$[\varkappa(R)]^2=[2\Omega_c(R)]^2\left\{1+\frac{R}{2\Omega_c(R)}\frac{d\Omega_c(R)}{dR}\right\}, \tag{5-126}$$

它与旋臂之间的间距 λ_* 的关系为：

$$\lambda_*\approx\frac{4\pi^2G\sigma(R)}{[\varkappa(R)]^2}, \tag{5-127}$$

其中 G 是引力常数，$\sigma(R)$ 是质量表面密度[1]。存在密度波的情况比起不存在密度波的情况来，将观测到在氢集中区的外侧及内侧分别具有较高及较低的速度。因而自转曲线将出现振荡，事实上这已被观测到(参看图 37)，并且运动距离必须作密度波效应的改正。应用林

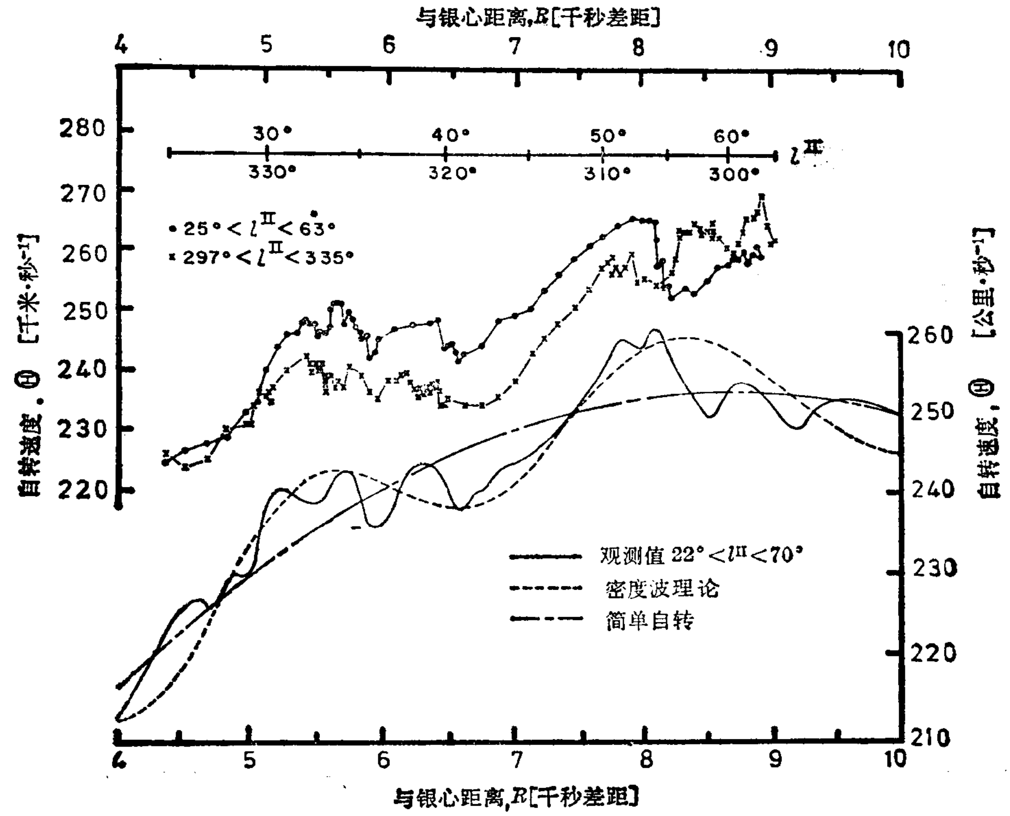


图 37 视银河系自转曲线。图中上面两条曲线是银心以北及以南部分的银河系自转曲线，它是在假定为圆周运动并且不考虑星流的情况下根据中性氢 HI 轮廓线的切点观测而推导得出的(取自 Kerr, 1969 的文章)。图中下面的实线是在银经范围 22°<l^{II}<70° 内根据类似观测推导得出的部分银河系自转曲线(取自 Shane 和 Bieger-Smith, 1966 的文章)。长短划虚线是无星流运动的银河系基本自转曲线，而短划虚线是受密度波理论星流扰动的银河系基本自转曲线(取自 Burton, 1971, 1974 的文章)

1) 应为投影质量表面密度。——译者注

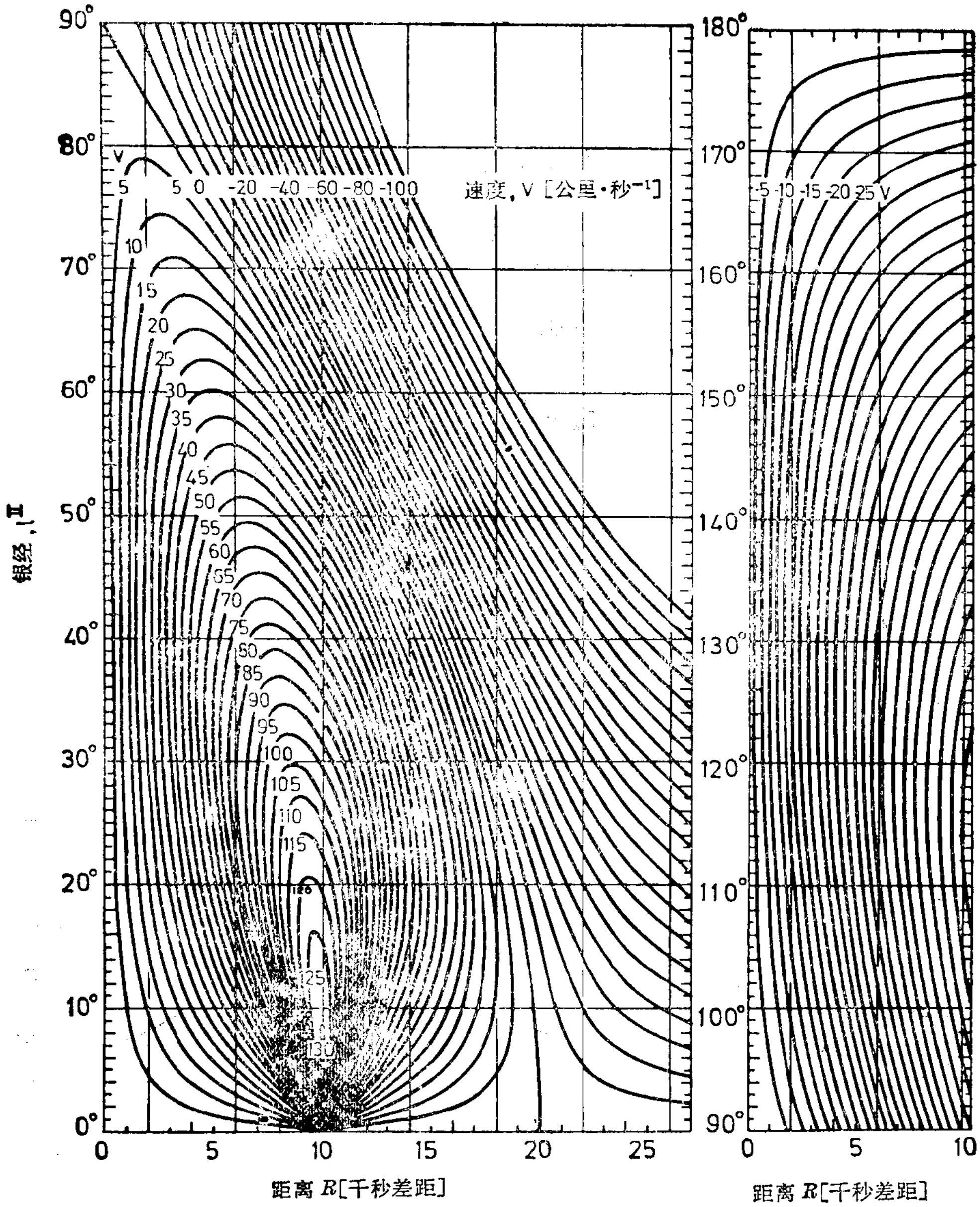


图 38 视向速度 v 与离太阳距离 R 及与银经 l^{II} 的关系曲线。图中视向速度是指相对于本地静止标准的值（取自 Burton, 1970 的文章）

家翘、袁旗和徐遐生的密度波理论(Lin, Yuan 和 Shu, 1969)可以进行这种改正。他们推导了旋臂间距 λ 与角频率 ν 的色散关系，ν 是恒星所看到的波图样的频率：

$$\nu=\frac{m[\Omega_c(R)-\Omega_p(R)]}{\kappa(R)}。\tag{5-128}$$

他们证明当 $|\nu|$ 从零变到 1 时，λ 平滑地从 $0.55\lambda_*$ 变到 $0.05\lambda_*$，并且 $\Omega_p(R_0)=13.5$ 公里·秒$^{-1}$·千秒差距$^{-1}$。伯顿 (Burton, 1971, 1974) 利用林家翘等(Lin 等, 1969)的密度波理论以及施密特(Schmidt, 1965)的自转曲线

$$\theta_c(R)=\begin{cases}250.0+4.05(10-R)-1.62(10-R)^2\ 公里\cdot秒^{-1}\\ \quad(当\ 4\ 千秒差距\leqslant R\leqslant 10\ 千秒差距)\\ 885.44R^{-1/2}-30000R^{-3}\ 公里\cdot秒^{-1}\\ (当\ 10\ 千秒差距\leqslant R\leqslant 14\ 千秒差距)\end{cases}\tag{5-129}$$

求出有关视向速度与离太阳的距离 R 以及银经 l^{II} 之间的相互联系曲线(参看图 38)。这里视向速度是指相对于本地静止标准的值，所以观测到的视向速度要对由于太阳运动所引起的视向运动分量 $v_{r\odot}$ 及地球绕太阳转动所引起的视向运动分量进行改正。设源的赤经 α 及赤纬 δ 的历元与太阳向点的 $\alpha_\odot$ 及 $\delta_\odot$((5-99)式)的相同，则有：

$$v_{r\odot}=19.5(\cos\alpha_\odot\cos\delta_\odot\cos\alpha\cos\delta+\sin\alpha_\odot\cos\delta_\odot\sin\alpha\sin\delta+\sin\delta_\odot\sin\delta)\ 公里\cdot秒^{-1}。\tag{5-130}$$

对于退离观测者的运动，视向速度定为正值，并且观测到的视向速度必须减去 $v_{r\odot}$ 以获得改正到本地静止标准的视向速度。对地球绕太阳的轨道运动所引起的视向速度改正 $v_{r地}$ 由下式给出(Schlesinger, 1899)：

$$v_{r地}=-v\cos\beta\sin(\lambda_s-\lambda)+v_e\sin(\Gamma-\lambda)\cos\beta,\tag{5-131}$$

式中 λ 及 β 是天体的黄道坐标，λ_s 是确定 λ 及 β 的历元的太阳黄经，Γ 是太阳的近地点黄经[1)]，其值如下：

$$\Gamma=281°13'15.00''+6189.03''T+1.63''T^2+0.012''T^3,\tag{5-132}$$

式中 T 是从 1900.0(到有关历元)算出的回归世纪的数目，$e=0.016722$[2)] 是地球轨道的偏心率，v 由下式给出：

$$v=\frac{2\pi a}{P(1-e^2)^{1/2}}=29.789\times10^5\ 厘米\cdot秒^{-1}\ ^{2)},\tag{5-133}$$

式中地球轨道[3)]的半长径 $a=1.49597870\times10^{13}$ 厘米[2)]，一恒星年的秒数 $P=31558150$ 秒[4)]。地球绕轴自转所引起的视向速度改正 $v_{r改}$ 为：

$$v_{r改}=v_e\sin h\cos\delta\cos\varphi',\tag{5-134}$$

式中地球的赤道自转速度是 $v_e=$*0.46510 公里·秒$^{-1}$，对子午圈以西的天体的时角 h 取为正值，对子午圈以东的天体的时角 h 取为负值，δ 是天体的赤纬，φ' 是天文台的地心纬度。第 5.1.3 节讨论过由于折射效应所造成视向速度的附加改正。

5.3.5. 变星的距离

正如克拉克(Clerke, 1905)所指出的，本身光度有变化的恒星可以分成两类——一类是周期为几小时至 1 天左右的短周期变星(天琴 RR 型变星)，另一类是周期为 2 至 60 天的长周期变星(经典造父变星或仙王[5)]δ 变星)。巴德(Baade, 1944)接着证明天琴 RR 型变星属于称为星族 II 的一大类恒星，而经典造父变星属于星族 I。星族 II 恒星在球状星团中发现，而星族 I 恒星在银河星团和星系的旋臂中发现。星族 II 恒星比起星族 I 恒星来，金属含量较低及年龄较大。天琴 RR 型变星的绝对目视星等 M_V 范围很窄，其值如下(Arp, 1962; Sandage, 1962; Christy, 1966)：

1) 原文误为"Γ 是太阳在近地点的黄经"。——译者注

2) 原文为 $e=0.0167$, $v\approx29.974\times10^5$ 厘米·秒$^{-1}$, $a=1.49597892\times10^{13}$ 厘米。——译者注

3) 原文漏"轨道"两字。——译者注

4) 原文此句误为"一太阳年的平恒星秒数 $P=31470758$ 秒"。——译者注

5) 原文误为"造父"。——译者注

$$0.2\lesssim M_V\lesssim 1.0 \quad (\text{对天琴 RR 型变星})。\tag{5-135}$$

只要一颗天琴 RR 型变星根据其短周期而加以确认后，它的距离 D 就可以根据观测到的视目视星等 m_V 由下列关系式求得：

$$m_V - M_V = 5\log D - 5,\tag{5-136}$$

其中距离 D 的单位是秒差距（1 秒差距 $\approx 3.086\times10^{18}$ 厘米）。不过天琴 RR 型变星的亮度不足以使我们在 3×10^5 秒差距以外发现它们。

经典造父变星比天琴 RR 型变星约亮 350 倍，但是它们的绝对光度范围很大。不过莱维特 (Leavitt, 1912) 表明在麦哲伦云中的 25 颗造父变星的视光度大致上说来随周期成线性增亮。虽然到麦哲伦云的距离是不知道的，但是罗素等 (Russell, 1913; Hertzsprung, 1913; 以及 Shapley, 1918, 1919) 利用统计视差法校准周光关系用以估计其他邻近变星的距离。随着邓肯等(Duncan, 1922; 以及 Hubble, 1922) 在河外星系中发现造父变星，周光关系已被用来确定河外星系距离尺度（参看 Hubble, 1936）。琼斯 (Jeans, 1929) 论证一颗振荡恒星的周期 P 一定随 $\rho^{-1/2}$ 而变，其中 ρ 是恒星的质量密度（参看 (3-434) 式），根据这点就可以对周光经验关系式提供一种理论框架。设 M_b 表示绝对热星等，T_e 是恒星有效温度，则由 $P\propto\rho^{-1/2}$ 得出

$$\log P + 0.23M_b + 3\log T_e = \text{常数}。\tag{5-137}$$

设所有变星具有相同质量及温度 T_e，则

$$\log P + 0.30M_V = \text{常数},\tag{5-138}$$

式中 M_V 是绝对目视星等。遗憾得很，早期确定(5-137)式及(5-138)式中的常数的努力都失败了，这是由于不认识存在两类变星，即还有另一类变星（室女 W 型变星）属于星族 II，它有长周期，但比相同周期的经典造父变星暗约四倍。

巴德(Baade, 1952)首先只用经典造父变星修正了周光关系，克拉夫特(Kraft, 1961)总结了阿普(Arp)及桑德奇(Sandage)等对含有经典造父变星的星团距离的测量，使修正的周光关系置于更加坚实可靠的基础之上。周光关系的最新的形式为 (Sandage 和 Tammann, 1971)：

$$M_B^0 = -3.534\log P + 3.647(\langle B\rangle^\circ - \langle V\rangle^\circ) - 2.469,\tag{5-139}$$

式中 $$\langle B\rangle^\circ - \langle V\rangle^\circ = 0.323\log P + 0.290,$$

而克拉夫特(Kraft, 1961) 给出：

$$\begin{aligned} M_V^0 &= -1.67 - 2.54\log P;\\ M_B^0 &= -1.33 - 2.25\log P, \end{aligned}\tag{5-140}$$

这里 M_V^0 及 M_B^0 分别表示已作红化改正的(角标 0)目视区($\lambda\approx5480$ 埃)及蓝区($\lambda=4400$ 埃)的绝对星等，$\langle B\rangle - \langle V\rangle$ 是平均视星等差 $m_B - m_V$。观测 (Sandage 和 Tammann, 1968) 表明 M_B 有 ±0.60 星等的弥散，M_V 有 ±0.50 星等的弥散，据认为这是由于有效温度的狭小范围所致，在这范围中恒星变成不稳定的及振荡的(参看 Sandage, 1958)。

单颗造父变星的本身光度能够根据下列斯式藩-玻耳兹曼公式 (Stefan, 1879; Boltzmann, 1884) 确定：

$$L = 4\pi R^2\sigma T_e^4,\tag{5-141}$$

式中 $\sigma = {}^*5.67032\times10^{-5}$ 尔格·秒$^{-1}$·厘米$^{-2}$·开$^{-4}$，R 是恒星半径，T_e 是有效温度。测量恒星光谱，并把它与理论上的黑体光谱（参看第一章）比较，就能确定有效温度。就象巴德 (Baade, 1926) 所首先指出的，由(5-141)式可知，光变值 Δl 与视光度 l 之比由下式给出：

$$\frac{\Delta l}{l}=\frac{2\Delta R}{R}=p\,\frac{\Delta v_r \Delta t}{R}, \tag{5-142}$$

式中 ΔR 是半径 R 的变化，$\Delta v_r \Delta t$ 表示观测到的视向速度变化的时间累积，因子 p 是在 3/2 与 4/3 之间。韦塞林克 (Wesselink, 1949) 利用仙王 δ 型变星的亮度及视向速度的变化的观测以确定 ΔR 及 R, 并观测色指数以得出 T_e。只要本身光度是已知的，恒星的距离就可以根据观测到的光度以及众所周知的事实即光度随距离的平方减弱而得出。

5.3.6. 宇宙距离尺度

经典造父变星亮到足以在远达约 4×10^6 秒差距处用它们来确定距离，但还不是亮到足以给出最近的星系团的距离。哈勃(Hubble, 1936)假设在星系中最亮的恒星都具有相同的绝对星等 M_s 如下：

$$M_s=-6.1\pm0.4。 \tag{5-143}$$

不过某些哈勃恒星是 HII 区，最近的估计给出：

$$M_s\approx-9.3, \tag{5-144}$$

这就有可能估计远到约 3×10^7 秒差距的距离。桑德奇(Sandage, 1968)给出在一个星系中最亮的球状星团的绝对星等为：

$$M_c=-9.8\pm0.3, \tag{5-145}$$

并给出室女座星系团中最亮的椭圆星系的绝对星等 M_G:

$$M_G=-21.68。 \tag{5-146}$$

设所有星系团中最亮的椭圆星系都具有相同的绝对星等，则这就可能估计远到约 10^{10} 秒差距的距离。不过，斯科特(Scott, 1957)曾指出，当我们窥视太空更远时，我们就能挑选出越来越丰富的星系团可用于研究，而若星系光度没有上限，则最亮的星系将有越来越大的绝对星等。

哈勃(Hubble, 1929)首先指出光度距离 D_L 与星系红移的关系式为：

$$D_L=\frac{zc}{H_0}, \tag{5-147}$$

式中 H_0 是哈勃常数。设光度距离定义为光线的视强度随距离平方而减弱的那种距离，则作为一级近似我们得出(Heckmann, 1942)：

$$D_L=H_0^{-1}c[z+0.5(1-q_0)z^2], \tag{5-148}$$

式中 q_0 是减速因子，精确的关系式由下式给出(Mattig, 1958, 1959)：

$$D_L=\frac{c}{H_0 q_0^2}\{zq_0+(q_0-1)[-1+\sqrt{(2q_0z+1)}]\}。 \tag{5-149}$$

宇宙学距离可用光度 D_L(Whittacker, 1931; Walker, 1933)，视角直径 D_A(Whittacker, 1931; Etherington, 1933)或用视差 D_p(McCrea, 1935; Temple, 1938)来测定。角直径距离 D_A 与 D_L 的关系式是：

$$D_A=(1+z)^{-2}D_L, \tag{5-150}$$

视差距离 D_p 由下式给出：

$$D_p=\frac{c[zq_0+(q_0-1)(-1+\sqrt{2q_0z+1})]}{H_0[q_0^4(1+z)^2-(2q_0-1)\{zq_0+(q_0-1)(-1+\sqrt{2q_0z+1})\}^2]^{1/2}}。 \tag{5-151}$$

由观测自行给出的附加距离 D_M 与 D_L 的关系式是:

$$D_M=(1+z)^{-1}D_L。\tag{5-152}$$

有关这些距离的讨论可参看温伯格(Weinberg, 1972)的书。

5.4. 质量

5.4.1. 惯性质量及引力质量

惯性质量为 M_i 的一个粒子的运动方程为(Newton, 1687):

$$F=M_i a,\tag{5-153}$$

而引力定律为:

$$F=-M_g g,\tag{5-154}$$

式中 M_g 是引力质量。这里 F 是产生加速度 a 的力或者是引力加速度 g 在质量上造成的力。在与球形质量距离为 R 处,我们得出 (Newton, 1687):

$$g=\frac{m_g G}{R^2},\tag{5-155}$$

式中 m_g 是引力质量, $G={}^*6.6720\times10^{-8}$ 达因·厘米^2·克$^{-2}$ 是牛顿引力常数。厄缶(Eötvos, 1890)在一个重要实验中证明木料及铂的 M_i 与 M_g 之差小于 10^{-9}。罗尔等 (Roll, Krotov 和 Dicke, 1964; 以及 Braginsky 和 Panov, 1971)已分别把此极限改进至 10^{-11} 和 10^{-12}。还已证明,分子(Esterman 等, 1938)及中子(Dabbs 等, 1965)的下落加速度与原子相同,而铜中的电子受到的引力是与自由电子受到的引力相同(Witteborn 和 Fairbank, 1967)。比尔(Beall, 1970)已给出惯性质量与引力质量相等的进一步的证据。

于是,所有可获得的实验证据都表明我们可以沿用牛顿的方式,对于引力相互作用的粒子系统的运动方程可写出如下:

$$M_n\frac{d^2X_n}{dt^2}=G\Sigma_m\frac{M_nM_m(X_m-X_n)}{|X_m-X_n|^3},\tag{5-156}$$

式中 M_n 是第 n 个粒子的质量, X_n 是粒子在时刻 t 时,在惯性参考系中的笛卡儿位矢。

5.4.2. 太阳及太阳系卫星的质量

由(5-156)式可知,一个粒子在环绕另一个粒子的轨道上的运动方程为:

$$r^2\frac{d\theta}{dt}=h,\tag{5-157}$$

式中 r 是从轨道焦点量度的作轨道运动的行星的径矢, 角度 θ 是从球面坐标系的参考轴量起的沿轨道的角距离, h 是积分常数。常数 h 等于径矢扫过面积率的两倍。(5-157)式表示开普勒第二定律(Kepler, 1619), 该定律说明: 当行星作轨道运动时, 太阳质量中心与行星质量中心的连线在相等的时间内所扫过的面积相等。因为椭圆的面积是 πab, 其中 a 及 b 分别是半长径及半短径,我们可得出掠面常数 h 为:

$$h=\frac{2\pi ab}{P}=\frac{2\pi a^2(1-e^2)^{1/2}}{P},\tag{5-158}$$

式中 P 是轨道周期, $b^2=a^2(1-e^2)$,其中 e 是轨道偏心率。

轨道的极坐标方程式为:

$$r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(\theta-\omega)},\tag{5-159}$$

式中近日点角距 ω 是近日点的 θ 值，近日点是轨道上离太阳所在焦点最近的一点（参看图39）。按照 $e<1$、$e=1$ 或 $e>1$，轨道成为椭圆的、抛物线的或双曲线的。

牛顿 (Newton, 1687) 万有引力为：

$$F=-G\frac{mM}{r^2}, \qquad (5\text{-}160)$$

这是质量为 m 的物体与另一质量为 M 的物体之间的吸引力，其中 r 是两个物体的间距，实验室测量给出 (Cavendish, 1798; Heyl, 1930; Rose 等, 1969)：

$$G=6.674\pm0.012\times10^{-8}\ \text{达因·厘米}^2\text{·克}^{-2}\ {}^{1)}, \qquad (5\text{-}161)$$

式中 *0.0041 代表三倍标准偏差。由 (5–156) 式及 (5–160) 式可知，质量为 m 的物体在一个与质量为 M 的物体一起运动的非转动轴系中的速度 v 由下式给出：

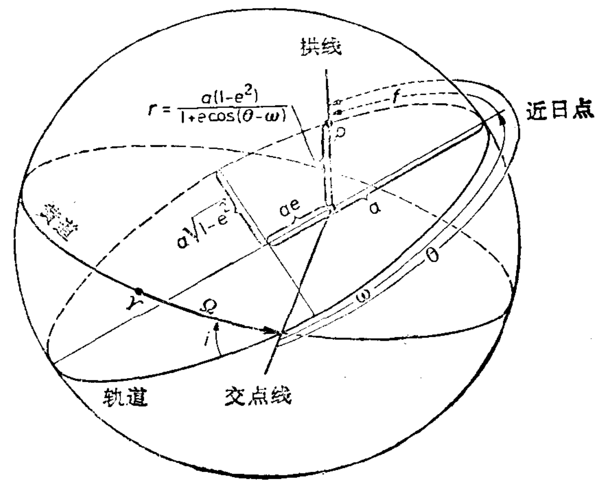


图 39 行星轨道要素的图示。图中 a 是半长径，e 是偏心率，i 是倾角，Ω 是升交点黄经，ω 是近日点角距，Υ 表示春分点

$$v^2=G(m+M)\left[\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right], \qquad (5\text{-}162)$$

式中 a 是 m 的椭圆轨道的半长径。按照 $v<v_{逸}$、$v=v_{逸}$ 或 $v>v_{逸}$，轨道成为椭圆的、抛物线的或双曲线的，其中逃逸速度 $v_{逸}$ 由下式给出：

$$v_{逸}=\left[\frac{2G(m+M)}{r}\right]^{1/2}。 \qquad (5\text{-}163)$$

由 (5–157) 式、(5–158) 式及 (5–160) 式可知，对于椭圆轨道

$$\frac{P^2}{a^3}=\frac{4\pi^2}{G(m+M)}, \qquad (5\text{-}164)$$

这是开普勒第三定律 (Kepler, 1619)。当轨道是椭圆时，其平面由轨道面与某种参考平面间的倾角 i 所决定。两个平面的交线称为交点线，升交点是作轨道运动的天体从南半球到北半球时所通过的那个交点。设参考平面是黄道面，轨道更可以用升交点黄经 Ω 来确定。此角度是春分点与升交点在黄道上的弧长。在轨道上离太阳所在的焦点最近的点即近日点是由升交点沿轨道量度的角距 ω 所确定的。角度 ω 称为近日点角距，有时以 $\tilde{\omega}=\omega+\Omega$ 代替，这称为近日点黄经。因此位于椭圆上的一个质点用真近点角 f 来确定，f 是从近日点沿轨道量度的角距。在表 57 中给出行星的轨道要素，在表 59 中给出行星的天然卫星的轨道要素。

对于质量为 M_s 的卫星绕地球的运动，(5–164) 式成为：

$$GM_\oplus\left(1+\frac{M_s}{M_\oplus}\right)=n^2a_s^3\approx GM_\oplus, \qquad (5\text{-}165)$$

式中下标 $\oplus$ 及 s 分别表示地球及卫星，$n=2\pi P$ 是卫星的以恒星为基准的运动，单位是弧度·秒$^{-1}$。当人造卫星观测用 (5–165) 式时，即得 (Clemence, 1965)：

1) 最新值 $G=6.6720\pm0.0041\times10^{-8}$ 达因·厘米·克$^{-2}$。——译者注

表59 太阳系行星的卫星的平均距离、恒星周期、轨道倾角、轨道偏心率、直径、质量及密度[1]

卫 星	平均距离 (行星赤道半径=1)	平均距离 (公里)	周期 (天)	轨道面与行星赤道面交角	轨道偏心率	直径 (公里)	质量 (行星=1)	质量 (克)	密度 (克·厘米$^{-3}$)
月 球	60.268	384,401	27.321661	28°35′ to 18°19′ 2	0.05490	3,476	0.01229	7.344×10^{25}	3.34
火卫一	2.82	9,380	0.318910	1°8′	0.0210	—	—	—	—
火卫二	7.06	23,500	1.262441	1°46′	0.0028	—	—	—	—
木卫五	2.531	180,500	0.498179	0°24′	0.003	—	—	—	—
木卫一	5.911	421,600	1.769138	0°2′ } 3	0.0000	3,240	0.0000381±30	7.23×10^{25}	4.06
木卫二	9.405	670,800	3.551181	0°28′	0.0003	2,830	0.0000248±5	4.70×10^{25}	3.95
木卫三	15.003	1,070,000	7.154553	0°11′	0.0015	4,900	0.0000817±10	1.55×10^{26}	2.52
木卫四	26.388	1,882,000	16.689018	0°15′	0.0075	4,570	0.0000509±40	9.66×10^{25}	1.94
木卫六	160.8	11,470,000	250.57	27°38′	0.15798	—	—	—	—
木卫十	166	11,850,000	263.55	29°01′	0.13029	—	—	—	—
木卫七	165	11,800,000	259.65	24°46′	0.20719	—	—	—	—
木卫十二	297	21,200,000	631.1	147° } 2	0.16870	—	—	—	—
木卫十一	316	22,600,000	692.5	164°	0.20678	—	—	—	—
木卫八	329	23,500,000	738.9	145°	0.378	—	—	—	—
木卫九	332	23,700,000	758	153°	0.275	—	—	—	—
土卫一	3.07	185,400	0.942422	1°31′	0.0201	—	6.68×10^{-8}	—	—
土卫二	3.95	237,900	1.370218	0°01′	0.00444	<940	1.51×10^{-7}	—	—
土卫三	4.88	294,500	1.887802	1°06′	0.0000	—	1.14×10^{-6}	—	—
土卫四	6.25	377,200	2.736916	0°01′	0.00221	—	1.85×10^{-6}	—	—
土卫五	8.73	526,700	4.517503	0°21′ } 2	0.00098	1,350	4×10^{-6}	2.27×10^{24}	1.76
土卫六	20.2	1,221,000	15.945452	0°20′	0.02890	4,950	2.48×10^{-4}	1.41×10^{26}	2.21
土卫七	24.53	1,479,300	21.276665	0°26′	0.1042	—	2×10^{-7}	—	—
土卫八	59.01	3,558,400	79.33082	14°43′	0.02813	—	2.7×10^{-6}	—	—
土卫九	215	12,945,500	550.45	150°	0.16326	—	—	—	—
土卫十	5.10	123,000	1.414	0°	0	—	—	—	—
天卫一	7.938	191,700	2.520383	0°	0.0028	—	—	—	—
天卫二	11.06	267,000	4.144183	0° } 2	0.0035	—	—	—	—
天卫三	18.14	438,000	8.705876	0°	0.0024	—	—	—	—
天卫四	24.26	585,960	13.463262	0°	0.0007	—	—	—	—
海卫一	15.5	353,400	5.876833	159°57′ 2	0.000	—	0.00128±23	1.3×10^{26}	—
海卫二	245	5,560,000	359.881	27°48′ 2	0.749	—	—	—	—
冥卫一	14.1	19,000	6.3867	≥60°	0	800～960	0.03	4.3×10^{23}	

[1] 取自布兰科等(Blanco 和 McCuskey, 1961)的书。

$$GM_{\oplus}=3.98603\times10^{20}\text{ 厘米}^3\cdot\text{秒}^{-2}\ ^{1)},\tag{5-166}$$

故给出：

$$M_{\oplus}=5.972\pm0.013\times10^{27}\text{ 克}\ ^{2)}。\tag{5-167}$$

当考虑月球绕地球的轨道及地球绕太阳的轨道时，用(5-164)式可以得出：

$$\frac{M_{\odot}}{M_{\oplus}}\approx\left(\frac{P_{☾}}{P_{\oplus}}\right)^2\left(\frac{a_{\oplus}}{a_{☾}}\right)^3\left(1+\frac{M_{☾}}{M_{\oplus}}\right)。\tag{5-168}$$

在一个月中由于地球环绕地月系质量中心的运动，一颗行星位置的视差的测量给出：

$$\frac{M_{☾}}{M_{\oplus}}\approx\frac{1}{81.30}\approx0.01230\ ^{3)}。\tag{5-169}$$

然后把轨道周期及半长径的测量用于(5-168)式即得出：

$$\frac{M_{\odot}}{M_{\oplus}}\approx332958\ ^{4)}\tag{5-170}$$

或

$$M_{\odot}\approx1.989\pm0.004\times10^{33}\text{ 克}\ ^{5)}\approx\frac{4\pi^2a_{\oplus}^3}{GP_{\oplus}^2}。\tag{5-171}$$

因为常数 G 只有三位有效数字[6]，行星星历表的计算利用高斯引力常数 k：

$$k^2=\frac{4\pi^2a_{\oplus}^3}{P_{\oplus}^2(M_{\oplus}+M_{\odot})}。\tag{5-172}$$

高斯(Gauss, 1857)取 $a_{\oplus}=1.0$, $P_{\oplus}=365.2563835$ 日，$M_{\oplus}/M_{\odot}=1/354710$ 得出：

$$k=0.01720209895(\text{天文单位距离})^{3/2}\cdot(\text{历书日})^{-1}\cdot(\text{太阳质量})^{-1/2}。\tag{5-173}$$

此 k 值现在作为定义常数用于历书，习惯上，行星距离以天文单位距离为单位，行星质量 M_p 则以质量倒数单位 $M_{\odot}/M_p$ 写出。在表 57 中给出我们太阳系中行星的距离及质量。

绕太阳作轨道运动的一个质点的角动量由于再辐射太阳能而逐渐消失。这种坡印廷-罗伯逊效应最终会使质点落到太阳上。设一个质点的起始轨道半径为 a_0，经过时间 t 以后，轨道半径为 a，则其质量 M 由下式给出(Poynting, 1904; Robertson, 1937)：

$$M=\frac{4SAa_{\oplus}^2t}{c^2(a_0^2-a^2)},\tag{5-174}$$

式中在地球轨道处每单位面积照射到的太阳能通量是 $S=1.3533\times10^6$ 尔格·厘米$^{-2}$·秒$^{-1}$ [7]，A 是质点的截面积。

5.4.3. 恒星的质量及密度

目视双星系统的两颗恒星的质量总和能够根据开普勒第三定律((5-164)式)算出。设 π 是力学视差，单位是角秒；P 是轨道周期，单位是年；则两颗恒星的质量总和 M_1+M_2(单位是太阳质量单位)由下式给出：

---

1) 最新值为 $GM_{\oplus}=3.98599\times10^{20}$ 厘米^3·秒$^{-2}$。——译者注

2) 最新值为 $M_{\oplus}=5.9742\times10^{27}$ 克。——译者注

3) 最新值为 $M_{☾}/M_{\oplus}\approx0.01230002$ 或 1/81.3007。——译者注

4) 最新值为 $M_{\odot}/M_{\oplus}\approx332946.0$。——译者注

5) 最新值为 $M_{\odot}=1.9891\times10^{33}$ 克。——译者注

6) 最新值为 $G=6.672\times10^{-8}$ 达因·厘米^2·克$^{-2}$，有四位有效数字。——译者注

7) 最新值是 $S=1.37\times10^6$ 尔格·厘米$^{-2}$·秒$^{-1}$。——译者注

$$M_1+M_2=\frac{\alpha^3}{\varpi^3 P^2},\tag{5-175}$$

式中 α 是轨道半长径的角大小，单位是角秒。当观测两颗恒星环绕它们系统的重心的轨道时，两颗恒星各自的质量可从(5-175)式及下列关系式定出：

$$a_1M_1=a_2M_2,\tag{5-176}$$

式中 a_1 及 a_2 是两个椭圆的半长径的值。

分光双星系统子星的质量能够按下列公式估计：

$$M_1\sin^3 i=\frac{(a\sin i)^3}{P^2\left(1+\frac{a_1\sin i}{a_2\sin i}\right)},\tag{5-177}$$

式中 i 是轨道面的倾角；P 是轨道周期，单位是年；半长径在视线方向的投影 $a\sin i$ 以天文单位距离为单位并由下式给出：

$$a\sin i=a_1\sin i+a_2\sin i。\tag{5-178}$$

正如第 5.3.2 节所描述的，两个椭圆的半长径的投影分量 $a_1\sin i$ 和 $a_2\sin i$ 能够根据视向速度周期变化的观测加以测定。

正如哈尔姆(Halm, 1911)所首先指出以及赫兹朋(Hertzsprung, 1919)所观测到的，主序星的绝对光度 L 与质量 M 之间存在一种经验关系。当绝对光度用热星等 $M_{热}$ 表示时，质光关系取下列形式(Harris, Strand 和 Worley, 1963)：

$$\left.\begin{aligned}M_{热}&=4.6-10.0\log\left(\frac{M}{M_\odot}\right)\quad(当\ 0\leqslant M_{热}\leqslant 7.5);\\ M_{热}&=5.2-6.9\log\left(\frac{M}{M_\odot}\right)\quad(当\ 7.5\leqslant M_{热}\leqslant 11),\end{aligned}\right\}\tag{5-179}$$

式中太阳质量 $M_\odot\approx{}^*1.9891\times10^{33}$ 克。(5-179)式得出近似关系：

$$\left.\begin{aligned}\log\left(\frac{L}{L_\odot}\right)&\approx4\log\left(\frac{M}{M_\odot}\right)\quad(当\ L>L_\odot);\\ \log\left(\frac{L}{L_\odot}\right)&\approx2.8\log\left(\frac{M}{M_\odot}\right)\quad(当\ L<L_\odot),\end{aligned}\right\}\tag{5-180}$$

式中太阳绝对光度 $L_\odot={}^*3.826\times10^{33}$ 尔格·秒$^{-1}$。爱丁顿(Eddington, 1924)纯粹从理论上来考虑，他证明，对一个处于辐射平衡状态的理想气体球，绝对光度正比于 $M^{3.5}$。

迈克耳孙(Michelson, 1890)首先证明如何根据两元干涉仪的条纹可见度来测定一颗恒星的直径。迈克耳孙等(Michelson 和 Pease, 1921; 以及 Pease, 1931)用这种方法证明 M 型星的半径是几百个太阳半径。汉伯里等 (Hanbury, Brown 和 Twiss, 1958) 证明强度干涉仪不会受大气闪烁效应的限制，这样一个干涉仪已用于测定几种 A 型及 B 型星的角大小(参看 Hanbury, Brown 等, 1967)。

设一对食双星系统的光变曲线在两次食之间归一化为 1，则两颗恒星半径之比为：

$$\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2=\frac{l_2}{1-l_1},\tag{5-181}$$

式中 l 是当一颗子星在另一颗子星前经过时观测到的光的损失。光变曲线也给出轨道的倾角 i 及两颗子星的半径与轨道半长径 a 之比 R_1/a 及 R_2/a(参看 Irwin, 1962, 1963)。视向速度测量能够给出 $a\sin i$，因而可以得出子星的半径。表 60 给出某些具有代表性的恒星的有效温度、光度、半径、质量及密度。

表 60　不同光谱型的恒星的有效温度 T_e、光度 L、半径 R、质量 M 及密度 ρ[1]

恒　星　名	MKK[1)] 光谱型	T_e (开)	$L/L_\odot$	$R/R_\odot$	$M/M_\odot$	ρ (克·厘米$^{-3}$)	类　型
天蝎座 α 子星 A (心宿二)	M0Ib	3300	34000	530	19	1.7×10^{-7}	超巨星
牧夫座 α (大角)	K2III	3970	130	26	4.2	3.2×10^{-4}	巨　星
猎户座 η	B1V	23000	13000	7.2	13.7	0.052	主序星
大犬座 α 子星 A (天狼星)	A1V	9700	61	2.4	3.3	0.81	主序星
太阳	G2V	5740	1	1	1	1.410	主序星
巴纳德星	M5V	3000	0.015	0.50	0.38	4.3	主序星
大犬座 α 子星 B (天狼 B)	A5V	8200	0.0026	0.026	0.96	7.7×10^4	白矮星

[1] 取自考克斯等 (Cox 和 Giuli, 1968) 的书。表中 T_e 是 MKK 光谱型的值，而不一定是列出的具体恒星的光谱型的 T_e，而太阳值是 $L_\odot\approx3.9\times10^{-33}$ 尔格·秒$^{-1}$，$R_\odot\approx6.96\times10^{10}$ 厘米以及 $M_\odot\approx1.989\times10^{33}$ 克。

1) MKK 是摩根、基南、凯尔曼(Morgan, Keenan, Kellman)光谱分类法。——译者注

5.4.4. 星系的质量及密度

若银河系的全部质量 M 集中在银心，在其作用下太阳在圆形轨道上运动，则 M 由下式给出：

$$M=\frac{R_0\theta_c^2(R_0)}{G}=2.9\times10^{44}\text{ 克}=1.5\times10^{11}M_\odot,\tag{5–182}$$

式中 G 是引力常数，$R_0=10$ 千秒差距是太阳与银心的距离，$\theta_c(R_0)=250$ 公里·秒$^{-1}$是在 R_0 处银河系的圆周速度。各种观测 (Oort, 1932; Hill, 1960; Oort, 1960) 表明在垂直于银道面的方向 z 银河系作用于每单位质量上的力 K_z 由下式给出：

$$\frac{\partial K_z}{\partial z}=-0.3\times10^{-10}\text{ 厘米·秒}^{-2}\text{·秒差距}^{-1},\tag{5–183}$$

式中 1 秒差距 =*3.08567757×10^{18} 厘米。由泊松方程可知，在距离 z 处，质量密度 $\rho(z)$ 为：

$$\begin{aligned}\rho(z)&=-\frac{1}{4\pi G}\left[\frac{\partial K_R}{\partial R}+\frac{K_R}{R}+\frac{\partial K_z}{\partial z}\right]\\&=-\frac{1}{4\pi G}\left[2(A-B)(A+B)+\frac{\partial K_z}{\partial z}\right],\end{aligned}\tag{5–184}$$

式中 K_R 是在 R 方向每单位质量上受到的力，R 是与银心的距离，$G=*6.6720\times10^{-8}$ 达因·厘米^2·克$^{-2}$是牛顿引力常数，奥尔特常数 A 及 B 是 $A=4.7\times10^{-16}$ 秒$^{-1}$=15 公里·秒$^{-1}$·千秒差距$^{-1}$ 及 $B=-3.1\times10^{-16}$ 秒$^{-1}$=-10 公里·秒$^{-1}$·千秒差距$^{-1}$。靠近银道面处(5–184)式给出：

$$\rho(0)=10^{-23}\text{ 克·厘米}^{-3}=0.15M_\odot\text{ 秒差距}^{-3}\text{。}$$

作为比较，在太阳附近中性氢(HI)的质量密度为(Westerhout, 1957; Schmidt, 1957)：

$$\rho(\text{HI})=0.7\text{ 原子·厘米}^{-3}=1.2\times10^{-24}\text{ 克·厘米}^{-3}=0.018M_\odot\text{ 秒差距}^{-3};$$

而局部恒星密度为(参看第 5.5.3 节)：

$$\rho(\text{恒星})=0.120M_\odot(m/M_\odot)\text{秒差距}^{-3},$$

式中 m 是平均恒星质量。

正如奥皮克(Oepik, 1922)所首先指出的，测量了视向速度随星系位置变化的函数，就

可以确定河外星系的质量。例如，对刚体转动来说，转动速度 $\theta_c(r)$ 将随着与星系中心的距离的增加而增加，直到星系边缘为止。在这一点上 $\theta_c(r)$ 具有转向值 θ_T，并且 r 具有值 r_T。这样，利用类似于(5-182)式的方程就可以确定总质量。对于物质集中于一个薄的圆盘内的星系来说，布兰特(Brandt, 1960)给出 $\theta_c(r)$ 的一种形式如下：

$$\theta_c(r)=\frac{3^{3/2n}\theta_T r}{r_T\left[1+2\left(\frac{r}{r_T}\right)^n\right]^{3/2n}}, \tag{5-185}$$

式中 n 是一个任意整数，可以调节这个数使与观测到的自转曲线拟合。这样，星系的总质量就由下式给出(Brandt 和 Belton, 1962)：

$$M=\left(\frac{3}{2}\right)^{3/n}\frac{r_T\theta_T^2}{G}, \tag{5-186}$$

式中 G 是引力常数。在光学频段观测电离气体的发射线或在射电频段观测中性氢的 21 厘米谱线 (Burbidge 和 Burbidge, 1974; Rogstad, Rougoor 和 Whiteoak, 1967; Wright, 1971; Roberts 和 Rots, 1973) 可以得出自转曲线。在表 61 中列出一些星系的质量以及星系的其他主要性质。

利用回归公式 (Page, 1960, 1962) 可以确定双星系的平均质量 $\langle M\rangle$ 及平均质量-光度比 $\langle M/L\rangle$。

$$(\Delta v_i)^2-\frac{\sigma_\Delta^2}{W_i}=\frac{2.96}{h}\left\langle\frac{M}{L}\right\rangle\left[\left(10^{-4}\frac{v_i}{S_i}\right)+0.19\times10^{-8}v_i^2\right]\sum_{j=1}^{N_i}10^{0.4(20.26-m_j)}, \tag{5-187}$$

式中 $(\Delta v_i)^2$ 是较差视向速度的平方，σ_Δ^2 是权重 $W=1$ 的 Δv 的平均平方误差，W_i 是佩奇 (Page, 1961) 给出的本征权重，v_i 是第 i 对星系的平均视向速度，h 是哈勃常数与 100 公里·秒$^{-1}$·兆秒差距$^{-1}$之比，S_i 是第 i 对星系的间距，单位是角分，m_j 是已作银河吸收改正的视照相星等，N_i 是在第 i 对中包含的星系数，$\langle M/L\rangle$ 的单位是太阳单位。佩奇得出的结果为：

$$\left.\begin{aligned}&h\langle M\rangle=59.3,\ \left\langle\frac{M}{hL}\right\rangle=94\quad(13\text{ 对椭圆星系及透镜星系});\\&h\langle M\rangle=2.13,\ \left\langle\frac{M}{hL}\right\rangle=0.33\quad(14\text{ 对旋涡星系及不规则星系}),\end{aligned}\right. \tag{5-188}$$

式中平均质量 $\langle M\rangle$ 的单位是 10^{10} 太阳质量，$\langle M/L\rangle$ 的单位是太阳单位。有关不规则星系及旋涡星系的更新的资料表明(Roberts, 1969)：

$$\left.\begin{aligned}&10^{10}\lesssim\frac{M}{M_\odot}\lesssim5\times10^{11};\\&10^{9}\lesssim\frac{L}{L_\odot}\lesssim10^{11};\\&\log\left(\frac{L}{L_\odot}\right)\approx\frac{1}{7.5}\log\left(\frac{M}{M_\odot}\right),\end{aligned}\right\} \tag{5-189}$$

式中太阳质量 $M_\odot={}^*1.9891\times10^{33}$ 克，太阳光度 $L_\odot={}^*3.826\times10^{33}$ 尔格·秒$^{-1}$。对于椭圆星系，钦金等(Genkin 和 Genkina, 1970)得到：

$$10^{10}\lesssim\frac{M}{M_\odot}\lesssim2\times10^{12}$$

及

$$\log\left(\frac{L}{L_\odot}\right)\approx\frac{1}{30}\log\left(\frac{M}{M_\odot}\right)。$$

当考虑到矮星系与银河系之间的潮汐力以后，轨道具有一个潮汐极限 r_T(von Hoerner, 1957)：

表 61 106 个星系的名称、方位、类型、距离 D、倾角、半径 R、颜色、绝对星等、氢质量及总质量[1]

NGC[1)]	α(1950.0)			δ(1950.0)			类 型	D	倾 角	R	颜 色	绝对星等	氢 质 量	总 质 量
	h	m	s	°	′	″		(兆秒差距)	(°)	(千秒差距)	C_0	$(M_0)_{照相}$	$(10^9 M_\odot)$	$(10^{10} M_\odot)$
45	00	11	31	−23	27	24	Sd	2.4	50	4.2	—	−16.45#	—	2.1
55	00	12	24	−39	28	00	SBM	2.4	84	19.2#	—	−20.38#	8.7	2.9
157	00	32	14	−08	40	18	Sbc	15.1	59	12.7	0.55	−20.24	—	5.0[2]
221	00	40	00	40	36		E	0.69	—	—	—	−15.7	—	0.21
224	00	40	00	41	00		Sb	0.69	77	19.8	0.62	−21.81	8.5	31.0
247	00	44	39	−21	01	48	Sd	2.4	75	9.8	0.43#	−18.48	1.6	1.8
253	00	45	06	−25	34		Sc	2.4	78	9.9#	—	−20.31#	3.7	12.0[2]
300	00	52	31	−37	57	24	Sd	2.4	42	8.6#	—	−17.70#	3.4	3.2
428	01	10	22.6	00	42	56	Sm	7.9	38	6.3	0.21	−18.12	1.2	2.1
598	01	31	06	30	24		Scd	0.72	57	8.7	0.29	−18.70	1.7	3.9[2]
613	01	32	00	−29	40	12	SBbc	15.0	47	17.7#	0.52#	−20.65#	—	13.0[2]
628	01	34	00.5	15	31	38	Sc	7.8	35	13.6	0.29	−20.13	10.6	3.9
681	01	45	42	−10	40		Sab	17.3	81	8.8#	0.59#	−20.14#	—	1.8[2]
772	01	56	35.2	18	45	57	Sb	16.6	55	25.4	0.48	−20.70	8.5	23.0
925	02	24	18	35	22		Sd	6.8	53	13.8	0.21	−19.45	4.4	4.9
972	02	31	18	29	06		IO	16.6	66	11.3#	0.55#	−20.07#	—	1.3[2]
1055	02	39	12	00	16		Sb	11.0	77	19.0	0.60	−20.48	8.2	6.6
1084	02	43	30	−07	47		Sc	14.2	65	9.5#	0.28#	−20.41#	—	1.5[2]
1097	02	44	11	−30	29	12	Sb	12.1	50	20.1#	0.52#	−20.87#	11.6	64.0

[1] 精确方位取自格兰菲尔德等 (Glanfield 和 Cameron, 1967; 以及 Gallouet 和 Heidmann, 1971) 的文章，而其他方位取自伏古勒等 (de Vaucouleurs 和 de Vaucouleurs, 1964) 的星系表。其他数据取自罗伯茨等 (Roberts, 1969; 以及 Genkin 和 Genkina, 1970) 的文章。线半径取自霍姆伯格(Holmberg, 1958)或按伏古勒的数据转换得出。后者用符号 # 表示。凡是根据光学推导得出的质量数据用角标 2 标明。

[2] 从视向速度推导距离时用哈勃常数为 100 公里·秒$^{-1}$·兆秒差距$^{-1}$。倾角 i 是天空平面(与观测者视线方向垂直的平面)与星系主平面之间的夹角。颜色已作红移改正。

1) NGC 是星云星团新总表(New General Catalogue)，IC 是星云星团新总表补编。——译者注。

（续表）

NGC[1]	α(1950.0)			δ(1950.0)			类 型	D (兆秒差距)	倾 角 (°)	R (千秒差距)	颜 色 C_0	绝对星等 (M_0)照相	氢 质 量 ($10^9 M_\odot$)	总 质 量 ($10^{10} M_\odot$)
	h	m	s	°	′	″								
1140	02	52	12	−10	14		Ir	15.0	62	5.0#	0.15#	−18.98#	3.7	—
1156	02	56	46.5	25	02	21	Ir	6.3	52	5.4	0.23	−17.85	1.1	0.63
1365	03	31	42	−36	18	18	SBb	15.1	66	28.6#	0.32#	−21.94#	5.7	17.0
1569	04	26	00	−64	45		Ir	2.5	65	2.5	0.23	−16.93	0.21	—
1637	04	38	58	02	57	06	Sc	5.6	35	6.3	0.35	−18.04	0.72	1.3
1744	04	57	55	−26	05	42	SBd	10.0	49	11.8#	0.17#	−18.89#	5.7	9.6
1792	05	03	30	−38	02	42	Sbc	10.4	64	8.8#	—	−19.89#	—	1.8[2]
1808	05	05	59	−37	34	42	SOa	7.4	67	8.7#	—	−19.71#	—	2.4#[2]
2366	07	23	36	69	08		Ir	3.3	64	4.8	0.25	−16.79	0.68	0.16
2403	07	32	00	65	43		Scd	3.3	54	13.9	0.24	−19.24	4.9	7.3
2683	08	49	36	33	38		Sb	5.8	85	10.2	0.61	−20.02	0.96	2.8
2835	09	15	37	−22	08	30	SBc	7.6	43	10.1#	—	−19.24#	1.4	5.8
2841	09	18	36	51	12		Sb	6.0	67	9.9	0.55	−19.82	1.1	4.2
2903	09	29	20.2	21	43	14	Sbc	7.0	70	14.2	0.29	−20.64	4.8	6.1[2]
3031	09	51	30	69	18		Sab	3.3	55	16.8	0.69	−20.31	2.3	19.0[2]
3034	09	51	54	69	56		IO	3.3	82	6.4	0.71	−19.67	1.7	1.0[2]
3079	09	58	36	55	57		SBm	12.0	83	19.2	0.37	−20.67	5.7	5.7
3109	10	00	47	−25	54	54	Ir	2.2	90	5.9#	—	−18.16#	2.2	0.60
3198	10	16	42	45	49		SBc	9.6	73	16.6	0.21	−20.07	12.5	6.0
3227	10	20	46.6	20	07	07	Sap	16.5	51	14.6#	0.64#	−20.25#	—	3.6[2]
3319	10	36	24	41	56		SBcd	9.2	58	11.8	0.18	−18.68	2.0	1.5
3344	10	40	46.9	25	11	06	Sbc	7.9	25	10.7	0.22	−19.43	2.0	3.4
3359	10	43	24	63	30		SBc	10.0	51	13.1	0.23	−19.60	4.8	10.1
3379	10	45	11.1	12	50	49	E	7.5	—	—	—	−19.1	—	19
3432	10	49	42	36	54		SBm	9.6	89	11.4	0.19	−19.63	6.4	3.2
3504	11	00	30	28	15		Sab	16.5	60	9.4#	0.47#	−20.35#	—	1.0[2]
3521	11	03	15.4	00	14	12	Sbc	6.9	66	13.6	0.66	−20.07	4.5	8.6[2]
3556	11	08	42	55	57		SBcd	8.2	84	13.2	0.32	−20.33	6.6	4.3
3623	11	16	18.8	13	21	53	SBa	7.0	76	12.1	0.55	−20.66	—	10.5[2]

(续表)

NGC	α(1950.0)			δ(1950.0)			类 型	D	倾 角	R	颜 色	绝对星等	氢质量	总质量
	h	m	s	°	′	″		(兆秒差距)	(°)	(千秒差距)	C_0	$(M_0)_{照相}$	$(10^9 M_\odot)$	$(10^{10} M_\odot)$
3627	11	17	38.4	13	15	47	Sb	7.6	57	15.3	0.49	−20.39	2.0	33.0
3628	11	17	39.5	13	52	06	Sb	7.6	89	19.9	0.52	−20.78	7.3	4.3
3631	11	18	18	53	28		Sc	14.5	32	15.2	0.35	−20.24	3.7	3.4
3646	11	19	05.4	20	26	42	Sbcp	20.9	60	15.2	0.33	−20.33	—	18.6[2]
3718	11	29	54	53	21		SBap	14.5	57	17.1	0.41	−20.22	3.0	8.4
3726	11	30	42	47	19		Sc	11.5	46	13.7	0.24	−19.86	6.3	—
3938	11	50	12	44	24		Sc	8.9	28	8.8	0.27	−19.27	2.2	1.3
3992	11	55	00	53	39		SBb	14.5	51	20.2	0.57	−20.72	3.7	—
4214	12	13	06	36	36		Ir	3.8	45	5.9	0.19	−18.16	1.3	0.38
4236	12	14	18	69	45		SBm	3.3	75	12.5	0.11	−18.68	—	3.0
4244	12	15	00	38	05		Scd	3.8	86	9.9	0.17	−18.71	5.0	7.1
4258	12	16	30	47	35		Sbc	4.0	64	14.0	0.37	−19.93	—	7.5[2]
4406	12	23	39.8	13	13	21	E	12.0	—	—	—	−20.6	—	137.0
4449	12	25	48	44	22		Ir	3.8	51	5.6	0.13	−18.42	3.2	2.4
4472	12	27	14.3	08	16	39	E	12.0	—	—	—	−21.5	—	116.0
4486	12	28	17.6	12	40	04	E	12.0	—	—	—	−21.1	—	208.0
4490	12	28	18	41	55		SBdp	8.0	47	10.4	0.19	−19.82	6.0	2.7
4559	12	33	30	28	14		Scd	9.6	67	16.2	0.18	−20.34	12.5	5.2
4605	12	37	48	61	53		SBcp	3.3	67	3.3#	0.13#	−17.59#	—	0.10[2]
4621	12	39	30.9	11	55	14	E	12.0	—	—	—	−20.1	—	72.0
4631	12	39	48	32	49		SBd	4.0	85	11.1	0.31	−19.58	4.0	6.8
4656	12	41	36	32	26		SBm	4.0	85	8.4	0.13	−18.55	3.2	1.5
4697	12	46	00	−05	31	42	E	12.0	—	—	—	−20.4	—	49.0
4736	12	48	36	41	23		Sab	4.0	35	8.7	0.52	−19.46	—	31.0
5005	13	08	30	37	19		Sbc	8.7	66	10.2	0.47	−20.07	—	5.9[2]
5033	13	11	12	36	51		Sc	9.5	59	17.0	0.29	−19.80	6.8	6.5
5055	13	13	30	42	17		Sbc	4.6	59	10.7	0.47	−19.71	—	4.3[2]
5194	13	27	48	47	27		Sc	4.6	35	9.5	0.43	−19.76	1.1	6.4[2]
5204	13	28	18	58	40		Sm	4.6	53	5.4	0.16	−17.17	0.64	0.40

（续表）

NGC	α(1950.0)			δ(1950.0)			类 型	D (兆秒差距)	倾 角 (°)	R (千秒差距)	颜 色 C_0	绝对星等 $(M_0)_{照相}$	氢质量 $(10^9M_\odot)$	总质量 $(10^{10}M_\odot)$
	h	m	s	°	′	″								
5236	13	34	10	−29	37	00	Sc	4.0	46	8.3#	0.43#	−20.70#	7.3	23.0
5248	13	35	02.8	09	08	31	Sbc	10.5	55	12.1	0.29	−20.23	—	4.2[2]
5383	13	55	00	42	05		SBbp	24.0	40	19.9#	0.38#	−20.48#	—	4.6[2]
5457	14	01	24	54	35		Sc	4.6	27	18.7	0.21	−20.43	9.3	16.0
5474	14	03	12	53	54		Scd	4.6	20	4.8	0.23	−17.40	0.64	5.1
5585	14	18	00	56	57		Sd	4.6	50	5.8	0.25	−17.52	0.82	1.7
5668	14	30	53.8	04	40	12	Sd	15.0	20	11.6#	0.42#	−19.25#	4.3	5.6
5713	14	37	37.8	−00	04	32	Sbc	13.2	22	7.9#	0.34#	−19.32#	3.2	—
5907	15	14	36	56	31		Sc	4.6	87	10.5	0.43	−18.62	1.8	15.0
6015	15	50	42	62	28		Sc	9.8	67	9.0	0.27	−19.07	1.8	1.4
6181	16	30	09.6	19	55	54	Sc	24.0	60	14.3#	0.25#	−20.24#	—	6.0[2]
6217	16	34	48	78	18		SBbc	16.5	40	9.4#	0.33#	−19.83#	5.8	2.4
6503	17	49	54	70	10		Scd	4.6	74	7.5	0.38	−18.76	2.3	1.0
6643	18	21	12	74	33		Sc	16.5	61	12.2	0.30	−20.31	2.4	—
6822	19	42	07	−14	53	30	Ir	0.50	43	1.5	—	−15.19	0.15	0.24
6946	20	33	54	59	58		Scd	4.2	22	8.8	0.40	−19.92	3.9	23.0
7331	22	34	48	34	10		Sbc	7.9	69	15.5	0.44	−20.69	5.7	6.1[2]
7626	23	18	10.4	07	56	36	E	35.6	—	—	—	−20.5	—	137.0
7640	23	19	42	40	35		SBc	4.4	89	8.6	0.00	−18.71	3.7	5.7
7741	23	41	22.9	25	47	55	SBcd	10.1	45	10.6	0.27	−18.96	7.6	4.2
7793	23	55	16	−32	52	30	Sd	2.4	47	4.1#	0.49#	−17.20#	0.36	—
IC 10	00	17	36	59	02		Ir	1.25	—	—	—	—	0.31	0.12
IC 342	03	41	54	67	57		Sd	3.3	35	—	—	—	9.1	5.2
IC 1613	01	02	14.0	01	51	09	Ir	0.66	32	2.2	0.36	−14.27	0.051	0.025
IC 2574	10	25	00	68	43		Sm	3.3	69	7.7	0.17	−17.54	2.1	1.7
Ho II	08	14	06	70	52		Ir	3.3	40	5.3	0.21	−17.00	0.91	0.96
大麦哲伦云	05	24	00	−69	48		SBm	0.052	27	—	0.30#	−18.37#	0.54	1.0[2]
六分仪座▲	10	08	48	−04	28		Ir	1.0	36	1.4	0.12	−13.91	0.070	0.14
小麦哲伦云	00	51	00	−73	06		Ir	0.06	60	—	0.24#	−16.70#	0.48	0.15

$$r_T = R_G\left(\frac{m}{3M_G}\right)^{1/3}, \tag{5-190}$$

式中 m 是矮星系的质量，M_G 是银河系的质量，R_G 是星系之间的距离。霍奇(Hodge, 1966)给出几个矮星系的质量及轨道参数。

兹维基等(Zwicky, 1933; 以及 Smith, 1936)首先对一个星系团根据维里定理估计星系的质量。设 T 是星系团的动能，则按照维里定理

$$2T+\Omega=0, \tag{5-191}$$

式中 Ω 是引力势能，并且假定星系团是动力学稳定的(不是正在膨胀或收缩的)。对于球状对称星系团，由(5-191)式可知，维里定理质量 M_{VT} 由下式给出：

$$M_{VT}=\frac{3R_e\sigma_v^2}{G}, \tag{5-192}$$

式中 R_e 是星系团的有效半径，G 是牛顿引力常数，σ_v 是沿视线观测到的速度弥散。有效半径 R_e 由下式给出(Schwarzschild, 1954)：

$$R_e=\frac{2\left(\int_0^R S\,d\delta\right)^2}{\int_0^R S\,d\delta}, \tag{5-193}$$

式中 $S(\delta)d\delta$ 是在宽度为 $d\delta$ 的投影线条内出现的星系数，R 是星系团的半径。

设 m_i 及 v_{ri} 分别表示第 i 个子星系的质量及视向速度，则(Limber 和 Mathews, 1960)

$$T=\frac{3}{2}\sum m_i v_{r_i}^2=\frac{M\sigma_v^2}{2} \tag{5-194}$$

以及

$$\Omega=-\frac{2}{\pi}\sum_{\text{成对天体}}\frac{Gm_im_j}{r'_{ij}}=-\frac{M^2G}{R},$$

式中 $M=\sum m_i$ 是星系团的"可见"总质量，r'_{ij} 是子星系 i 及 j 的投影间距，$\sum\limits_{\text{成对天体}}$ 表示对所有成对天体求和。把(5-194)式代入(5-192)式得出关系式：

$$\frac{M_{VT}}{M}=\frac{3\pi}{2}\left(\sum m_i v_{r_i}^2\right)\left[\sum_{\text{成对天体}}\frac{Gm_im_j}{r'_{ij}}\right]^{-1}=\frac{3R}{M^2G}\sum_r m_i v_{r_i}^2, \tag{5-195}$$

式中假定 $R_e=3R$。

正如兹维基(Zwicky, 1933)所首先注意到的，许多星系团的维里质量约为 $10^{12}M_\odot$，而光学可见星系的总质量约为 $10^{10.5}M_\odot$，其中太阳质量 $M_\odot\approx{}^*1.9891\times10^{33}$ 克。短缺质量可能就是由于中性氢或电离氢或如阿姆巴楚米扬(Ambartsumian, 1958)所提出的：星系团可能是动力学不稳定的。在表 62 中给出 15 个星系团的光度 L 和 M_{VT}/L 以及其他参数。

5.4.5. 质量-半径-密度关系

正如史瓦西(Schwarzschild, 1916)所首先指出的，不可能有半径小于下列史瓦西半径 R_g 的可见的、静态的、自持的球：

$$R_g=\frac{2GM}{c^2}, \tag{5-196}$$

这样的球的质量密度也不可能大于史瓦西极限质量密度 ρ_g：

$$\rho_g=\frac{3c^2}{8\pi GR_g^2}, \tag{5-197}$$

这里 c 是光速，G 是引力常数，M 是天体的质量。设所有天体的质量密度 ρ 等于史瓦西极限密度，则它们具有密度-半径关系式为：

表 62 15 个星系团的名称、阿贝尔号数、方位、角范围 θ、距离 D、半径 R、平均视向速度 $\langle v_0\rangle$、视向速度弥散 σ_v、光学光度 L、维里定理质量 M_{VT} 与光度 L 之比、星系团中最亮的星系、射电源及其在 1400 兆赫芝的流量密度 S_{1400}[1]

星系团	阿贝尔号数	α(1950.0) h	α(1950.0) m	δ(1950.0) °	δ(1950.0) ′	θ (度)	D (兆秒差距)	R (兆秒差距)	⟨v_0⟩ (公里·秒$^{-1}$)	σ_v (公里·秒$^{-1}$)	L ($10^{11}L_\odot$)	M_{VT}/L ($M_\odot/L_\odot$)	最亮的星系 (NGC)	射电源	S_{1400} (央)
双鱼座星系团		01	20	33	00	10	66	0.47	4373	339	4.2	258	499	—	—
NGC541	194	01	23	−01	38	0.3	53	0.35	5321	406	3.9	300	541	3C40	4.4
英仙座星系团	426	03	16	41	20	4	97	0.44	5460	1420	10.0	461	1270	3C84	13.5
天炉座星系团		03	30	−36	00	6	10	0.75	1464	260	—	—	1316	天炉座源	108.0
巨蟹座星系团		08	18	21	14	3	80	0.54	4800	501	2.4	1156	2563	—	—
大熊座星系团		11	45	55	59	0.7	270	1.31	1222	407	7.1	619	—	—	—
室女座星系团		12	28	12	40	12	19	1.07	1141	666	12.0	668	4486	3C274	197.0
猎犬座星系团		12	48	21	43	19	8	1.23	437	135	1.5	300	4736	—	—
后发座星系团	1656	12	57	28	14	4	113	2.63	6645	977	49.0	1020	4489	5C04.80	0.37
半人马座星系团		13	22	−42	45	2	250	—	—	—	—	—	5128	半人马座源	912.0
北冕座星系团		15	20	27	54	0.5	190	2.81	21600	1202	53.0	1580	—	—	—
武仙座星系团	2151	16	03	17	55	0.1	175	1.25	10737	631	18.0	556	—	4C17.66	0.5
阿贝尔 2199	2199	16	27	39	38	0.2	—	1.07	9028	864	20.0	775	6166	3C338	3.6
飞马座 II 星系团	2634	23	08	07	20	2	—	0.89	—	537	8.5	598	7720	4C07.61	1.6
飞马座 I 星系团		23	18	07	55	1	65	0.30	3606	246	2.0	182	7619	PKS 2318+07	0.8

[1] 角范围取自兹维基 (Zwicky, 1959; 以及 Page, 1965) 的文章，距离取自伏古勒等 (de Vaucouleurs, 1961; 以及 Allen, 1963) 的文献，半径及速度弥散取自鲁德等 (Rood, Rothman 和 Turnrose, 1970)。NGC541、英仙座星系团、室女座星系团、猎犬座星系团、武仙座星系团及阿贝尔 2199 的速度数据分别取自兹维基等 (Zwicky 和 Humason, 1964)，钦卡里尼等 (Chincarini 和 Rood, 1971)、塔曼 (Tammann, 1972)、范德伯格 (van der Bergh, 1961)、科温 (Corwin, 1971) 以及闵可夫斯基 (Minkowski, 1961) 的文章，⟨v_0⟩ 的其他值取自兹维基等 (Zwicky, 1959; 以及 Page, 1965) 的文章。光度 L 及 M_{VT}/L 的值取自卡拉巧采夫 (Karachetsev, 1966) 的文章。

表 63 各种天体的质量 M、半径 R、密度 ρ 及填充因子 φ[1]

天体种类	例子	$\log M$ (克)	$\log R$ (厘米)	$\log \rho$ (克·厘米$^{-3}$)	$\log \varphi$
中子星	脉冲星	33.16	5.93	14.75	−0.6?
		32.54	7.44	9.60	−2.5
白矮星	L930-80	33.45	8.3	7.93	−2.7
	大犬座 α 子星 B	33.30	8.77	6.37	−3.2
	vM2	32.90	9.05	4.13	−5.0
主序星	dM8	32.2	9.95	1.76	−5.6
	太阳	33.30	10.84	0.15	−5.5
	A0	33.85	11.25	−0.55	−4.7
	O5	34.9	12.1:	−2.0	−5.0:
超巨星	F0	34.4	12.65	−4.2	−6.1
	K0	34.4	13.15	−5.7	−6.6
	M2	34.7	13.75	−7.2	−6.9
原恒星	红外星	35.3?	16.2?	−13.9?	−8.7?
致密椭圆矮星系	M32, 核心	41.0	19.5?	−18.1	−6.3
	M32, 有效	42.5	20.65	−20.0	−5.9
	N4486-B	43.4	20.5	−18.75	−5.0
旋涡星系	大麦云	43.2	21.75	−22.65	−6.3
	M33	43.5	21.8	−22.5	−6.1
	M31	44.6	22.3	−22.9	−5.5
椭圆巨星系	N3379	44.3	22.0	−22.35	−5.6
	N4486	45.5	22.4	−22.3	−4.7
致密星系群	斯特凡五重星系	45.5	22.6	−23.1	−4.7
小的旋涡星系群	玉夫座旋涡星系群	46.2	24.1	−26.7	−5.7
稠密椭圆星系群	室女座 E 星系群核心	46.5	23.7	−25.2	−5.0
	天炉座 I 星系群				
小的星系云	室女座 S 星系云	47.0	24.3	−26.5	−5.1
	大熊座星系云				
小的星系团	室女座 E 星系团	47.2	24.3	−26.3	−4.9
大的椭圆星系团	后发座星系团	48.3	24.6	−26.1	−4.9
超星系团	本超星系团	48.7:	25.5	−28.4	−4.7
HMS[1)] 取样至 $m=12.5$			26.0	−29.6	−4.6
立克天文台计数至 $m\simeq19.0$			26.8	−30.5	−4.1

[1] 取自伏古勒(de Vaucouleurs, 1970)的文章。

[1)] HMS 是霍姆伯格总星系 (Holmberg Metagalaxy System) 的简写，见伦德天文台年刊 (Annals of the Observatory of Lund) 第 6 期，1937 年。——译者注

$$\log \rho = 27.2 - 2\log R, \tag{5-198}$$

式中 R 是天体的半径。按照伏古勒(de Vaucouleurs, 1970)的研究，已观测到象恒星这样的天体服从下列关系式：

$$\log \rho \approx 29.7 - 2.7\log R。 \tag{5-199}$$

而象星系和星系团这样的恒星系统则服从下列关系式：

$$\log \rho \approx 15.2 - 1.7\log R。 \tag{5-200}$$

在表 63 中给出各种天体的质量 M、半径 R 及密度 ρ，并在图 40 中示出。

在表 63 中也给出填充因子 φ，这是观测到的密度与史瓦西极限密度之比。设所有天体具有维里质量密度 ρ，而速度弥散 σ_v 在 100 公里·秒$^{-1}\leqslant\sigma_v\leqslant$1000 公里·秒$^{-1}$ 的范围内，则

$$\log\rho=6.5+2\log\sigma_v-2\log R\approx21.5-2\log R \tag{5-201}$$

和

$$\log\varphi\approx-5.7。$$

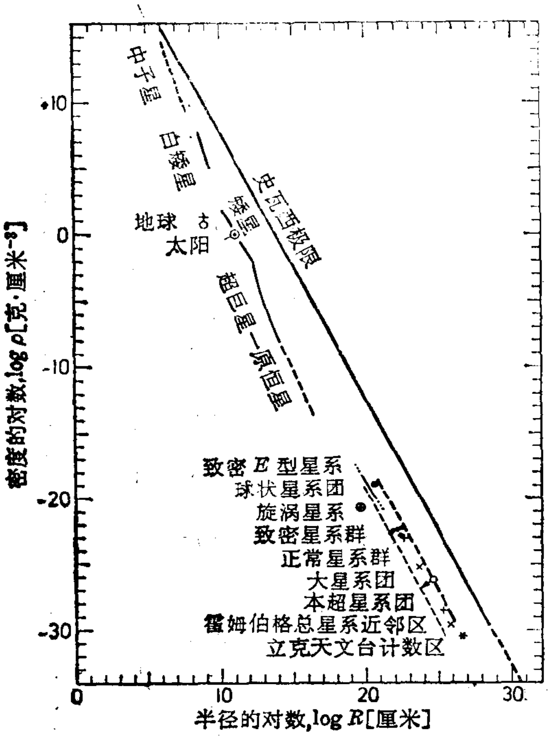


图 40 用于已观测到的天体的普适密度-半径关系。虚线表示根据维里定理对星团及星系团得出的密度的范围。实线为史瓦西极限，其中密度 $\rho=3c^2/(8\pi GR)^2$
(取自 de Vaucouleurs, 1970 的文章)

对于椭圆星系来说，观测资料表明势能正比于它们的质量的 3/2 次方(Fish, 1964)。对于质量为 M、半径为 R 的椭圆星系，菲什(Fish)的观测律为：

$$\Omega=9.6\times10^{-8}M^{3/2}\text{ 尔格}\approx GM^{5/3}\rho^{1/3}$$

$$(\text{当 }3\times10^{9}M_{\odot}\leqslant M\leqslant3\times10^{12}M_{\odot}) \tag{5-202}$$

或 $MR^{-2}=\text{常数}\approx2$ 克·厘米$^{-2}$，

式中 Ω 是引力势能，质量 M 的单位是克，太阳质量 $M_{\odot}=^{*}1.9891\times10^{33}$ 克，质量密度 $\rho=3M/(4\pi R^3)$。

5.4.6. 宇宙的质量密度

哈勃(Hubble, 1934, 1936)证明星系在天空中的大尺度分布是均匀的，而且星系按空间深度的分布也是均匀的。他对每单位立体角内亮于目视星等 m_V 的星云数 $N(<m_V)$ 进行计数，得出关系式：

$$N(<m_V)=10^{-9.09}\times10^{0.6m_V}\text{ 个星系/平方度}, \tag{5-203}$$

此关系一直到 21 星等还成立。霍姆伯格(Holmberg, 1958)重新校准数目-星等关系给出：

$$N(<m_V)=1.43\times10^{-5}\times10^{0.6m_V}\text{ 个星系/球面度}, \tag{5-204}$$

式中 1 球面度=3280 平方度。哈勃假定星系平均绝对星等为 $M_V=-15.1$，即得出体密度为：

$$N=7\times10^{-18}\text{ 个星系·秒差距}^{-3}。 \tag{5-205}$$

注意星系质量 M 是在 $10^9M_{\odot}\lesssim M\lesssim10^{11}M_{\odot}$ 的范围内，其中太阳质量 $M_{\odot}=^{*}1.9891\times10^{33}$ 克，哈勃得出结论：可见星系的质量密度 ρ_G 如下：

$$10^{-30}\text{ 克·厘米}^{-3}\leqslant\rho_G\leqslant10^{-28}\text{ 克·厘米}^{-3}。 \tag{5-206}$$

奥尔特(Oort, 1958)引入的概念是：确定在某一星等范围内的星系总数并假定这些星系的质量与光度比 M/L 为常数，则能够算出 ρ_G：

$$\rho_G=L_T\left(\frac{M}{L}\right), \tag{5-207}$$

式中由星系产生的每单位体积的总光度 L_T 由下式给出(Kiang, 1961)：

$$L_T=\int\frac{dN(<M_V)}{dM_V}L(M_V)\,dM_V\approx3.0\times10^8hL_{\odot}\text{ 兆秒差距}^{-3}, \tag{5-208}$$

式中 $h=H_0/100$ 公里·秒$^{-1}$·兆秒差距$^{-1}$，H_0 是哈勃常数，太阳光度 $L_\odot\approx10^{33}$ 克·秒$^{-1}$。假定 $M/L\lesssim 20hM_\odot/L_\odot$，(5-207)式及(5-208)式给出：

$$\rho_G\lesssim 4\times10^{-31}h^2\ 克·厘米^{-3}。\tag{5-209}$$

这可以与宇宙闭合所需的临界质量密度 ρ_c 相比，

$$\rho_c=\frac{3H_0^2}{8\pi G}=1.9\times10^{-29}h^2\ 克·厘米^{-3}。\tag{5-210}$$

在 (5-208) 式中，亮于绝对星等 M_V 的每单位体积内星系的平均数取为 (Abell, 1962; Peebles, 1971)：

$$\begin{aligned}&N(<M_V)=0.015h^3 10^{0.75(M_V-M_V^*)}\ 星系数·兆秒差距^{-3}(当\ M_V<M_V^*)\\ 及\quad &N(<M_V)=0.015h^3 10^{0.25(M_V-M_V^*)}\ 星系数·兆秒差距^{-3}(当\ M_V>M_V^*),\end{aligned}\tag{5-211}$$

式中

$$M_V^*=-19.5+5\log h\ 星等;$$

而绝对星等为 M_V 的星系的光度 $L(M_V)$ 由下式给出：

$$L(M_V)=10^{0.4(4.79-M_V)}L_\odot,\tag{5-212}$$

式中 $L_\odot\approx10^{33}$ 尔格·秒$^{-1}$。

当考虑到吸收系数为 α 的吸收时，并把椭圆星系(E)及旋涡星系(S)二者都包括在内，可得出光学可见星系所给出的质量密度 ρ_G 为(Shapiro, 1971)：

$$\begin{aligned}\rho_G=\Big[&3.3\times10^7(\alpha+0.41)h^2\left(\frac{M}{L}\right)_E\\ &+4.7\times10^8(\alpha+0.43)h^2\left(\frac{M}{L}\right)_S\Big]M_\odot\ 兆秒差距^{-3}。\end{aligned}\tag{5-213}$$

取 $h=0.5$，$\alpha=0.24$，$(M/L)_E=30$ 及 $(M/L)_S=7.5$，(5-213)式给出：

$$\rho_G=0.75\times10^9M_\odot\ 兆秒差距^{-3}=0.5\times10^{-31}\ 克·厘米^{-3},\tag{5-214}$$

这还是比 ρ_c 低。

5.5. 光度

5.5.1. 星等、色指数、流量密度及亮度

按照托勒玫(Ptolemy)所述，古希腊天文学家把恒星亮度根据第 n 星等比第 m 星等亮 2.5^{m-n} 倍而分成六个星等。波格森(Pogson, 1856)建议观测时可用常数 $2.512=10^{2/5}$ 来定标，这个常数的常用对数准确地是 0.4。在此系统中，两个天体的视星等 m_1 及 m_2 的关系式为：

$$\begin{aligned}&m_1-m_2=-2.50\log\left(\frac{f_1}{f_2}\right)\\ 或\quad &\frac{f_1}{f_2}=2.512^{-(m_1-m_2)},\end{aligned}\tag{5-215}$$

式中 f 表示观测到的能通量，单位是尔格·厘米$^{-2}$·秒$^{-1}$。一个源在距离 D 处的光度 L 由下式给出：

$$L=fD^2,\tag{5-216}$$

绝对星等 M 由下列方程给出：

$$m-M=5\log D-5=-5(1+\log\pi),\tag{5-217}$$

式中 m 是视星等，$m-M$ 称为距离模数，D 是恒星的距离，单位是秒差距，π 是周年视差，单位是角秒。绝对星等是设天体位于 10 秒差距距离处所看到的视星等。

实际上，从一个天体接收到的能量，是在一个有限的频带内加以测量的，视星等 m 加一个下标表示所用的滤光片的中心波长。下标 R、V、pg、B 及 U 分别表示红、黄或目视、照相、蓝色及紫外谱带并且具有如下的中心波长：

$$\left.\begin{array}{ll} m_R & 6800\ \text{埃;} \\ m_V=V & 5550\ \text{埃;} \\ m_{pg} & 4300\ \text{埃;} \\ m_B=B & 4350\ \text{埃;} \\ m_U=U & 3500\ \text{埃,} \end{array}\right\} \tag{5-218}$$

视蓝星等及视照相星等的关系为：

$$m_B=m_{pg}+0.11, \tag{5-219}$$

红色滤光片是用于研究星系的(Sandage, 1961)，对于邻近星系

$$m_V=m_R+0.3。 \tag{5-220}$$

约翰逊等 (Johnson 及 Morgan, 1953) 引入三色 U、B、V 系统，此系统应用频宽约 1000 埃的滤光片，其中心波长是(5-218)式给出的值。在表 64 中给出 U、B、V 系统的基本标准。约翰逊(Johnson, 1963)给出了 U、B、V 系统的附加标准星。对太阳来说，我们得到 $M_U=5.51$, $M_B=5.41$, $M_V=4.79$, $m_U=-26.06$, $m_B=-26.16$, $m_V=-26.78$ 及 $m_B-m_V=0.62$。

表 64 U、B、V 系统的十颗主要的标准星

亨利·德雷伯星表号数	星 名	V	$B-V$	$U-B$	光 谱 型
12929	白羊座 α	2.00	1.151	1.12	K2III
18331	HR875	5.17	0.084	0.05	A1V
69267	巨蟹座 β	3.52	1.480	1.78	K4III
74280	长蛇座 η	4.30	−0.195	−0.74	B3V
135742	天秤座 β	2.61	−0.108	−0.37	B8V
140573	巨蛇座 α	2.65	1.168	1.24	K2III
143107	北冕座 ε	4.15	1.230	1.28	K3III
147394	武仙座 τ	3.89	−0.152	−0.56	B5IV
214680	蝎虎座 10	4.88	−0.203	−1.04	O9V
219134	HR8832	5.57	1.010	0.89	K3V

色指数 C 由下式定义：

$$C=m_{pg}-m_V=B-V-0.11, \tag{5-221}$$

式中视星等是在地球大气以外测量的。按照惯例，对光谱型为 A0 的六颗矮星：天琴座 α、大熊座 γ、北冕座 α、室女座 109、蛇夫座 γ 及 HR334，平均而言，在大气以外，颜色 $B-V$ 及 $U-B$ 为零。在表 66 中给出其他光谱型的主序星的颜色。对于星系来说，霍姆伯格(Holmberg, 1958)指出

$$\begin{array}{ll} C=0.87 & \text{(对星系);} \\ C=0.00\sim0.30 & \text{(对大多数类星射电源)。} \end{array} \tag{5-222}$$

总能通量 f 是通量密度 $S(\lambda)$ 对所有波长的积分，$S(\lambda)$ 由下式给出：

$$S(\lambda)=\frac{f(\lambda)}{\Delta\lambda}\ \text{尔格·厘米}^{-2}\text{·秒}^{-1}\text{·埃}^{-1},$$

式中 $f(\lambda)$ 是用中心波长为 λ 的滤光片测出的能通量，$\Delta\lambda$ 是滤光片的通频带宽。星等系统

的零点是由下列方程确定的(Matthews 和 Sandage, 1963):

$$\log S(\lambda) = -0.4m_V - 8.42 \quad (\text{当 } \lambda = 5500 \text{ 埃});$$
$$\log S(\lambda) = -0.4m_{pg} - 8.3 \quad (\text{当 } \lambda = 4300 \text{ 埃})。 \tag{5-223}$$

射电天文学家在频率 ν 处测量流量密度 $S(\nu)$, 其中

$$S(\nu) = \frac{f(\nu)}{\Delta\nu} \text{ 尔格·厘米}^{-2}\text{·秒}^{-1}\text{·赫}^{-1}, \tag{5-224}$$

这里 $f(\nu)$ 是在频率 ν 的能通量, $\Delta\nu$ 是所用滤波器的通频带宽。射电流量密度常用的单位是流量单位(f. u.), 由下式给出:

$$1 \text{ 流量单位}^{1)} = 10^{-26} \text{ 瓦·米}^{-2}\text{·赫}^{-1} = 10^{-23} \text{ 尔格·厘米}^{-2}\text{·秒}^{-1}\text{·赫}^{-1}。 \tag{5-225}$$

在表 31 中给出射电星系及类星射电源在 1400 兆赫的流量密度。太阳射电天文学家经常应用太阳流量单位(s. f. u.),

$$1 \text{ 太阳流量单位} = 10^4 \text{ 流量单位}。 \tag{5-226}$$

在表 65 中给出射电频段的太阳流量密度。观测到的流量密度 $S_0(\nu)$ 随源的流量密度 $S_s(\nu)$、天线效率 η_A、天线立体角 Ω_A 和源所张的立体角 Ω_s 而变

$$S_0(\nu) = \eta_A S_s(\nu) \quad (\text{当 } \Omega_s \ll \Omega_A);$$
$$S_0(\nu) = \eta_A \frac{\Omega_A}{\Omega_s} S_s(\nu) \quad (\text{当 } \Omega_s \gtrsim \Omega_A)。 \tag{5-227}$$

对于频谱指数为 α 的非热辐射体, 总光度 L 由下式给出:

表 65 太阳在射电(包括微波)频段的流量密度 S 及最大亮度温度 T_{max}[1]

频 率 (兆 赫)	波 长 (厘米)	S_{min} (太阳流量单位)[1)]	S_{max} (太阳流量单位)	T_{max} (开)
50	600	0.48	0.6	1.15×10^6
100	300	2.1	2.4	1.15×10^6
200	150	6.8	9.5	1.14×10^6
300	100	11.2	16	8.5×10^5
600	50	21	31	4.1×10^5
1000	30	29	47	2.25×10^5
1500	20	40	64	1.36×10^5
3000	10	69	105	5.6×10^4
5000	6	110	150	2.85×10^4
10000	3	248	270	1.29×10^4
25000	1.2	1120	1120	8.56×10^3
35000	0.86	2080	2080	8.1×10^3

[1] 本表的流量密度单位是太阳流量单位*, 其中 1 太阳流量单位 $=10^{-19}$ 尔格·厘米²·秒⁻¹·赫⁻¹。

[1)] 1 太阳流量单位即 10^4 央(斯基)。——译者注

$$L = 4\pi D^2 S_s(\nu_0)\nu_0^{\alpha} \int_{\nu_1}^{\nu_2} \nu^{-\alpha} d\nu, \tag{5-228}$$

式中 D 是源距离, $S_s(\nu_0)$ 是源在频率 ν_0 处的流量密度, 并且假定对于象 $\nu \lesssim \nu_1$ 及 $\nu \gtrsim \nu_2$ 这样的频率 ν 处, 源的流量密度是可以忽略不计的。

当辐射体是热辐射时, 它在频率 ν 处的亮度 $B_\nu(T)$ 由下式给出 (Planck, 1901) (参看 (1-119) 至 (1-121) 式):

1) 1973 年 8 月国际天文学联合会决定采用央斯基 (Jansky) 为流量单位, 简称央 (Jy), 1 央=1 流量单位。——译者注

$$B_\nu(T)=\frac{S_s(\nu)}{\Omega_s}=\frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{\left[\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)-1\right]}\text{尔格·厘米}^{-2}\text{·秒}^{-1}\text{·赫}^{-1}\text{·球面度}^{-1}, \tag{5-229}$$

式中 Ω_s 是源所张的立体角，T 是源的亮温度。观测到的亮度 $B_0(\nu)$ 与源的亮度 $B_s(\nu)$ 的关系式为：

$$\begin{aligned} B_0(\nu)&=\eta_A\frac{\Omega_s}{\Omega_A}B_s(\nu)=\frac{S_0(\nu)}{\Omega_A}\quad(\text{当 }\Omega_s\ll\Omega_A);\\ B_0(\nu)&=\eta_A B_s(\nu)=\frac{S_0(\nu)}{\Omega_A}\quad(\text{当 }\Omega_s\gtrsim\Omega_A), \end{aligned}\tag{5-230}$$

式中 Ω_s 及 Ω_A 分别表示源及天线所张的立体角，η_A 是天线效率。按(5-230)式及(5-229)式算出的温度称为等效亮度温度或色温度。这是一个具有与所观测的源同样的相对强度分布或颜色的黑体辐射体的温度。设源是黑体辐射体，则总亮度 B 由(5-229)式对所有频率积分而得出(Stefan, 1879; Boltzmann, 1884)：

$$B=4\pi n^2\sigma T^4\text{ 尔格·厘米}^{-2}\text{·秒}^{-1}, \tag{5-231}$$

式中 n 是折射率，一个各向同性源在 4π 球面度内辐射以及

$$\sigma=2\pi^5k^4/(15c^2h^3)\approx{}^*5.67032\times10^{-5}\text{ 尔格·秒}^{-1}\text{·厘米}^{-2}\text{·开}^{-4}\text{。}$$

因而距离为 D 的一个源的发光率 $\mathscr{L}$ 及光度 L 由下式给出：

$$\mathscr{L}=\frac{B}{\Omega}\approx\left(\frac{D}{R}\right)^2B\text{ 尔格·厘米}^{-2}\text{·秒}^{-1}\text{·球面度}^{-1}; \tag{5-232}$$

$$L=4\pi R^2\sigma T_e^4\text{ 尔格·秒}^{-1}=R^2B\text{ 尔格·秒}^{-1}, \tag{5-233}$$

式中 R 是源半径，Ω_s 是所张的立体角。

5.5.2. 太阳常数、热星等改正、恒星温度及半径

在地球大气以外接收到的从太阳来的总能通量即太阳常数为(Thekaekhra 和 Drumond, 1971)：

$$f_\odot=1.3533(18)\times10^6\text{ 尔格·厘米}^{-2}\text{·秒}^{-1}\text{ 1)}, \tag{5-234}$$

由此给出光度为：

$$L_\odot=3.826(8)\times10^{33}\text{ 尔格·秒}^{-1}\text{。} \tag{5-235}$$

视目视星等 m_V 及绝对目视星等 M_V 的采用值为(Harris, 1961)：

$$\begin{aligned} m_{V\odot}&=-26.77;\\ M_{V\odot}&=4.79\text{。} \end{aligned}\tag{5-236}$$

由(5-215)式、(5-216)式、(5-217)式及(5-236)式可知，一个具有绝对目视星等为 M_V 的天体的光度 L 由下式给出：

$$L=10^{0.4(4.79-M_V)}L_\odot\text{。} \tag{5-237}$$

热星等系统是根据在地球大气外对总能通量的测量而确定的，并用下标 b 表示。热星等改正 BC 定义为：

$$BC=M_b-M_V=m_b-m_V, \tag{5-238}$$

式中下标 V 表示目视星等，M 及 m 分别表示绝对星等及视星等。柯伊伯等(Kuiper, 1938; Harris, 1963; 以及 Johnson, 1965)讨论了热改正，在表 66 中给出各种光谱型恒星的热改正值。一个源的绝对光度 L 及视能通量 f 与绝对热星等 M_b 及视热星等 m_b 的关系式为：

1) 最新值 $f_\odot=1.37\times10^6$ 尔格·厘米$^{-2}$·秒$^{-1}$。——译者注

$$L = 3.02\times10^{35}\times10^{-2M_b/5}\ 尔格\cdot秒^{-1},$$

$$f = 2.52\times10^{-5}\times10^{-2m_b/5}\ 尔格\cdot厘米^{-2}\cdot秒^{-1}。\tag{5-239}$$

对太阳来说，我们得到 $M_b=4.72$ 及 $m_b=-26.85$，取距离模数 $M_b-m_b=-31.57$。

为了得到一个天体的真实星等，对观测到的星等还必须作星际消光改正 (Trumpler, 1930; Stebbins, 1933)，在图 41 中以图示出星际消光改正作为波长倒数 λ^{-1} 的函数。通常用以研究星际红化的光电系统是(Stebbins 和 Whitford, 1943, 1948; Whitford, 1958)：

谱　带	U	B	V	G	R	I
λ(埃)	3500	4350	5550	5750	6800	8250
λ^{-1}(微米$^{-1}$)	2.857	2.299	1.802	1.739	1.470	1.212

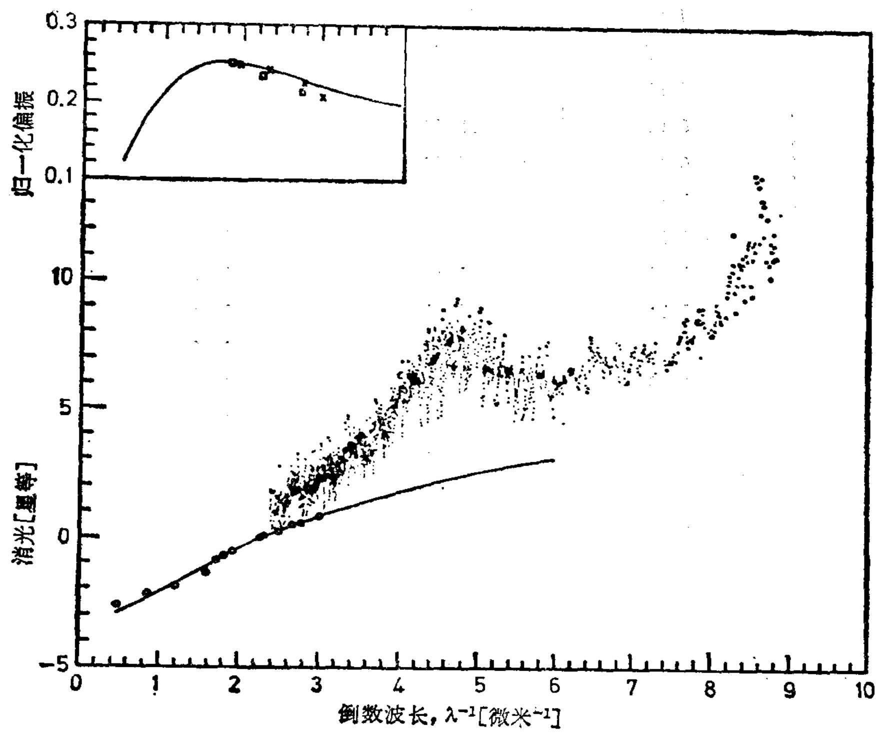


图 41　观测到的星际消光的平均值。图中圆圈取自博格曼等(Borgman 和 Boggess, 1964)的文章，其他点取自斯特彻(Stecher, 1969)的文章。这些资料已作归一化处理，所以 $B-V=1$ 星等以及 $V=0$。图中还示出偏振观测资料(取自 Greenberg, 1970 的资料)。实线表示当半径为各种 a 值的粒子分布为 $n(a)=49\exp[-5(a/0.2)^3]+\exp[-5(a/0.6)^3]$以及折射率为 $m=1.33-0.55i$ 时的理论偏振曲线及理论消光曲线

在此波长区域消光正比于 λ^{-1}。在波长 λ 处的总吸收 A_λ 以星等为单位由下式给出：

$$A_\lambda = 1.086 N\sigma_e D\ 星等,\tag{5-240}$$

式中 N 是吸收或散射粒子的体密度，消光截面由(1.349)式给出，D 是与源的距离。在目视谱带 V，我们得到：

$$\sigma_e \approx 10^{-9}\ 厘米^2\quad (当\ \lambda\approx4880\ 埃),\tag{5-241}$$

式中粒子半径 $a=0.2\times10^{-4}$ 厘米$\approx\lambda$，我们假定 $\sigma_e=\pi a^2$。粒子的体密度 N_{gr} 由下式给出：

$$N_{gr}\approx4\times10^{-13}N_A\ 厘米^{-3},$$

表 66 各种光谱型的恒星的热改正 BC、有效温度 T_e 及色指数 $B-V$、$U-B$[1]

MK	BC	T_e	$B-V$	$U-B$
O5	—	38000	−0.32	−1.15
O7	—	37000	−0.32	−1.14
O9	−3.34	31900	−0.31	−1.12
B0	−3.17	30000	−0.30	−1.08
B1	−2.50	24200	−0.26	−0.93
B2	−2.23	22100	−0.24	−0.86
B3	−1.77	18800	−0.20	−0.71
B5	−1.39	16400	−0.16	−0.56
B6	−1.21	15400	−0.14	−0.49
B7	−1.04	14500	−0.12	−0.42
B8	−0.85	13400	−0.09	−0.30
B9	−0.66	12400	−0.06	−0.19
A0	−0.40	10800	0.00	0.00
A1	−0.32	10200	0.03	
A2	−0.25	9730	0.06	
A3	−0.20	9260	0.09	
A5	−0.15	8620	0.15	
A7	−0.12	8190	0.20	
F0	−0.08	7240	0.33	
F2	−0.06	6930	0.38	
F5	−0.04	6540	0.45	
F6	−0.04	6450	0.47	
F7	−0.04	6320	0.50	
F8	−0.05	6200	0.53	
G0	−0.06	5920	0.60	
G2	−0.07	5780	0.64	
G5	−0.10	5610	0.68	
G8	−0.15	5490	0.72	
K0	−0.19	5240	0.81	
K2	−0.25	4780	0.92	
K3	−0.35	4590	0.98	
K5	−0.65	4410	1.15	
K7	−0.90	4160	1.30	
M0	−1.20	3920	1.41	
M1	−1.48	3680	1.48	
M2	−1.76	3500	1.52	
M3	−2.03	3360	1.55	
M4	−2.31	3230	1.56	
M5	−2.62	3120	1.61	
M8	−4.2	2660	2.00	

[1] 数据取自哈里斯等(Harris, 1963; 以及 Johnson, 1965)的文章。

式中 $N_A = N_H + 2N_2$ 是原子形式的氢原子 N_H 及分子形式的氢原子 N_2 的总的数密度。

一个黑体辐射体的绝对热星等 M_b 与其半径 R 的关系为:

$$M_b = 42.31 - 5\log\left(\frac{R}{R_\odot}\right) - 10\log T_e \text{ 星等}, \tag{5-242}$$

式中有效温度 T_e 是(5-231)式给出的温度；而且已经假定

$$\begin{aligned} M_{b\odot} &= 4.69 \text{ 星等}; \\ T_{e\odot} &= 5784 \text{ 开}, \end{aligned} \tag{5-243}$$

半径 R 的单位是厘米,

$$R_\odot = {}^*6.9599 \times 10^{10} \text{ 厘米。}$$

利用谱线观测以及恒星大气理论,能够得出有效温度与光谱型的关系 (Keenan 和 Morgan, 1951; Mihalas, 1964), 这些温度值也在表 66 中给出。

5.5.3. 恒星光度及光谱型

塞奇等 (Secchi, 1868; 以及 Rutherford, 1893) 首先注意到不同颜色的恒星具有很不相同的光谱。塞奇把恒星分成白、黄、橙及红色四组,它们的光谱特征依次是氢的强吸收线、强钙线、强金属线以及在紫端更亮的宽吸收线。当观测更多的恒星时,引入一些字母表示更多类型的颜色及光谱型(Pickering 和 Fleming, 1897; Pickering, 1889)。 包括 225330 颗恒星的亨利·德雷伯(Henry Draper)星表(Maury 和 Pickering, 1897; Cannon 和 Pickering, 1918～1924)的编制以及摩根、基南和凯尔曼(Morgan, Keenan 和 Kellman, 1943)的补充及改进已经把主要类型用下列符号来表示:

$$\text{Q、P、W、O、B、A、F、G、K、M、S、R、N} \tag{5-244}$$

每一型分成十个次型用一个数字 0、1、2、…、9 标记于该型的大写拉丁字母之后。 当光谱看来不形成一个连续序列时,用小写拉丁字母代替数字。光谱的特殊性根据谱线是狭的、恒星是巨星或矮星而分别在光谱型符号前用 c、g 或 d 标记。 在光谱型符号后的拉丁字母 n、s、e、ev、v、k 和 pec 依次表示宽而弥漫(星云)谱线、锐线、发射线、可变发射线、可变光谱、电离钙 Ca^+ 的 H 和 K 线以及具有偏离给定类型的趋势的特殊谱线。在表 67 及 68 中给出亨利·德雷伯(HD)光谱分类法及叶凯士(MKK[1])光谱分类法的判据。

从表 67 能够看出,当一种元素在谱线系的电离态及中性态都找得到时,电离原子以及中性原子在从 O 至 M 型的序列中都能找到。 而且一种元素递次电离的每一谱线的强度在该序列中比之较低电离级中为最大值。例如,SiIV、SiIII、SiII 及 SiI 依次在 O9、B1、A0 及 G5 光谱型具有最大谱线强度。正如沙哈(Saha, 1921)所首先指出的,激发不同电离能级所需的能量随光谱型的增加而减少,所以光谱序列一定伴随着形成谱线的恒星大气层温度的减少。 正如图 34 及表 66 所示,亨利·德雷伯光谱分类法是一种随有效温度 T_e 的降低而排列的一维系统。设所有恒星具有相同的半径,这个序列一定也相当于绝对光度的逐步减弱。不过,很快就明白的是给定光谱型的恒星的本身光度可以具有很大的差别。 较暗的一些恒星称为矮星,较亮的一些恒星称为巨星、最亮的一些恒星称为超巨星。这就导致象光谱型那样用符号描述光度型,即用符号 I 标记超巨星、II 标记亮巨星、III 标记巨星、IV 标记亚巨星、V 标记主序星和矮星以及 VI 标记亚矮星和白矮星。

赫兹朋(Hertzsprung, 1905)和罗素(Russell, 1914)证明,事实上绝对光度正是随光谱

1) MKK 是 Morgan W. W. (摩根), Keenan P. C. (基南)和 Kellman Edith (凯尔曼) 三人名字的第一个字母,他们提出了这种光谱分类法,见 1943 年他们三人的著作。——译者注

表 67 亨利·德雷伯(HD)光谱型 O–M[1]

光谱型	主要特征	次型	HD 判据	典型恒星
O	最热星，紫外连续谱强	Oa	OIIλ4650 为主	BD+35°4013
		Ob	HeIIλ4686 为主 } 发射线	BD+35°4001
		Oc	谱线较窄 } 发射线	BD+36°3987
		Od	吸收线为主；只有 HeII, OII 是发射线	船尾座 ξ, 仙王座 λ
		Oe	SiIVλ4089 最强	大犬座 29
		Oe5	OIIλ4649, HeIIλ4686 强	大犬座 τ
B	中性氦为主	B0	CIIIλ4650 最强	猎户座 ε
		B1	HeIλ4472>OIIλ4649	大犬座 β, 半人马座 β
		B2	HeI 线最强	猎户座 δ, 豺狼座 α
		B3	HeII 线消失	猎户座 π^4, 孔雀座 α
		B5	Siλ4128>Heλ4121	金牛座 19, 船帆座 φ
		B8	λ4472=Mgλ4481	英仙座 β, 天鹤座 δ
		B9	HeIλ4026 刚能看到	天鹰座 λ, 半人马座 λ
A	氢谱线从 A0 的最强逐渐减弱	A0	巴耳末线最强	小犬座 α
		A2	CaIIK=0.4H_δ	大犬座 S, 半人马座 l
		A3	K=0.8H_δ	南鱼座 α, 波江座 τ^3
		A5	K>H_δ	三角座 β, 绘架座 α
F	金属线成为值得注意的	F0	K=H+H_δ	双子座 δ, 船底座 α
		F2	G 谱带成为值得注意的	人马座 π
		F5	G 谱带成为连续的	小犬座 α, 船尾座 ρ
		F8	巴耳末线比太阳中的略强	室女座 β, 天炉座 α
G	太阳型光谱	G0	Caλ4227=H_δ	御夫座 α, 长蛇座 β
		G8	Feλ4325>H_γ(在小尺寸底片上)	双子座 $\varkappa$, 网罟座 α
K	金属线为主	K0	H 及 K 最大强度	牧夫座 α, 凤凰座 α
		K2	蓝光的连续谱变弱	巨蟹座 β, 天秤座 υ
		K5	G 谱带不再连续	金牛座 α
M	氧化钛分子谱带	Ma	TiO 谱带成为值得注意的	猎户座 α, 长蛇座 α
		Mb	谱带成为明显的	英仙座 ρ, 南十字座 γ
		Mc	强谱带使光谱成条纹	天鹅座 W, 宝瓶座 RX
		Md	刍藁型变星, H_γ, H_δ 是发射线	天鹅座 χ, 鲸鱼座 o

[1] 取自基南(Keenan, 1963)的文章。

型而减弱的，但是形成两种主要的恒星群，其中一群本来比另一群更亮。亚当斯等(Adams 和 Kohlschütter, 1914; 以及 Adams 等, 1935) 观测到紧密靠近的成对谱线的相对强度是与恒星的绝对星等线性相关的。这种资料不久导致发现许多不同类型的天体并导致摩根、基南和凯尔曼(Morgan、Keenan 和 Kellman, 1943)的光度分类法。在图 42 中示出种类广泛的恒星天体的赫-罗图。

一个天体在赫-罗图上的位置是光度、半径、起始化学成分、质量及年龄的函数。应用(5–66)式至(5–71)式以及第四章给出的热核反应率常数可以算出详细的演化程。伯比奇等(Burbidge 和 Burbidge, 1958; Hayashi, Hoshi 和 Sugimoto, 1962; Christy, 1962, 1966; Iben, 1967; 以及 Tayler, 1968)综合评述了有关的详细情况。

萨皮得(Salpeter, 1955)提出：恒星演化可以说明下式给出的光度函数 $\varphi(M_V)$ 的观测结果：

表 68 摩根、基南、凯尔曼(MKK)或叶凯士光谱分类法[1]

	光谱型的判据	渐增光度的判据	典型恒星
	SiIII/SiIV、SiII/SiIII、SiII/HeI 之比		B0 Ia 猎户座 ε, V 天蝎座 δ
B0	4552 SiIII/4089 SiIV (<1)	4089 SiIV/4009 HeI	B1 Iab 英仙座 ζ
B1	4552 SiIII/4089 SiIV (>1)	3995 NII/4009, 4552/4387 HeI	B2 III 猎户座γ, V 仙后座 ζ; B3 V 大熊座 η
B2–B3	4128–31 SiII/4121 HeI 在 B3 中有 K 线出现	3995 NII/4009, 4552/4387 HeI	B5 III 英仙座 δ
B5	4128–31 SiII/4144 HeI	巴耳末线更锐	B7 V 狮子座 α; B8Iab 猎户座 β
B9	4481 MgII≫4471 HeI	巴耳末线更锐	B9 III 天琴座 γ
	金属线强度渐增	巴耳末线更锐	A0 III 天龙座 α, IV 双子座 γ, V 天琴座 α
A0	HeI 很弱或不出现, FeII 很弱	(FeII 略变强)	A1 V 大犬座 α
A1	4030–34MnI 出现, 4385(混合)/4481 MgII		A2 Ia 天鹅座 α; A3III 三角座 β
A2–A5	4030–34MnI/4128–31, 4300(混合)/4385	4416(混合)/4481, 4416/4300	A4 III 蛇夫座 α; A5V 仙后座 δ
			A7 III 牧夫座 γ
F0	4030–34MnI/4128–31, 4300(混合)/4385	4416(混合)/4481, 4416/4300	F0 Ib 天兔座 α; V 室女座 γ
F2	G 谱带渐次向红端变化(CH)	4416(混合)/4481, 4416/4300 及 4172/4226CaI	F2 IV 仙后座 β
F5	G 谱带增强, 4045 FeI/H_δ, 4226 CaI/H_γ	4077SrII/4226, 4045, 4063, 4250FeI	F5Ib 天鹅座 γ, V 室女座 β
G0	G 谱带增强, 4045FeI/H_δ, 4226CaI/H_γ	4077 SrII/4226, 4045, 4063, 4250 FeI	G0 Ib 宝瓶座 α, II 人马座 α, IV 牧夫座 η
			G2 V 太阳, 天鹅座 16A
		4077/4062 FeI, 4085, 4144, 4250FeI	G5 IV 武仙座 μ; G8II 天鹅座 ζ
G5	4030–34/4300G 谱带的紫端, 4325FeI/H_γ	CN 谱带较强 4215–4144	G8III 牧夫座 δ, IV 天鹰座 β, V 牧夫座 ζ 子星 A
K0	4030–34/4300G 谱带的紫端, 4290(混合)/4300, 4096/H_δ	4077/4063, 4077/4071	K0 III 天鹅座 ε, IV 仙王座 η; K1IV 仙王座 γ
		CN 谱带 4216	K2 Ib 飞马座 ε, III 白羊座 α, V 白羊座 ε
K5	4226CaI/4325FeI, 4290(混合)/4300, 4096/H_δ	CN 谱带 4216, 4215 SrII/4250FeI	K3 Ib 英仙座 η, II 天鹰座 γ, III 仙女座 δ
			K5 II 天鹅座 ζ, III 金牛座 α, V 天鹅座 61A
	TiO 谱带强度渐增	H 线强度渐增	
M0–M5	谱带头部: 4762, 4954, 5168, 5445, 5763, 5816,	巨星或超巨星: 4226 的强度渐减	M0 III 仙女座 β
	5857(远至 6651, 7054, 7589)	CaI, 4077SrII/4045FeI,	M2 Ia 仙王座 μ, Ib 猎户座 α
		4215SrII/4250FeI	M5 II 武仙座 α

混合——同一元素或不同元素的许多谱线的混合。

[1] 取自杜费(Dufay, 1964)的书。

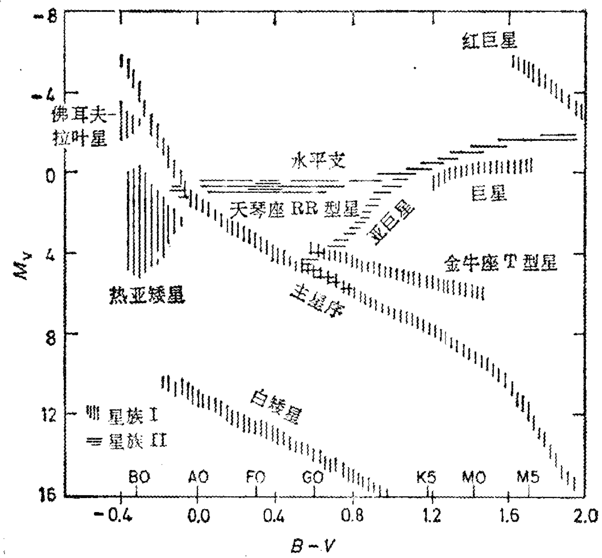


图 42 赫-罗图中的星序及区的名称。纵坐标是绝对目视星等 M_V，而横坐标是色指数 B-V。在 B-V 轴上标出的光谱型是主序星的光谱型

表 69 观测到的随绝对目视星等 M_V 而变的主星序光度函数 $\varphi(M_V)$及"零龄"光度函数 $\psi(M_V)$[1]

M_V	$\log\varphi+10$	$\log\psi+10$	M_V	$\log\varphi+10$	$\log\psi+10$
−6	1.29	4.71	+8	7.66	7.66
−5	2.43	5.59	+9	7.72	7.72
−4	3.18	6.08	+10	7.81	7.81
−3	3.82	6.41	+11	7.95	7.95
−2	4.42	6.68	+12	8.11	8.11
−1	5.04	6.92	+13	8.22	8.22
0	5.60	7.10	+14	8.21	8.21
+1	6.17	7.26	+15	8.12	8.12
+2	6.60	7.25	+16	7.98	7.98
+3	7.00	7.23	+17	7.76	7.76
+4	7.30	7.30	+18	7.40	7.40
+5	7.45	7.45	+19	6.58	6.58
+6	7.56	7.56	+20	5.28	5.28
+7	7.63	7.63			

[1] 取自伯比奇等(Burbidge 和 Burbidge, 1958)的文章。

$$dN=\varphi(M_V)dM_V, \tag{5-245}$$

式中 dN 是绝对目视星等在 M_V 与 M_V+dM_V 之间的每立方秒差距内所有类型的恒星总数。观测到的光度函数是范莱因等 (van Rhijn, 1925, 1926; Luyten, 1941; 以及 McCuskey, 1956)对银河系作出的，还有是桑德奇(Sandage, 1957)对几个银河星团作出的。在表 69 中给出对主序星观测到的 $\varphi(M_V)$ 以及起始光度函数 $\psi(M)$，后者代表当恒星进入主星序阶段时，恒星分布的相对频数。萨皮得(Salpeter, 1955)计算得出起始光度函数，他假定了恒星在从主星序上向薛恩伯格-张德拉塞卡(Schönberg-Chandrasekhar, 1942)极限演化时具有

恒定质量。一颗亮度为 L、质量为 M 的恒星在主星序阶段的寿命由下式给出 (Sandage, 1957; 参看(5–72)式):

$$\tau=1.10\times10^{10}\frac{L_{\odot}}{L}\frac{M}{M_{\odot}}\text{年}, \tag{5–246}$$

式中 $M_{\odot}$ 及 $L_{\odot}$ 分别表示太阳的质量及光度。假定在时间 T 内,恒星的恒定形成率为 dN/dt,我们得到:

$$\begin{aligned}\psi(M_V)=\frac{dN(M_V)}{dt}T&=\varphi(M_V)\frac{M_L}{M}\frac{L}{L_L} \quad (\text{当 } \tau\leqslant T)\\ &=\varphi(M_V) \quad (\text{当 } \tau>T),\end{aligned} \tag{5–247}$$

式中 M_L 及 L_L 是(5–246)式中 $\tau=T$ 时的质量及光度值。表 69 中 $\psi(M_V)$ 的积分给出在银河系的寿命内在太阳附近形成的恒星的数密度是 0.120 颗星·秒差距$^{-3}$。设 $T=6\times10^{9}$ 年,由此得出年形成率是 2×10^{-11} 颗星·秒差距$^{-3}$·年$^{-1}$。不过,施密特(Schmidt, 1963)研究得出不同质量的恒星的形成率随时间而变的函数,并且得出结论:在过去形成的恒星相对地说要亮一些。

5.5.4. 夜天空的亮度

设空间是欧几里得空间,而且星系在空间中是均匀分布的,则来自距离为 r、厚度为 dr 的任何球壳的辐射的视光度 l 为:

$$l=4\pi r^{2}\frac{dr}{r^{2}}\rho(L)LdL, \tag{5–248}$$

式中 $\rho(L)$ 表示每单位体积内光度为 L 的源的数目。当所有球壳的贡献加在一起时,l 成为无穷大,与观测到的夜天空是黑暗的事实是矛盾的。这种佯谬,通常称为奥伯斯(Olbers)佯谬,最早是哈雷等(Halley, 1720; de Cheseaux, 1744; 以及 Olbers, 1826)注意到的。迪克森(Dickson, 1968; 以及 Jaki, 1969)对这种佯谬作了历史情况的综述。

对于均匀的各向同性的膨胀宇宙来说,一个观测者只能接收到距离为 CH_0^{-1} 以内来的辐射,其中 H_0 是哈勃常数,这样奥伯斯佯谬就不存在了。例如,对于绝对光度为 L 及空间密度为 $\rho(L)$ 的星系,观测到的亮度 B_G 将由下式给出:

$$B_G=\frac{cL\rho(L)}{4\pi H_0}\text{ 尔格·厘米}^{-2}\text{·秒}^{-1}\text{·球面度}^{-1}。 \tag{5–249}$$

江涛(Kiang, 1961)给出了星系的光度函数,并在图 43 中示出。施密特(Schmidt, 1971)给出下列数据:

Mg (星等)	L (尔格·秒$^{-1}$)	$\rho(L)$ 兆秒差距$^{-3}$
<-21	10^{44}	$10^{-3.5}$
<-20	10^{44}	$10^{-2.5}$
<-19	10^{44}	$10^{-1.5}$
<-18	10^{43}	10^{-1}

对于绝对星等为 M_B 的光学星系,罗奇等(Roach 和 Smith, 1968; 以及 Peebles, 1971)[1)]给出:

1) 杜布等(Dube 等,1977)进行了对光学背景的新测量。

	在 λ=5300 埃的亮度 B
黄道光	146 S_{10}
累积星光	105 S_{10}
气 辉	48 S_{10}
星 系	0.73 S_{10}

这里 S_{10} 是每平方度等效于 10 等星的数目。$1S_{10}=18.89$ 星等·角分$^{-2}=27.78$ 星等·角秒$^{-2}$，而 $300\,S_{10}=12.70$ 星等·角分$^{-2}=21.59$ 星等·角秒$^{-2}$。为了把表面亮度转换成厘米·克·秒制单位，就要乘以 $1S_{10}=6.86\times10^{-6}$ 尔格·厘米$^{-2}$·秒$^{-1}$·球面度$^{-1}$。美国帕洛玛山天文台在 $\lambda=6500$ 埃处观测到的银极的夜天空的平均强度为(Shectman, 1973)：

$$4.5\times10^{-18}\text{ 尔格·秒}^{-1}\text{·厘米}^{-2}\text{·球面度}^{-1}\text{·赫}^{-1}\text{。}$$

帕特里奇等(Partridge 和 Peebles, 1967)给出了夜天空累积背景作为宇宙模型的函数的详尽公式，并提出了可以验证星系形成及演化的模型的测量。

赖尔(Ryle, 1958)注意到奥伯斯问题可以用下列事实表达：从一种给定类型的天体

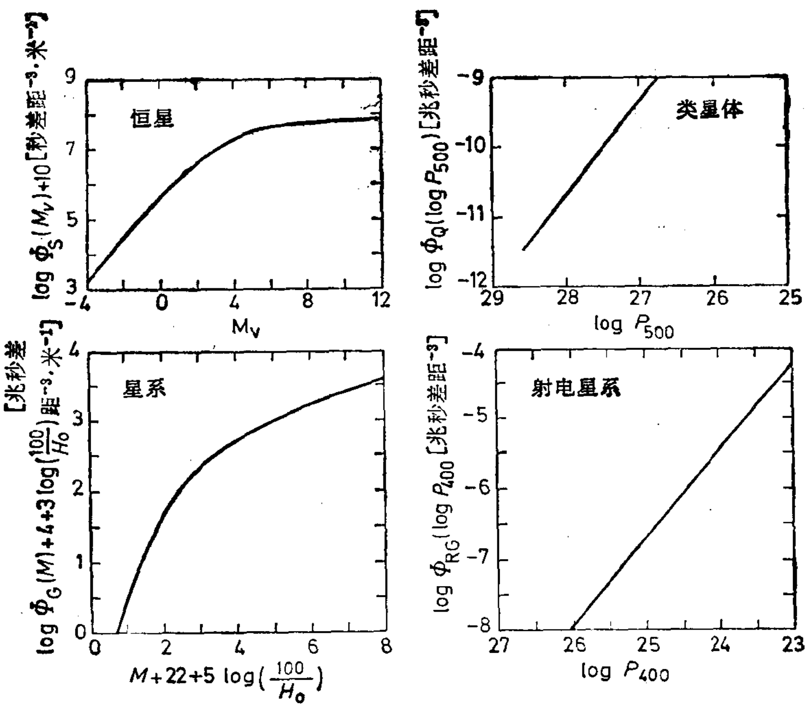


图 43 $\phi_s(M_V)$、$\phi_G(M)$、$\phi_Q(\log P_{500})$及 $\phi_{RG}(\log P_{400})$ 分别为绝对星等 M_V 的恒星、绝对星等 M 的星系、在 500 兆赫发射单色功率 P_{500} 瓦·赫$^{-1}$ 的类星体及在 400 兆赫发射单色功率 P_{400} 瓦·赫$^{-1}$·球面度$^{-1}$ 的射电星系的光度函数。数据分别取自伯比奇(Burbidge 和 Burbidge, 1958)、江涛(Kiang, 1961)、施密特 (Schmidt, 1968) 及默凯利恩 (Merkelijn, 1971) 的文章。对恒星曲线的积分给出每立方秒差距 0.120 颗恒星，而在前面的 8 个星等的光度范围内求得星系数是每立方兆秒差距 $0.46(H_0/100)^3$，其中 H_0 是哈勃常数。类星体资料表明在给出的光度范围内，它们的空间密度约为每立方兆秒差距 10^{-9} 个。在 $\log P_{400}=23\sim26$ 的范围内的射电星系数据可以用方程 $\log[N(\log P_{400})]=-1.06\log P_{400}+19.96$ 表示，其中 N 是 $\log P_{400}$ 以 0.4 为每单位间隔的每立方兆秒差距中的射电星系数

来的累积辐射一定不能超过观测到的背景辐射。因为在静态欧几里得宇宙中，累积辐射正比于 $L\rho(L)$，在一特定流量密度上的源的数目正比于 $L^{3/2}\rho(L)$，故我们得出下列条件：

$$L\rho(L) < KI$$

及 $$L > KI^{-2}, \tag{5-250}$$

式中常数 K 由下式给出：

$$K = L^{3/2}\rho(L),$$

而 I 是累积辐射。可以应用这些公式与观测一起推导射电天体的空间密度极限和光度极限。施密特等(Schmidt, 1968；以及 Merkelijn, 1971)分别给出类星体及射电星系的射电光度函数；在图 43 中示出这些函数。施密特(Schmidt, 1971)给出射电星系及类星体的总射电光度函数如下：

L (尔格·秒$^{-1}$)	$\rho(L)$ 兆秒差距$^{-3}$	L (尔格·秒$^{-1}$)	$\rho(L)$ 兆秒差距$^{-3}$
10^{45}	$10^{-10.5}$	10^{43}	10^{-8}
10^{44}	10^{-9}	10^{42}	10^{-7}

而默克林(Merklijn)给出：

$$\log[N(P_{400})] = -1.06 \log P_{400} + 19.96,$$

式中 N 是每立方兆秒差距并且以 $\log P_{400}$ 的 0.4 为单位的每单位间隔内的射电星系数，P_{400} 是发射频率为 400 兆赫的单色功率，单位是瓦·赫$^{-1}$·球面度$^{-1}$。

沙利叶(Charlier, 1908, 1922)首先注意到设在欧几里得宇宙中等级式天体集团满足下列条件，则夜天光将是有限的：

$$\frac{R_{i+1}}{R_i} > [N_{i+1}]^{1/2}, \tag{5-251}$$

式中 R_i 是第 i 阶系统的半径，N_{i+1} 是在 $i+1$ 系统内的 i 阶系统的数目。沙普利等(Shapley, 1933; Zwicky, 1957; Abell, 1958, 1962, 1965; 以及 Zwicky 等, 1961)已观测到星系是形成星系团的，并且这些星系团可能形成超星系团。伏古勒(de Vaucouleurs, 1970)复活了把星系的等级式成团作为奥伯斯佯谬的一种解的说法。阿耳文等(Alfvén, 1971; 以及 Klein, 1971)对这种假说提出一种修正，他们提出环绕我们的星系是有限的、膨胀着的总星系。

5.6. 广义相对论及其观测验证

5.6.1. 广义相对论公式

按照广义相对论(Einstein, 1916, 1917, 1919)，时空几何中的弯曲本身表现为引力。引力对近邻世界粒子线的间隔有作用；反过来，粒子及其他质量能量源又引起时空几何弯曲。因此，引力本身在时空几何中表现出来，时空以线元 ds 描述：

$$ds^2 = g_{ik}\,dx^i\,dx^k, \tag{5-252}$$

式中 dx^i 是坐标 x^i 的微分，空间坐标为 $i=1、2、3$，时间坐标 ct 为 $i=0$，c 为光速，当一个指数出现两次时意指求和，度规张量 g_{ik} 本身是时空坐标的函数。

在单位体积内质量能量的量由应力-能量张量或能量-动量张量 T_{ik} 所确定。对于气体或理想流体

$$T^{ik} = (\varepsilon + P)u^i u^k - Pg^{ik}, \tag{5-253}$$

式中 $\varepsilon=\rho c^2$ 是物质的能量密度，在其本身静止的参考系中测量的；ρ 是质量密度，P 是压力；u^i 是气体的四元速度。电磁场的应力-能量张量由下式给出：

$$T^{ik}=-\frac{g_{lm}}{4\pi}F^{il}F^{km}+\frac{g^{ik}}{16\pi}F_{lm}F^{lm}, \tag{5-254}$$

式中 F_{lm} 是电磁场张量。在这种情况下，T^{ik} 给出沿场线的张力 $(E^2+B^2)/8\pi$ 及垂直于场线的压力 $(E^2+B^2)/8\pi$，其中 $(E^2+B^2)/8\pi$ 是电磁场的能量密度。

能量-动量守恒的微分形式如下：

$$\nabla\cdot T=0,$$

式中 $\nabla\cdot$ 表示协变散度，分量为：

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}T_i^k}{\partial x^k}-\frac{T^{km}}{2}\frac{\partial g_{km}}{\partial x^i}=0, \tag{5-255}$$

式中基本行列式 $g=|g_{ik}|$。

对于平直空间中的理想流体，此方程的笛卡儿坐标形式为：

$$\frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k}=\frac{\partial P}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x^k}[(\rho+P)u^iu^k]=0, \tag{5-256}$$

把 $u^i=v^iu^0$ 代入上式成为欧拉方程

$$\frac{\partial v}{\partial t}+(v\cdot\nabla)\,v=-\frac{(1-v^2)}{(\rho+P)}\left(\nabla P+v\,\frac{\partial P}{\partial t}\right)。 \tag{5-257}$$

黎曼曲率张量 R^i_{klm} 是使时空弯曲而产生相对的测地加速度的原因。

$$R^i_{klm}=\frac{\partial\Gamma^i_{km}}{\partial x^l}-\frac{\partial\Gamma^i_{kl}}{\partial x^m}+\Gamma^i_{nl}\Gamma^n_{km}-\Gamma^i_{nm}\Gamma^n_{kl}。 \tag{5-258}$$

这里克氏符号 Γ^i_{mn} 由下式定义：

$$\Gamma^i_{kl}=\frac{g^{im}}{2}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l}+\frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k}-\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}\right), \tag{5-259}$$

式中

$$\Gamma^i_{ik}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^k}(\ln-g)=\frac{1}{g^{1/2}}\frac{\partial}{\partial x^k}(-g^{1/2}),$$

g 是行列式 $|g_{ik}|$。应用克氏符号，表达能量-动量守恒的方程化为：

$$T^{ik}_{;m}=\frac{\partial T^{ik}}{\partial x^m}+\Gamma^i_{lm}T^{lk}+\Gamma^k_{lm}T^{il}$$

或

$$T^{ik}_{;i}=\frac{\partial T^{ik}}{\partial x^i}+\Gamma^i_{il}T^{lk}+\Gamma^k_{il}T^{il}=\frac{1}{-g^{1/2}}\frac{\partial}{\partial x^i}(-g^{1/2}T^{ik})+\Gamma^k_{il}T^{il},$$

式中“；”表示协变散度。对于逆变矢量 V^i 及协变矢量 V_i，协变散度是：

$$V^i_{;k}=\frac{\partial V^i}{\partial x^k}+\Gamma^i_{lk}V^l$$

和

$$V_{i;k}=\frac{\partial V_i}{\partial x^k}-\Gamma^l_{ik}V_l,$$

式中对于任一矢量

$$V^i_{;i}=\frac{1}{-g^{1/2}}\frac{\partial}{\partial x^i}(-g^{1/2}V^i)。$$

质量-能量所产生的曲率由爱因斯坦场方程(Einstein, 1916, 1919)给出：

$$R_{ik}-\frac{1}{2}Rg_{ik}-\Lambda g_{ik}=\frac{-\varkappa}{c^2}T_{ik}, \tag{5-260}$$

式中宇宙常数 Λ 经常取为零，爱因斯坦引力常数 $\varkappa=8\pi G/c^2={}^*1.866\times10^{-27}$ 达因·克$^{-2}$·秒^2。

有时 $\varkappa_0=\varkappa/c^2=2.076$[1]$\times10^{-48}$ 厘米$^{-1}$·克$^{-1}$·秒^2 也称为爱因斯坦引力常数。G 是牛顿引力常数，里奇(Ricci)张量 R_{ik} 由下式给出：

$$R_{km}=R^i_{klm}g^l_i=R^i_{kim}, \tag{5-261}$$

式中 R^i_{klm} 是黎曼曲率张量，时空标量曲率 R 由里奇张量的并缩给出：

$$R=R_{ik}g^{ik}=R^i_i。 \tag{5-262}$$

爱因斯坦场方程是根据下列假设而得出的：引力质量与惯性质量之比为一普适常数；自然定律是以最简单的可能方程组表示的，它们对所有时空坐标系是协变的；狭义相对论的定律在引力场为零的坐标系中局域地成立。

在引力场中一个粒子沿测地线的运动由下列微分方程确定：

$$\frac{d^2x^i}{ds^2}+\Gamma^i_{kl}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{ds}=0。 \tag{5-263}$$

光线用零测地线代表，即 $ds=0$。一个观测者的原时 τ 取决于沿着他的世界线的度规

$$d\tau=\sqrt{ds^2}=\sqrt{g_{ik}\,dx^i\,dx^k}, \tag{5-264}$$

式中世界线由任何时间参数 t 描述

$$x^i=x^i(t)。 \tag{5-265}$$

在时空中任何点的任何无限小的邻域中，原时间隔一定满足狭义相对论的定律。也就是说局域上线元 ds 变成下式所给出的闵可夫斯基度规(Minkowski, 1908; Hargreaves, 1908)：

在直角坐标中 $$ds^2=c^2dt^2-dx^2-dy^2-dz^2, \tag{5-266}$$

在球面坐标中 $$ds^2=c^2dt^2-dr^2-r^2d\theta^2-r^2\sin^2\theta\,d\varphi^2, \tag{5-267}$$

在圆柱坐标中 $$ds^2=c^2dt^2-dr^2-r^2d\varphi^2-dz^2, \tag{5-268}$$

式中每一种情况的坐标都是以惯性参考系度量的。在闵可夫斯基时空中，ds 在洛伦兹变换下是不变量，几何是欧几里得几何，空间是平直空间，原时间隔 $d\tau$ 由下式给出：

$$d\tau=\left[1-\frac{v^2}{c^2}\right]^{1/2}dt, \tag{5-269}$$

这是从一只以速度 $v=[(dx^2+dy^2+dz^2)/dt^2]^{1/2}$ 运动的钟所读出的时间间隔。

5.6.2. 史瓦西度规及广义相对论的经典检验

在真空中的一个大质量非旋转体之外的球对称引力场中(其中 $R_{ik}=0$)，线元 ds 成为史瓦西度规，ds 由下式给出(Schwarzschild, 1916)：

$$ds^2=\left[1-\frac{2GM}{c^2r}\right]c^2dt^2-\frac{dr^2}{\left[1-\frac{2GM}{c^2r}\right]}-r^2d\theta^2-r^2\sin^2\theta\,d\varphi^2。 \tag{5-270}$$

这里 r、θ 及 φ 是球面坐标，其原点是在大质量天体的中心，M 是质量，它确定牛顿引力场 GM/r，其中 G 是牛顿引力常数。质量 M 具有低速度 $v\ll c$ 的自由降落测试粒子所受到的等效"牛顿"力的大小为：

$$F=\frac{-GM}{r^2\left[1-\frac{2GM}{c^2r}\right]^{1/2}}。 \tag{5-271}$$

1) 原文误为7.073×10^{-48}厘米$^{-1}$·克$^{-1}$·秒^2。——译者注

不过，这种解释只在半径远大于下式给出的史瓦西半径或引力半径 r_g 的情况才是有效的：

$$r_g=\frac{2GM}{c^2}。\tag{5-272}$$

应用变换式 $r=\rho[1+GM/(2c^2\rho)]^2$，史瓦西线元可以用各向同性形式表达为：

$$ds^2=\frac{\left(1-\frac{GM}{2c^2\rho}\right)^2}{\left(1+\frac{GM}{2c^2\rho}\right)^2}c^2dt^2-\left(1+\frac{GM}{2c^2\rho}\right)^4[d\rho^2+\rho^2(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\varphi^2)],\tag{5-273}$$

不过现在应用一种更普遍的后牛顿度规以便能与其他引力理论例如布兰斯等（Brans 和 Dicke，1961）的标量-张量理论及霍伊尔等（Hoyle 和 Narlikar，1966）的 C 场理论作观测方面的比较。在真空中一个大质量非旋转体之外的球对称引力场的后牛顿度规由下式给出（Eddington，1923；Robertson，1962）：

$$\begin{aligned}ds^2=&\left[1-2\alpha\left(\frac{GM}{c^2\rho}\right)+2\beta\left(\frac{GM}{c^2\rho}\right)^2+\cdots\right]c^2dt^2\\&-\left[1+2\gamma\left(\frac{GM}{c^2\rho}\right)+\cdots\right][d\rho^2+\rho^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2)],\end{aligned}\tag{5-274}$$

式中已用了一种各向同性形式。应用转换式 $r=\rho[1+\gamma GM/(c^2\rho)]$，我们得到等效"标准"形式：

$$\begin{aligned}ds^2=&\left[1-2\alpha\left(\frac{GM}{c^2r}\right)+2(\beta-\alpha\gamma)\left(\frac{GM}{c^2r}\right)^2+\cdots\right]c^2dt^2\\&-\left[1+2\gamma\left(\frac{GM}{c^2r}\right)\right]dr^2-r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\varphi^2)。\end{aligned}$$

索恩等（Thorne 和 Will，1971）给出（5-274）式的更普遍形式，它包括非球形、非牛顿项。爱因斯坦场方程给出：

$$\alpha=\beta=\gamma=1,\tag{5-275}$$

而布兰斯-迪克（Brans-Dicke）理论给出：

$$\alpha=\beta=1;\quad\gamma=\frac{\omega+1}{\omega+2},\tag{5-276}$$

式中 ω 是此理论中的一个未知的无量纲的参数。因为行星轨道与牛顿理论符合得很好，参数 α 必须等于 1.0。

一条光线从一个质量为 M 的天体近旁通过，若光线距天体中心的最小距离为 R_0，则光线偏离直线路径的偏转角为（Einstein，1911）：

$$\varphi=2(\alpha+\gamma)\frac{GM}{R_0c^2}\ 弧度,\tag{5-277}$$

式中 G 是牛顿引力常数。对史瓦西度规来说，$\phi=2GM/(R_0c^2)$，这是牛顿引力理论预言值的两倍。在太阳边缘，设 $\alpha=\gamma=1$，$\varphi=1.749$ 角秒。爱丁顿等（Eddington，1919；以及 Dyson、Eddington 和 Davidson，1920）外推光学观测得出 $\varphi=1.98\pm0.16$ 角秒[1)]。塞斯塔德等（Seiestad, Sramek 和 Weiler，1970；Muhleman，Ekers 和 Fomalont，1970；Sramek，1971；以及 Hill，1971）对射电源的干涉仪观测已分别得出 $\varphi=1.77\pm0.20$、$1.82^{+0.24}_{-0.17}$、1.57 ± 0.08 和 1.87 ± 0.3 角秒[2)]。

一颗沿轨道运行的行星近日点的进动量为：

1) 1973 年 6 月 30 日日食观测得出 $\varphi=1.66\pm0.18$ 角秒。——译者注

2) 1974 年 4 月射电干涉仪观测得出 $\varphi=1.775\pm0.019$ 角秒。——译者注

$$\Delta\theta=2\pi[2\alpha(\alpha+\gamma)-\beta]\frac{GM}{c^2a(1-e^2)}\text{ 弧度/转数,} \tag{5-278}$$

式中 M 是中心天体的质量，a 及 e 分别是轨道椭圆的半长径及偏心率。以每世纪的角秒数为单位的理论进动值 $\Delta\theta_t$ 及观测进动值 $\Delta\theta_0$ 分别如下 (Whitrow 和 Morduch, 1965)：水星是 $\Delta\theta_t=43.03$, $\Delta\theta_0=43.11\pm0.45$, 金星是 $\Delta\theta_t=8.63$, $\Delta\theta_0=8.4\pm4.8$, 地球是 $\Delta\theta_t=3.84$, $\Delta\theta_0=5.0\pm1.2$。小行星伊卡鲁斯的值(Shapiro 等, 1971)是 $\Delta\theta_t=10.3$ 及 $\Delta\theta_0=9.8\pm0.8$。这里的理论值是当 $\alpha=\beta=\gamma=1$ 的值。夏皮罗等(Shapiro 等, 1972)对水星近日点进动的雷达测量给出 $(2+2\gamma-\beta)/3=1.005\pm0.007$, 其中 α 已假定是 1, 0.007 代表统计标准误差，而太阳的二次带谐系数已假定是可以忽略的 (无扁率)。若应用在牛顿平方律力作用下的粒子的相对论性运动方程(Goldstein, 1950), 则水星近日点的进动值只有 7 角秒/世纪。不过，倘若太阳是扁的，则爱因斯坦预言值与观测到的反常进动之间已达百分之一的符合，并不会证实这个理论(Dicke, 1964)。有一种推测认为存在这样的扁度 (Dicke 和 Goldenberg, 1967), 但是太阳扁度的问题还是一个有争议的问题。例如，查普曼等 (Chapman 和 Ingersoll, 1973)证明在太阳赤道上最亮的光斑能够说明观测到的扁度[1]。

在质量为 M 的球体上，在距中心为 R 处发出的谱线在无穷远处接收到的波长 λ 由下式给出：

$$\lambda=\lambda_0+\Delta\lambda=\lambda_0\left[1-\frac{2GM}{c^2R}\right]^{-1/2}; \tag{5-279}$$

$$z=\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}\approx\frac{GM}{c^2R}\approx1.47\times10^5\left(\frac{M}{M_\odot}\right)R^{-1}\quad(\text{若 } GM\ll Rc^2), \tag{5-280}$$

式中 z 是引力红移，R 是半径，单位是厘米，以近似数字表示，太阳质量 $M_\odot\approx2\times10^{33}$ 克，λ_0 是引力场可以忽略不计时原子辐射的波长。不过，引力红移并不是广义相对论的明确的检验，假定光子能量为 $h\nu$, 并且等效原理及能量守恒定律成立，则牛顿引力理论预言的红移与 (5-280) 式给出的相同。虽然引力红移的测量确实提供引力质量与惯性质量相等性的经验证据，可是从引力红移得不到涉及其他引力理论新的信息。这是因为它只随 α 而变，而为了使行星轨道能与牛顿理论符合，α 必须等于 1.0。对于起源于太阳边缘的光，$\Delta\lambda/\lambda_0=2.17\times10^{-6}$。亚当斯等(Adams, 1925; St. John, 1928; Popper, 1959; Blamont 和 Roddier, 1961; Brault, 1963; Forbes, 1970; Greenstein, Oke 和 Shipman, 1971; Greenstein 和 Trimble, 1967, 1972; 以及 Trimple 和 Greenstein, 1972)讨论了在太阳上以及在更稠密的白矮星上原子引力红移的测量。核子的谱线——狭的 γ 射线的发现 (Mössbauer, 1958) 已导致地球引力红移的探测。庞德等(Pound 和 Rebka, 1959, 1960)利用穆斯堡尔效应已测出 $\Delta\lambda/\lambda_0=(2.57\pm0.26)\times10^{-15}$, 与预言值 2.46×10^{-15} 不同。在这以后，理论与实验之间的符合已改进到百分之一左右(Pound 和 Snider, 1964)。

当信号路径靠近太阳时，从一颗行星来的雷达回波信号的双程时间延迟会随之增加。附加的坐标时间延迟 $\Delta\tau$ 由下式给出(Shapiro, 1964, 1968)：

$$\Delta\tau=\frac{2GM}{c^3}(1+\gamma)\ln\left[\frac{r_e+r_p+R}{r_e+r_p-R}\right], \tag{5-281}$$

式中 r_e 及 r_p 分别是地球及行星与太阳的径向距离，R 是地球-行星距离。对水星来说，从大距到上合，$\Delta\tau$ 从 15 增加到 240 微秒。夏皮罗等(Shapiro 等, 1971) 测出的实际延迟给出 $\gamma=1.03\pm0.04$, 其中广义相对论理论值是 1.00。

1) 最近观测证明太阳扁率远小于 Dicke 等所推测的值。——校者注

环绕质量为 M 的行星旋转的一颗卫星将显示下式给出的引力进动 Ω(de Sitter, 1916, 1920; Schiff, 1960)：

$$\boldsymbol{\Omega}=\frac{\alpha+2\gamma}{2r^3}\frac{GM}{c^2}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}), \tag{5-282}$$

式中 $\boldsymbol{r}$ 及 $\boldsymbol{v}$ 是表示卫星的距离及速度的矢量。设一个陀螺仪处在轨道半径为 r 的环绕地球的圆形轨道上，则一圈内的平均进动由下式给出：

$$\boldsymbol{\Omega}=\frac{(\alpha+2\gamma)}{2r^{5/2}}\left(\frac{GM_\oplus}{c^2}\right)^{3/2}\approx 8.4\,\frac{\alpha+2\gamma}{3}\left(\frac{R_\oplus}{r}\right)^{5/2}\text{角秒/年}, \tag{5-283}$$

式中 $M_\oplus$ 及 $R_\oplus$ 分别表示地球的质量及半径。设 $r\approx R_\oplus$, (5-282)式及(5-283)式给出的测地进动 Ω 比地球与陀螺仪的自旋轨道角动量的相互作用引起的托马斯进动大几个量级。

正如狄拉克 (Dirac, 1937, 1938) 所指出的，宇宙的年龄 H_0^{-1} 以原子的时间单位 $e^2/(mc^3)$ 来表示时，量级为 10^{39}，这正是电子与质子间的静电力与这两个粒子间的引力之比 $e^2/(Gm_pm)$。按照狄拉克的说法，这表明两个比值都是宇宙年龄的函数，而引力常数 G 可能是随时间变化的。例如狄拉克选用

$$\left(\frac{\dot{G}}{G}\right)_0=-3H_0,$$

式中“·”表示对时间的一阶导数，下标 0 表示现在值，H_0 是哈勃常数的现在值。布兰斯等(Brans 和 Dicke, 1961; Dicke, 1962)的宇宙学模型给出(Weinberg, 1972)：

$$\left(\frac{\dot{G}}{G}\right)_0=\begin{cases}\dfrac{-3q_0H_0}{\omega+2} & (\text{当 } q_0\ll 1);\\[2mm] \dfrac{-H_0}{\omega+2} & (\text{当 } q_0=0.5);\\[2mm] \dfrac{-1.71H_0}{\omega+2} & (\text{当 } q_0=1);\\[2mm] \dfrac{-3.34H_0q_0^{1/2}}{\omega+2} & (\text{当 } q_0\gg 1),\end{cases}$$

式中 ω 是宇宙模型的无量纲常数(参看(5-276)式)，q_0 表示减速因子的现在值，以及

$$H_0=[0.98\times10^{10}h^{-1}]^{-1}\ \text{年}^{-1},$$

设 $H_0=100h$ 公里·秒$^{-1}$·兆秒差距$^{-1}$。内行星轨道的雷达测量给出(Shapiro 等, 1971)：

$$\left(\frac{\dot{G}}{G}\right)_0=+0\pm4\times10^{-10}\ \text{年}^{-1}。$$

范弗兰德恩(van Flandern, 1974)报告对太阳及月球轨道的观测表明 $(\dot{G}/G)_0=-1\times10^{-10}$ 年$^{-1}$。

5.7. 宇宙模型及其观测验证

5.7.1. 均匀及各向同性宇宙

哈勃等(Hubble, 1926; Hubble 和 Humason, 1931; 以及Shapley 和 Ames, 1932)观测到与各种总星等极限相应的星系总数直接随此极限代表的空间体积变化，并得出结论认为可观测到的物质的密度是常数。他们附带地观测到在天空中星云的分布是空间上各向同性的，由此导致的结论是宇宙空间里均匀地及各向同性地充满着物质。韦尔 (Weyl, 1923, 1930) 首先假设星系是在时空中一束短程线上，这束线在向过去的方向是会聚的，并证明线元由下式给出：

$$ds^2 = c^2 dt^2 + g_{ik} dx^i dx^k, \tag{5-284}$$

式中宇宙时间 t 度量一个跟随短程线的观测者的原时，i，$k=1$，2，3。随着非稳定宇宙(Lanczos, 1922, 1923)线元的第一次导出，证明了一个空间均匀及各向同性宇宙的线元的普遍形式由下式给出(Friedmann, 1922, 1924)：

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)\right], \tag{5-285}$$

式中曲率指数 $k=0$、± 1 及 $R(t)$ 称为宇宙曲率半径或宇宙尺度因子。对于某一个任意的基本观测者来说，r 坐标为零值，$r=$ 常数的面具有球面的几何形状，θ、φ 是极坐标。虽然这个度规是弗里德曼 (Friedmann, 1922, 1924) 首先应用于 $k=\pm 1$ 的情况，可是由于罗伯逊(Robertson, 1935, 1936) 和沃尔克 (Walker, 1936) (也可参看 Robertson, 1928, 1933) 的严格推导，故通常称为罗伯逊-沃尔克(Robertson-Walker)度规。

当罗伯逊-沃尔克 (Robertson-Walker) 度规与爱因斯坦场方程一起应用时，得出下列方程组(Lemaitre, 1927; Raychaudhuri, 1955, 1957)：

$$\frac{3\dot{R}^2}{R^2} + \frac{3kc^2}{R^2} = \kappa\rho c^2 + \Lambda c^2; \tag{5-286}$$

$$\frac{2\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{kc^2}{R^2} = -\kappa P + \Lambda c^2; \tag{5-287}$$

$$\frac{\ddot{R}}{R} = \frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{4\pi G}{3}\left[\rho + \frac{3P}{c^2}\right],$$

式中 $R=R(t)$ 是宇宙曲率半径或宇宙尺度因子，"·"表示对宇宙时间 t 的微分，爱因斯坦引力常数 $\kappa = 8\pi G/c^2 = {}^*1.866\times 10^{-27}$ 达因·克$^{-2}$·秒^2，$\rho(t)$ 是宇宙中的物质及能量的平均密度(ρc^2是能量密度)，$P(t)$ 是物质及辐射的各向同性的流体动压力，Λ 是宇宙学常数，而 k/R^2 是黎曼空间曲率。按照空间是封闭的、开放的或欧几里得的而把指数 k 取 $+1$、-1 或 0。根据罗伯逊等(Robertson, 1955; 以及 Hoyle 和 Sandage, 1956)的工作，通常以哈勃膨胀常数的现在值 H_0 和减速因子 q_0 的现在值表示定义不同的宇宙模型：

$$H_0 = \frac{\dot{R}_0}{R_0}; \tag{5-288}$$

$$q_0 = -\frac{\ddot{R}_0}{R_0 H_0^2} = -\frac{\ddot{R}_0 R_0}{\dot{R}_0^2} = \frac{-1}{H_0^2}\left[\frac{\Lambda c^2}{3} - 4\pi G\left(\frac{\rho_0}{3} + \frac{P_0}{c^2}\right)\right], \tag{5-289}$$

式中下标 0 用来表示现在历元，R_0 是 $R(t)$ 的现在值。图 44 示出 $\Lambda=0$ 及各种 q_0 值的各种膨胀宇宙的 $R(t)$ 曲线以及稳恒态宇宙和勒梅特-爱丁顿(Lemaitre-Eddington)宇宙的 $R(t)$ 曲线。把 H_0 及 q_0 与宇宙年龄 T_0 联系起来的公式在(5-83)式至(5-85)式中给出；而距离随 H_0 及 q_0 变化的函数的各种公式在(5-148)式至(5-152)式中给出。

观测证据(Peach, 1970)表明，宇宙常数 Λ 不是零就是小到 $\Lambda \leqslant 2\times 10^{-55}$ 厘米$^{-2}$。宇宙常数为零的各向同性、均匀宇宙通常称为弗里德曼宇宙，这是因为弗里德曼 (Friedmann, 1922, 1924)首先得出这种情况的解。对于宇宙常数为零的模型，ρ_0 为物质及辐射的密度的现在值，P_0 为宇宙压力的现在值以及 kc^2/R_0^2 为空间曲率的现在值，各参数之间的关系式如下：

$$\rho_0 + \frac{3P_0}{c^2} = \frac{3H_0^2 q_0}{4\pi G}, \tag{5-290}$$

$$\frac{kc^2}{R_0^2} = \frac{4\pi G}{3q_0}\left[\rho_0(2q_0 - 1) - \frac{3P_0}{c^2}\right], \tag{5-291}$$

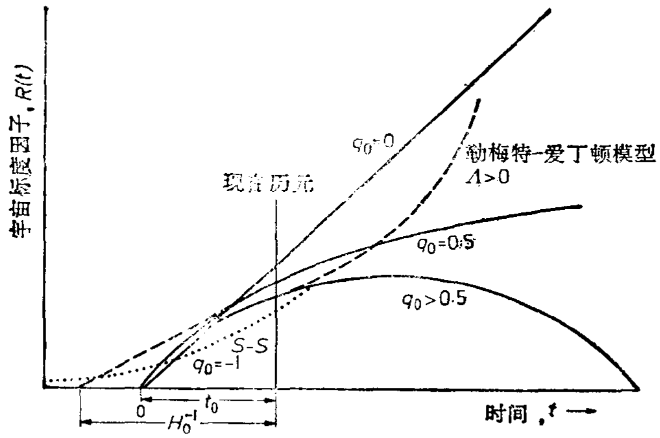


图 44 宇宙常数 $\Lambda=0$ 的三种大爆炸模型、$\Lambda>0$ 的广义勒梅特-爱丁顿模型及稳恒态模型的宇宙标度因子 $R(t)$。图中 q_0 为减速因子，H_0 为哈勃常数及 t_0 为"宇宙年龄"

若与 ρ_0 比较起来 P_0 的现在值是小的，则这些方程简化为：

$$\rho_0=\frac{3q_0H_0^2}{4\pi G}=^*3.758\times10^{-33}q_0H_0^2\text{ 克·厘米}^{-3},\tag{5-292}$$

式中在数值近似计算中 H_0 的单位是公里·秒$^{-1}$·兆秒差距$^{-1}$，1 兆秒差距$=^*3.0857\times10^{24}$ 厘米，以及

$$\frac{kc^2}{R_0^2}=H_0^2(2q_0-1)。\tag{5-293}$$

临界密度 ρ_c 由下式给出：

$$\rho_c=\frac{3H_0^2}{8\pi G}=^*1.879\times10^{-29}h^2\text{ 克·厘米}^{-3},\tag{5-294}$$

式中 $H_0=100h$ 公里·秒$^{-1}$·兆秒差距$^{-1}$，而 h 是一个常数。对于具有可忽略宇宙压力 $P_0=0$ 及零宇宙常数 $\Lambda=0$ 的模型宇宙，我们得出：

若 $k=1$ 则对于椭圆闭合空间及振动宇宙来说，$q_0>\frac{1}{2}$ 及 $\rho_0>\rho_c$；

若 $k=0$ 则对于平直的欧几里得空间及不断膨胀的爱因斯坦-德西特宇宙 (Einstein 和 de Sitter, 1932) 来说，$q_0=\frac{1}{2}$ 及 $\rho_0=\rho_c$；

若 $k=-1$ 则对于双曲开放空间及不断膨胀的米尔恩宇宙(Milne, 1935)来说，$\frac{1}{2}>q_0>0$ 及 $\rho_0<\rho_c$。

勒梅特(Lemaitre, 1927, 1931)提出一种具有正曲率 $k=1$ 但是具有下式给出的非零宇宙常数 Λ 的均匀的各向同性宇宙：

$$\Lambda=(1+\varepsilon)\Lambda_E,\tag{5-295}$$

式中 $0<\varepsilon\ll1$ 以及适合于静态爱因斯坦宇宙的宇宙常数 Λ_E 由下式给出(Einstein, 1917)：

$$\Lambda_E=\frac{\varkappa\rho}{2}=\frac{4\pi G\rho}{c^2}=\frac{1}{R^2},\tag{5-296}$$

式中对爱因斯坦宇宙来说，R 是一个常数。像爱因斯坦一样，勒梅特考虑压力 $P=0$，所以

$$\rho R^3=\frac{\alpha c^2}{4\pi G\sqrt{\lambda_E}}=\text{常数},\tag{5-297}$$

式中常数 α 是标明 ρR^3 值与爱因斯坦值之间相差的量。在勒梅特模型中，$R(t)$ 在 $t=0$ 时开

始按照 $t^{2/3}$ 膨胀，但终于缓慢下来并在 $R=\alpha^{1/3}/\sqrt{\Lambda_E}$ 处化费一些时间，在这一点上 R 是一个极小值。模型的这个性质已用来解释类星体红移为什么可能集中在 $z=2$ 附近 (Kardashev, 1967; Petrosian, Salpeter 和 Szekeres, 1967)。除了证明爱因斯坦静态宇宙是不稳定的以外，爱丁顿(Eddington, 1930)提出了勒梅特模型的一种极限情况。在这种勒梅特-爱丁顿宇宙中，$R(t)$ 从 $t=0$ 时的爱因斯坦值 $1/\sqrt{\Lambda_E}$ 渐近地膨胀到 $t=\infty$ 时的值：

$$R(t)=\exp[Ht]。\tag{5-298}$$

曲率半径的这个渐近值是 $\rho=P=0$, $k=1$ 及 $\Lambda=\Lambda_e$ 的德西特静态宇宙(de Sitter, 1917)的值。

为了检验勒梅特模型可以方便地定义无量纲的密度参数 σ，其现在值为：

$$\sigma_0=\frac{4\pi G\rho_0}{3H_0^2},\tag{5-299}$$

式中 ρ_0 是宇宙中物质及辐射现在的密度，H_0 是哈勃参数的现在值。对于具有可忽略的宇宙压力(即现在值 $P_0\approx 0$)的宇宙来说，宇宙常数由下式给出：

$$\Lambda=3H_0^2(\sigma_0-q_0),\tag{5-300}$$

以及空间曲率由下式给出：

$$\frac{kc^2}{R_0^2}=H_0^2(3\sigma_0-q_0-1),\tag{5-301}$$

式中 q_0 是减速因子的现在值，而压力项已忽略了。皮奇(Peach, 1970)得到极限为 2×10^{-55} 厘米$^{-2}\geqslant\Lambda\geqslant-2\times10^{-55}$ 厘米$^{-2}$。

对于所有基本的观测者在所有时间都观测到同样大尺度的宇宙这一特殊情况("完全宇宙论原则")，线元取稳态形式(Bondi 和 Gold, 1948; Hoyle, 1948)：

$$ds^2=c^2dt^2-\exp(2Ht)\,[dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\varphi^2)],\tag{5-302}$$

式中常数 H 是出现在德西特(de Sitter, 1917)静态宇宙中的值

$$H=\frac{\dot{R}}{R}=常数。\tag{5-303}$$

在此模型中，$k=0$, $q_0=-1$，空间是欧几里得的以及物质的密度是常数。

5.7.2. 红移-星等关系

正如第 5.2.6 节及第 5.3.6 节所讨论的，光学星系红移的观测支持线性关系式：

$$v=cz=\frac{c\Delta\lambda}{\lambda_0}=H_0D_L=c\left[\frac{R(t_0)}{R(t_1)}-1\right],\tag{5-304}$$

式中 v 是退行速度，$\Delta\lambda$ 是谱线波长的观测值与其实验值 λ_0 之差，常数 H_0 是哈勃参数 D_L 的现在值，D_L 是光度距离，$R(t)$ 是在时刻 t 的曲率半径，t_0 是观测时刻，而 t_1 是光从星系发射出的时刻。应用静态的德西特模型，韦尔(Weyl, 1923)首先预言速度对距离的线性相关；兰克佐斯(Lanczos, 1923)对非稳定 $k=+1$ 模型作了讨论；托尔曼(Tolman, 1930)给出了作为光度距离的函数；米尔恩(Milne, 1935)证明这是假定宇宙具有均匀性及各向同性的直接结果。第 5.2.6 节的图 35 给出观测到的红移-星等关系。

因为光度距离随减速因子 q_0 及红移 z 而定，从而视星等也是 q_0 及 z 的函数。对于具有非零宇宙常数的空间均匀及各向同性的宇宙来说，视热星等 $m_{热}$ 由下式给出 (Solheim, 1966)：

$$m_{热}=5\log R_0 s_k(\omega)(1+z)+M_{热}+25, \tag{5-305}$$

式中

$$s_k(\omega)=\sin\omega \quad (当\ k=1)$$
$$=\omega \quad (当\ k=0)$$
$$=\sinh\omega \quad (当\ k=-1),$$

即

$$\omega=\frac{c}{H_0R_0}\int_1^{1+z}[2\sigma_0v^3+(1+q_0-3\sigma_0)v^2+\sigma_0-q_0]^{-1/2}dv$$

及

$$\sigma_0=\frac{4\pi G\rho_0}{3H_0^2};$$

$M_{热}$是绝对热星等，ρ_0是物质的平均密度，H_0是哈勃常数。当宇宙常数$\Lambda=0$时，此关系式成为(Mattig, 1958, 1959)：

$$m_{热}=5\log\frac{c}{H_0q_0^2}\{q_0z+(q_0-1)[(1+2q_0z)^{1/2}-1]\}+M_{热}+25 \quad (当\ q_0>0), \tag{5-306}$$

此关系式展开成z的幂级数给出下式(Heckmann, 1942)：

$$m_{热}=5\log\left(\frac{cz}{H_0}\right)+1.086(1-q_0)z+\cdots+M_{热}+25\ 星等, \tag{5-307}$$

式中H_0的单位是公里·秒$^{-1}$·兆秒差距，cz的单位是公里·秒$^{-1}$。对于稳恒态模型，我们得到：

$$m_{热}=5\log\left[\frac{cz}{H_0}(1+z)\right]+M_{热}+25。 \tag{5-308}$$

热距离模数$m_{热}-M_{热}$与观测到的距离模数$m-M$的关系为：

$$m_{热}-M_{热}=m-M-K-A, \tag{5-309}$$

式中K改正是由于观测到的星系能量曲线的红移，A改正是由于星际吸收。K改正由下式给出：

$$K=2.5\log(1+z)+2.5\log\frac{\int_0^\infty I(\lambda)s(\lambda)\,d\lambda}{\int_0^\infty I\left(\frac{\lambda}{1+z}\right)s(\lambda)d\lambda}\ 星等, \tag{5-310}$$

式中第一项是由于在星系的静止参考系中光度计通频带的变窄通过因子$(1+z)$而引起的，第二项是由于下列事实：观测者在波长λ接收到的辐射是星系在波长$\lambda/(1+z)$发射的。这里$I(\lambda)$是在波长λ观测到的每单位波长的入射能通量，已作吸收改正，$s(\lambda)$是光度计响应函数。哈勃(Hubble, 1936)假定$I(\lambda)$是一个黑体辐射体的辐射而首先算出K改正值，赫马森等(Humason, Mayall 和 Sandage, 1956)利用斯特宾斯等(Stebbins 和 Whitford, 1948)观测到的z相关强度谱首先给出了观测改正值。奥开等(Oke 和 Sandage, 1968; Schild 和 Oke, 1971; Whitford, 1971; 以及 Oke, 1971)已观测到椭圆巨星系的强度分布$I(\lambda)$。在这些论文中已用表列出对蓝区B、目视区V及红区R的K改正值K_B、K_V及K_R随红移z变化的函数。对于目视星等V及蓝星等B，吸收项由下式给出(Sandage, 1968)：

$$A_B=0.18(\operatorname{cosec}b^{II}-1)+0.25=A_V+0.25\approx0.25\operatorname{cosec}b^{II}\ 星等, \tag{5-311}$$

式中b^{II}是银纬。

H_0的值随距离尺度而定(参看第5.3节)。不同的观测者应用不同的距离估计出的测量值为：

$$\left.\begin{array}{ll} H_0 \approx 530\ 公里\cdot秒^{-1}\cdot兆秒差距^{-1} & (\text{Hubble, 1929}); \\ H_0 \approx 100\ 公里\cdot秒^{-1}\cdot兆秒差距^{-1} & (\text{Baade 和 Swope, 1955}); \\ H_0 = 98 \pm 15\ 公里\cdot秒^{-1}\cdot兆秒差距^{-1} & (\text{Sandage, 1962}); \\ H_0 \lesssim 75\ 公里\cdot秒^{-1}\cdot兆秒差距^{-1} & (\text{Sandage, 1968}); \\ H_0 \approx 50\ 公里\cdot秒^{-1}\cdot兆秒差距^{-1} & (\text{Sandage, 1971})。 \end{array}\right\} \quad (5\text{-}312)$$

q_0 的值随观测到的红移-星等曲线与线性的偏离而定。把观测到的曲线图与(5-306)式中给定不同的 q_0 值而确定的曲线族作比较得出：

$$\left.\begin{array}{ll} q_0 = 2.6 \pm 0.8 & (\text{Humason, Mayall 和 Sandage, 1956}); \\ q_0 = 1.0 \pm 0.5 & (\text{Baum, 1961}); \\ q_0 = 1.5 \pm 0.4 & (\text{Peach, 1970}); \\ q_0 = 0.65^{+0.5}_{-0.3} & (\text{Sandage, 1971}); \\ q_0 = 0.03 \pm 0.4 & (\text{Peach, 1972})。 \end{array}\right\} \quad (5\text{-}313)$$

第 5.2.6 节的图 35 示出观测到的红移-星等关系[1]。

5.7.3. 角直径-红移关系

线直径为 l 及红移为 z 的一个球形源具有的视角径 θ 由下式给出：

$$\theta = \frac{l(1+z)^2}{D_L} = \frac{lH_0}{c} \frac{q_0^2(1+z)^2}{\{q_0 z + (q_0 - 1)[(1+2q_0 z)^{1/2} - 1]\}}, \quad (5\text{-}314)$$

它适用于具有零宇宙常数的均匀的各向同性的宇宙，式中 D_L 为光度距离，H_0 为哈勃常数，q_0 为减速因子。在给定的 z，对于 $q_0 = 0$，最小的角度 $\theta_{\min}$ 由下式给出：

$$\theta_{\min} = \frac{lH_0}{c} \frac{(1+z)^2}{z + z^2/2}。 \quad (5\text{-}315)$$

对稳恒态宇宙来说

$$\theta = \frac{lH_0}{c}\left(1 + \frac{1}{z}\right)。 \quad (5\text{-}316)$$

设河外天体具有某种标准线性大小，则角直径及红移的观测能有助于确定正确的宇宙模型。例如，对于稳恒态宇宙来说，θ 将随 z 的增加而减小到一个最小常数值，而对于爱因斯坦-德西特宇宙($q_0 = 0.5$)来说，θ 将随 z 的增加而减小到一个最小值，然后 θ 又随 z 的继续增加而增加。在过去，因为测量光学星系直径时的严重误差而没有应用过这种检验。鲍姆(Baum, 1972)已引入一种技术，从而可以在观测星系团时消去光学及大气效应。图 45

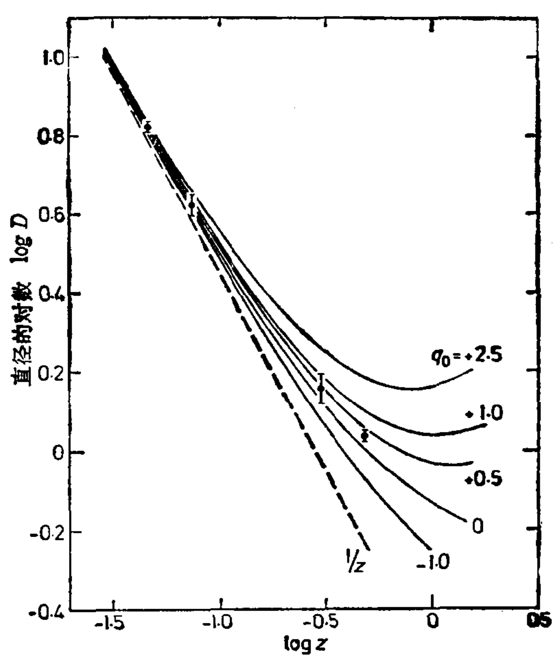


图 45 直径-红移数据与宇宙模型的比较。每一个星系团在图中用一个点表示。误差线表示标准误差，这是根据各个星系团的点的弥散得出的。$q_0 = -1.0$ 的曲线代表稳恒态模型，在 $q_0 = 0$ 与 $q_0 = +0.5$ 之间的范围内代表大爆炸模型的开放宇宙情况，而 q_0 大于 $+0.5$ 的值代表大爆炸模型的闭合宇宙情况(取自 Baum, 1972 的文章)

1) 对 H_0 和 q_0 值的最新讨论参见 Proc. IAU Symp. No. 63 (Krakov, 1973) 和 Proc. IAU Symp. No. 79 (Tallinn, 1977)。

示出他对四个星系团得出的结果，这些结果表明 $q_0 \approx 0.3$。米利 (Miley, 1971) 用类星射电源及射电星系的射电子源的最大角距制作了一幅视直径-红移曲线图。此图表明角直径随红移增加而减小，并表明在射电星系及类星射电源的角大小-红移特性之间存在明显的连续性。他发现对于线大小在 200 至 500 千秒差距的情况，$q_0 < 0.5$。

5.7.4. 光学星系及射电源的计数

哈勃 (Hubble, 1936) 首先证明，依次增大视星等的光学星系计数有助于证明宇宙在大尺度上是均匀的及各向同性的。设星系是均匀分布的并且具有相同的绝对光度 L，则视能通量大于 f 的星系数目 $N(>f)$ 由下式给出：

$$N(>f) = \frac{4\pi}{3} D_L^3 n = \frac{4\pi}{3} n\left(\frac{L}{4\pi f}\right)^{3/2} \propto f^{-3/2}, \tag{5-317}$$

式中 n 是星系的数密度，观测到的能通量 f 由下式给出：

$$f = \frac{L}{4\pi D_L^2} \text{ 尔格·厘米}^{-2}\text{·秒}^{-1}, \tag{5-318}$$

式中 D_L 是光度距离。沙普利等 (Shapley 和 Ames, 1932; 以及 Hubble, 1934, 1936) 发现直到极限星等 $m_{pg} = 20.7$ 或 $m_V = 19.8$，光学星系计数与 (5-317) 式大致符合。

除了表明星系的分布在大尺度上是均匀的以外，计数可以得出对宇宙模型的检验。对于宇宙常数为零、均匀的及各向同性的膨胀宇宙来说，亮于视星等 m 的星系数由下式给出 (Mattig, 1959; Sandage, 1962)，当 $k = -1$ 时，

$$\begin{aligned} N(m) &= \frac{2\pi n}{H_0^3}(1-2q_0)^{-3/2}[p(1+p^2)^{1/2} - \sinh^{-1} p] \\ &\approx \frac{-2\pi n}{H_0^3}(2q_0-1)^{-3/2}\left[\frac{2p^3}{3} - \frac{p^5}{5} + \frac{12}{112}p^7 + \cdots\right]; \end{aligned} \tag{5-319}$$

当 $k = +1$ 时，

$$\begin{aligned} N(m) &= \frac{2\pi n}{H_0^3}(2q_0-1)^{-3/2}[\sin^{-1} p - p(1-p^2)^{1/2}] \\ &\approx \frac{2\pi n}{H_0^3}(2q_0-1)^{-3/2}\left[\frac{2p^3}{3} + \frac{p^5}{5} + \frac{12}{112}p^7 + \cdots\right], \end{aligned} \tag{5-320}$$

这里 k 是曲率常数，n 是星系的数密度，H_0 是哈勃常数，q_0 是减速因子，我们已假定所有星系具有相同的绝对光度 L，而参数 p 由下式给出：

$$p = \frac{A[k(2q-1)]^{1/2}}{q_0(1+A) - (q_0-1)(1+2A)^{1/2}},$$

式中

$$A = 10^{0.2(m_R - K_R - C)},$$

m_R 是红区的视星等，K_R 是通过接收滤光片使能量分布曲线红移的 K 改正值，并由 (5-310) 式的最后部分给出 (参看 Oke, 1971)，以及当星系的绝对星等为 M 时，

$$C = M + 25 + 5\log\left(\frac{c}{H_0}\right)。$$

在欧几里得情况，其中 $K = 0$，我们得到：

$$N(m) = \frac{4\pi n A^3}{3H_0^3}\left\{\frac{1}{2}[1 + A + (1+2A)^{1/2}]\right\}^{-3}, \tag{5-321}$$

而在稳恒态模型，我们得到 (Bondi 和 Gold, 1948)：

$$N(m) \propto \left[\ln(1+z) - \frac{z(2+3z)}{2(1+z)^2}\right], \tag{5-322}$$

式中 z 是红移，z 与视星等m的关系为：

$$m = 5\log z + 5\log(1+z) + M + 25 + 5\log\left(\frac{c}{H_0}\right)。\tag{5-323}$$

遗憾得很，对于 q_0 在 0 与 1 之间的小范围来说，当观测低至 $m_R=22$ 的情况，观测到的 $N(m)$之差小于或然观测误差[1]。

不过射电源计数可以比光学观测者可资利用的资料提供大得多的红移取样，射电源的统计分析揭示在角大小大于几角分的情况下没有各向异性（参看 Shakeshaft 等，1955; Leslie, 1961; Holden, 1966; Hughes 和 Longair, 1967）。为了与不同的宇宙模型作比较，在频率 ν_0 上测出的流量密度 $S(\nu_0)$ 是与在频率 $\nu=(1+z)\nu_0$ 上发射的部分能谱 $I(\nu)$ 联系起来的，其中 z 是红移。对于一个频谱指数为 α 的射电源，我们得出 $I(\nu)\propto\nu^{-\alpha}$ 以及

$$S(\nu_0) = \frac{LI(\nu_0)}{4\pi D_L^2}(1+z)^{1-\alpha}\ \text{尔格·厘米}^{-2}\text{·秒}^{-1}\text{·赫}^{-1}\text{·球面度}^{-1},\tag{5-324}$$

式中 L 是源的绝对光度，D_L 是它的光度距离，$I(\nu)$是归一化的，所以 $\int_{-\infty}^{+\infty}I(\nu)d\nu=1$。波林奈-托思等(Pauliny-Toth, Kellermann 和 Davis, 1972) 已证明，在 178 兆赫上，流量密度低到 0.25 流量单位（1 流量单位$=10^{-26}$ 瓦·米$^{-2}$·赫$^{-1}$$=10^{-23}$ 尔格·秒$^{-1}$·厘米$^{-2}$·赫$^{-1}$·球面度$^{-1}$）的平均频谱指数 $\alpha=0.82$。

在射电源计数中实际观测到的是每球面度内流量密度大于 S 的射电源的数目 $N(>S)$。因为半径为 r 的球的体积是 $4\pi r^3/3$，若源是均匀分布的，则在这样一个球内的源的数目是正比于 r^3 的。设所有的源具有相同的固有光度，则从球心可看见的最暗源的流量 S 正比于 r^{-2}。由此可见，在不发生演化的各向同性的、静态的、欧几里得宇宙中，每球面度内流量密度大于 S 的源的数目 $N_0(>S)$ 是：

$$N_0(>S) = \frac{n_0 P_0^{3/2}}{3}S^{-3/2}\propto S^{-3/2},\tag{5-325}$$

式中 n_0 是源的平均数密度，P_0 是在所考虑的频率上这些源的平均亮度。有时用光度函数 $\rho(P)$，所以

$$N_0(>S) = \frac{S^{-3/2}}{3}\int P^{3/2}\rho(P)dP。\tag{5-326}$$

然后把计数资料用对数坐标画出，把观测到的斜率与静态的欧几里得宇宙所期望的斜率 -1.5 作比较。早期对射电源的累积计数(Ryle 和 Clarke, 1961)表明强射电源的对数斜率约为 -1.8。测量到的更暗的流量电平(Ryle, 1968)则表明 $\log N(>S)$-$\log S$ 图中的斜率在约 0.01 央时逐渐变平到 -0.8。观测到的陡的斜率表明有过多的弱射电源，并表示需要一种正在演化的宇宙，在这种宇宙中在过去有更亮及更多的射电源(Longair, 1966)。霍伊尔 (Hoyle, 1968) 论证观测到的数据可以解释为强射电源的局部不足。因为在积分计数中得到的数据一般说来并不独立，最好的信息是用微分曲线图得到的(Crawford, Jauncey 和 Murdoch, 1970)。当这样做后就会发现，只要排除很强的源，在每球面度 5 至 5000 个源的情况，源数-流量关系曲线的斜率是近于欧几里得值 -1.5 的 (Kellermann, Davis 和 Pauliny-Toth; 1970)。而且在 1400 兆赫的微分计数表明源数-流量密度关系的指数只在很低的源密度时才大于 1.5(Bridle 等, 1972)，这成为射电源计数对检验宇宙模型的能力的反证。

1) 最近利用 6 米望远镜观测，以星系计数证明存在可观的演化效应(Kopylov 和 Karachentsev, 1978)。

虽然如此，我们还是在此给出射电源计数与非演化宇宙模型的关系的公式。罗伯逊-沃尔克(Robertson-Walker)度规可以写成下列形式(Scheuer, 1974; Longair, 1971):

$$ds^2=dt^2-\frac{R^2(t)}{c^2}\left[dr^2+\left(\frac{\sin Ar}{A}\right)^2\ (d\theta^2+\sin^2\theta\, d\varphi^2)\right], \tag{5-327}$$

式中 r 是径向共动距离坐标，A^2 是世界模型的曲率，常数 A 与哈勃常数 H_0 及减速因子 q_0 的关系式为:

$$A^2=\frac{1}{c^2}\left[H_0^2\left(\frac{\rho_0}{\rho_c}-1\right)+\frac{\Lambda c^2}{3}\right] \tag{5-328}$$

以及

$$q_0=\frac{\rho_0}{2\rho_c}-\frac{\Lambda c^2}{3H_0^2}, \tag{5-329}$$

式中 c 是光速，ρ_0 是物质及辐射密度的现在值，ρ_c 是(5-294)式给出的临界密度，Λ 是宇宙常数。光度距离 D_L 由下式给出:

$$D_L=\left(\frac{\sin Ar}{A}\right)(1+z)。 \tag{5-330}$$

在(5-149)式中，光度距离是用 H_0 及 q_0 表示的。每球面度内流量密度大于 S 的射电源数目 $N(>S)$ 由下式给出:

$$\frac{N(>S)}{N_0(>S)}=\frac{3}{4}\left[\frac{2Ar-\sin 2Ar}{(\sin Ar)^3(1+z)^{3(1+\alpha)/2}}\right], \tag{5-331}$$

其中 $N_0(>S)$ 是(5-325)式或(5-326)式给出的静态欧几里得宇宙的 $N(S)$ 值，α 是被计数的源的平均频谱指数。对于宇宙常数 $\Lambda=0$ 的宇宙模型来说，(5-331)式可以用下列关系式估计:

$$A=(2q_0-1)^{1/2}H_0/c;$$
$$\sin Ar=AD_L/(1+z),$$

式中光度距离 D_L 由(5-149)式给出。

对于稳恒态宇宙学，我们得出:

$$\frac{N(>S)}{N_0(>S)}=\frac{3}{z^3(1+z)^{3(1+\alpha)/2}}\int_0^z\frac{z^2\,dz}{1+z}, \tag{5-332}$$

在所有 $\alpha>-2.5$[1] 时，上式是 z 的递减函数。

5.8. 大质量天体、引力坍缩及黑洞

为了说明射电星系及类星射电源的巨大的光度 $L\approx10^{42}$ 尔格·秒$^{-1}$，霍伊尔等(Hoyle 和 Fowler, 1963) 提出大质量天体可能发射大量能量。当存在足够的熵足以支持恒星对抗转动力时，一个近乎球形的天体就形成了，我们得出关系式(Eddington, 1926):

$$\left.\begin{aligned}P_r&=\frac{1}{3}aT^4;\\ P_g&=\rho RT/\mu;\\ 1-\beta&=0.00298\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^2(\mu\beta)^4\\ \text{或}\quad \beta&=\frac{P_g}{P}\approx\frac{4.28}{\mu}\left(\frac{M_\odot}{M}\right)^{1/2}\ll1,\end{aligned}\right\} \tag{5-333}$$

式中 M 是恒星质量，太阳质量 $M_\odot=$*1.9891×10^{33} 克，总压力 $P=P_r+P_g$，P_r 是辐射压

1) 原文为 $\alpha-2.5$，有误。——译者注

力，P_g 是气体压力，辐射常数 $a=$*7.565660×10⁻¹⁵ 尔格·厘米⁻³·开⁻⁴，T 是气体温度，ρ 是气体质量密度，气体常数 $R=$*8.31441×10⁷ 尔格·开⁻¹·摩尔⁻¹，μ 是平均分子量。辐射压力是主要的，对于指数 $n=3$ 的多方球来说，光度由下式给出(Hoyle 和 Fowler, 1963)：

$$L=\frac{4\pi cGM(1-\beta)}{\varkappa}=\frac{6.9\times10^4}{(1+x_{\rm H})}\frac{M}{M_\odot}L_\odot\approx\frac{2.51\times10^{38}}{(1+x_{\rm H})}\frac{M}{M_\odot}\text{ 尔格·秒}^{-1},\tag{5-334}$$

式中已假定温度足够高，所以不透明度 $\varkappa$ 是由于靠近表面的电子散射引起，$\varkappa=0.198(1+x_{\rm H})$ 厘米²·克⁻¹，$x_{\rm H}$ 是氢的质量百分比，太阳光度 $L_\odot=$*3.826×10³³ 尔格·秒⁻¹，太阳质量 $M_\odot=$*1.9891×10³³ 克。半径 R、压力 P、密度 ρ、有效表面温度 T_e 及结合能 E_B 由下式给出(Hoyle 和 Fowler, 1963; Fowler, 1966; Wagoner, 1969)[1]

$$\left.\begin{aligned}
&R=\frac{5.8\times10^9}{(T_9)_c}\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{1/2}\text{ 厘米;}\\
&P\approx\frac{1}{3}aT^4=3.85\times10^{14}\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{2/3}\rho^{4/3}\text{ 尔格·厘米}^{-3};\\
&\rho=1.3\times10^5\left(\frac{M_\odot}{M}\right)^{1/2}T_9^3\text{ 克·厘米}^{-3}\\
&T_e=\frac{3.19\times10^5}{(1+x_{\rm H})^{1/4}}(T_9)_c^{1/2}\text{ 开;}\\
&E_B=-(M-M_0)c^2=Mc^2\left[\frac{3\beta x}{8}+1.265x^2(f-1)\right],
\end{aligned}\right\}\tag{5-335}$$

式中引力参数

$$x=\frac{2GM}{Rc^2}=5.04\times10^{-5}\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{1/2}(T_9)_c,\tag{5-336}$$

M_0 是静止质量，$(T_9)_c$ 是中心温度 T_c 除以 10^9，常数 f 是转动能量与"广义相对论性"能量之比：

$$f=\frac{0.0989}{K^2}\left(\frac{cJ}{GM^2}\right)^2,\tag{5-337}$$

式中常数 K 随角速度 ω 的分布而定(当 $\omega=$ 常数时，KR 是回转半径，当 ω 为小值时，$K^2=0.0755$)，J 是角动量(当 ω 是常数时，$J=K^2M\omega R^2$)。在大质量恒星圆周上的自转周期 P_R 由下式给出：

$$P_R\approx\frac{\pi KR^2c}{GM(2f)^{1/2}}=2.2\times10^{-23}R^2(M_\odot/M)\text{ 年}=7.5\times10^{14}T_c^{-2}\text{ 年。}\tag{5-338}$$

对于 $f\geqslant1$ 的情况，直到天体开始损失动能而仍能保持其动力学稳定以前，结合能是增加的，只要核反应没有开始，寿命 τ 由下式给出：

$$\tau=\frac{E_B}{L}\approx2.3\times10^8(1+x_{\rm H})\frac{E_B}{Mc^2}\text{ 年},\tag{5-339}$$

若中心温度升到足以开始氢燃烧，则靠静止质量的减少足以提供 $0.007Mc^2$ 的能量，由此给出的年龄 $\tau\approx10^6$ 年。

当没有足够的熵用以支持天体抗衡转动力时，一个高度扁形的旋转盘就形成了。天体能够获得相对论性速度，广义相对论方程就变得重要了。在此情况，结合能由下式给出(Bardeen 和 Wagoner, 1969)：

---

1 对特大质量天体的性质和它们与在活动星系和类星体中能源问题的关系的综述参见奥泽诺伊 (Ozernoy, 1976) 的文章。

$$E_B = M_0 c^2 \left[\frac{z_c}{1+z_c} - \frac{2\,\omega J}{M_0 c^2} \right], \tag{5-340}$$

式中 z_c 是从天体中心发射的光子的红移，M_0 是静止质量，c 是光速，ω 是角速度，J 是角动量。巴丁等(Bardeen 和 Wagoner, 1971; 以及 Scharlemann 和 Wagoner, 1972)给出了薄的均匀旋转相对论性圆盘的进一步的公式。

正如朗道(Landau, 1932)首先提出并为张德拉塞卡(Chandrasekhar, 1935)所严格计算了的，对于包含重子数为太阳的重子数的两倍以上的恒星，在热核演化的终点不存在平衡态。巴德等(Baade 和 Zwicky, 1934)假设不稳定的、正在收缩的恒星抛射质量以形成一颗超新星，伯比奇等(Burbidge, Burbidge, Fowler 和 Hoyle, 1957; Hoyle 和 Fowler, 1960; Colgate 和 White, 1966; May 和 White, 1966; Arnett, 1966, 1967 和 1968; 以及 Arnett 和 Cameron, 1967) 已计算了有关爆聚以及随后的爆发的详细情况。设爆发以后的剩余质量 M 大于下式给出的张德拉塞卡极限 M_c:

$$M_c = \left(\frac{2}{\mu_e}\right)^2 1.4587\, M_\odot, \tag{5-341}$$

它将坍缩形成一颗中子星。若质量大于中子星的上限$(2\sim3)\,M_\odot$，则坍缩一定继续到形成一个闭合的陷获面，没有电磁信号能逸出这样一个黑洞。这里 μ_e 是电子的平均分子量，氢的 $\mu_e=2$，太阳质量 $M_\odot = {}^*1.9891\times10^{33}$ 克。对于无自转的指数为 3 的一个多方球的平衡状态，一个自持天体的半径 R 也必须大于下式给出的临界半径 R_c(Oppenheimer 和 Volkoff, 1939; Chandrasekhar, 1964)：

$$R_c = \frac{6.74}{\beta} R_g \approx 3.4\times10^5 \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{3/2} \text{厘米}, \tag{5-342}$$

这里 $R_g = 2GM/c^2$ 是史瓦西半径，采用 $\mu=0.73$，即按质量计算 50% 为氢、47% 为氦及 3% 为重元素所组成的混合物，据此估计了 β 值。对于指数 $n=3$ 的一个大质量的多方球，这个半径相应着一个临界温度 T_c，在此温度以上开始发生收缩不稳定性，

$$T_c \approx 1.7\times10^{13} \left(\frac{M_\odot}{M}\right) \text{开}。 \tag{5-343}$$

当考虑到自转时，为了保持指数为 3 的多方球的自转稳定性，最小临界半径及最大温度为(Fowler, 1966)：

$$R_c \approx 1.5\times10^6 \frac{f}{K^2} \left(\frac{M}{M_\odot}\right) \frac{GM}{\omega^2 R^3} \text{厘米}; \tag{5-344}$$

$$T_c \approx 3.9\times10^{12} \frac{K^2}{f} \left(\frac{M_\odot}{M}\right)^{1/2} \frac{R^3\omega^2}{GM} \text{开}, \tag{5-345}$$

式中 ω 是自转速度，自转参数 f 及 K 由(5-337)式确定。

奥本海默等(Oppenheimer 和 Snyder, 1939)首先分析了坍缩星的光学表现，并证明天体在时间 τ 以内坍缩到一个奇点，

$$\tau = \left(\frac{3\pi}{32\,G\rho_0}\right)^{1/2} \approx \frac{GM}{c^3} \approx 10^{-5} \left(\frac{M}{M_\odot}\right) \text{秒}, \tag{5-346}$$

式中 ρ_0 是在坍缩前的起始恒星密度，半径已取为史瓦西半径 $R_g = 2GM/c^2$。一个遥远的观测者将看到光度按时间常数 τ 指数地衰减，而到达该处的光子也将以同样的时间常数按指数地增加其红移。我们将看到在无限长的时间内坍缩到无限大的红移并且坍缩到史瓦西半

径。当自转及极向磁场两者都包括在一颗坍缩星的牛顿流体动力学过程中时，有可能(Leblanc 和 Wilson, 1970) 将引力能转换成自转能及磁能，最终导致形成类似于在许多强射电源中观测到的双喷射物质流。

在一颗坍缩着的、无自转球状恒星的表面之外的区域，相应的度规是(5–270)式给出的史瓦西度规。不过，正如勒梅特(Lemaitre, 1933)所首先认识到的，在史瓦西半径 R_g 处史瓦西度规的奇点特性不是物理上的而是由于坐标的选择所致。爱丁顿 (Eddington, 1924) 首先建立了一个在 R_g 处无奇点的度规，但是用克鲁斯卡耳–泽基尔斯 (Kruskal, 1960; Szekeres, 1960) 度规就得到更简单的表达式。他们独立地作了坐标变换：

$$\left.\begin{aligned} u&=\left(\frac{r}{R_g}-1\right)^{1/2}e^{r/(2R_g)}\cosh\left(\frac{ct}{2R_g}\right)\\ v&=\left(\frac{r}{R_g}-1\right)^{1/2}e^{r/(2R_g)}\sinh\left(\frac{ct}{2R_g}\right)\end{aligned}\right\}\quad(\text{当 } r>R_g);$$

$$\left.\begin{aligned} u&=\left(1-\frac{r}{R_g}\right)^{1/2}e^{r/(2R_g)}\sinh\left(\frac{ct}{2R_g}\right)\\ v&=\left(1-\frac{r}{R_g}\right)^{1/2}e^{r/(2R_g)}\cosh\left(\frac{ct}{2R_g}\right)\end{aligned}\right\}\quad(\text{当 } r<R_g)。\tag{5–347}$$

由此从史瓦西度规可得到下列度规：

$$ds^2=\frac{4R_g^3}{r}e^{-r/R_g}(du^2-dv^2)+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\varphi^2)。\tag{5–348}$$

这里我们有：
$$R_g=\frac{2GM}{c^2}$$

以及

$$u^2-v^2=\left(\frac{r}{R_g}-1\right)e^{r/R_g},\tag{5–349}$$

所以在 $r=0$ 处的物理上的奇点位于 $u^2-v^2=-1$ 处。

更普遍地说，一个黑洞可能是自转的或带电的或者两者都存在。当只考虑自转时，度规成为克尔(Kerr, 1963)给出的克尔度规。纽曼等(Newman 等, 1965)考虑了电荷，而博耶和林奎斯特(Boyer 和 Lindquist, 1967)引入广义坐标求得下列度规：

$$ds^2=-\frac{\Delta}{\Sigma}[dt-a\sin^2\theta\, d\varphi]^2+\frac{\sin^2\theta}{\Sigma}[(r^2+a^2)d\varphi-a\,dt]^2+\frac{\Sigma}{\Delta}dr^2+\Sigma\, d\theta^2,\tag{5–350}$$

式中
$$\Delta=r^2-2Mr+a^2+Q^2;$$
$$\Sigma=r^2+a^2\cos^2\theta$$

以及
$$a=J/M.$$

相应的电磁场张量由下式给出：

$$\begin{aligned}\overline{F}&=\frac{Q}{\Sigma^2}(r^2-a^2\cos^2\theta)\overline{dr}\wedge[\overline{dt}-a\sin^2\theta\,\overline{d\varphi}]\\&\quad+\frac{2Q}{\Sigma^2}\cos^{-1}\theta\sin\theta\,\overline{d\theta}\wedge[(r^2+a^2)\overline{d\varphi}-a\,\overline{dt}],\end{aligned}\tag{5–351}$$

式中分量 F_{ij} 是 $\overline{dx^i}\wedge\overline{dx^j}=-\overline{dx^j}\wedge\overline{dx^i}$ 的系数。这里 M 是质量，Q 是电荷，J 是角动量，并且已经用了几何单位。在几何单位中，牛顿引力常数 G、光速 c 及玻耳兹曼常数 k 都取为1。为了转换到物理单位，应用下列关系式(参看 Misner, Thorne 和 Wheeler, 1973)：

$$
\left.\begin{array}{ll}
\text{长度} & l_{\text{几何}}=l_{\text{物理}}; \\
\text{时间} & t_{\text{几何}}=ct_{\text{物理}}={}^*2.99792458\times10^{10}\,t_{\text{物理}}; \\
\text{速度} & v_{\text{几何}}=\dfrac{v_{\text{物理}}}{c}={}^*0.33356410\times10^{-10}\,v_{\text{物理}}; \\
\text{质量} & M_{\text{几何}}=\dfrac{G}{c^2}M_{\text{物理}}={}^*0.7424\times10^{-28}\,M_{\text{物理}}; \\
\text{角动量} & J_{\text{几何}}=\dfrac{G}{c^3}J_{\text{物理}}={}^*0.2476\times10^{-38}\,\omega_{\text{物理}}R^2{}_{\text{物理}}M_{\text{物理}}; \\
\text{能量} & E_{\text{几何}}=\dfrac{G}{c^4}E_{\text{物理}}={}^*0.8260\times10^{-49}\,E_{\text{物理}}; \\
\text{温度} & T_{\text{几何}}=\dfrac{Gk}{c^4}T_{\text{物理}}=1.140\times10^{-65}\,T_{\text{物理}}; \\
\text{磁场} & H_{\text{几何}}=\dfrac{c^2}{G^{1/2}}H_{\text{物理}}={}^*3.479\times10^{24}\,H_{\text{物理}}; \\
\text{熵} & S_{\text{几何}}=\dfrac{S_{\text{物理}}}{k}={}^*7.204267\times10^{15}\,S_{\text{物理}}; \\
\text{光度} & L_{\text{几何}}=\dfrac{G}{c^5}L_{\text{物理}}={}^*2.755\times10^{-60}\,L_{\text{物理}}; \\
\text{角动量/单位质量} & a_{\text{几何}}=\dfrac{a_{\text{物理}}}{c}={}^*0.33356410\times10^{-10}\,a_{\text{物理}}; \\
\text{电荷} & Q_{\text{几何}}=\dfrac{\sqrt{G}}{c^2}Q_{\text{物理}}=2.874\times10^{-25}\,Q_{\text{物理}},
\end{array}\right\} \tag{5-352}
$$

式中下标几何及物理分别表示在几何单位表示中以厘米、物理单位或以厘米·克·秒单位为单位所给出的量。

静态极限 r_0 确定一个表面，在此表面上及在此表面内一个观测者不能保持静止而必须在与黑洞自转相同的方向绕黑洞作轨道运动。此极限由下式给出：

$$r=r_0=M+(M^2-Q^2-a^2\cos^2\theta)^{1/2}。\tag{5-353}$$

视界 r_+ 确定一个表面，在此表面上及在此表面内一个观测者不能与外部传达信息。此视界由下式给出：

$$r=r_+=M+(M^2-Q^2-a^2)^{1/2}。\tag{5-354}$$

这里 r_0 及 r_+ 是用几何单位给出的。粒子及光子能够通过视界向内降落，但是没有什么物质及辐射能够通过视界向外发出。能层是在视界与静态极限之间的时空区。

以博耶-林奎斯特(Boyer-Lindquist)坐标及几何单位表示的克尔度规由下式给出：

$$
\begin{aligned}
ds^2=&-\left(1-\frac{2Mr}{\Sigma}\right)dt^2-\left(4Mar\frac{\sin^2\theta}{\Sigma}\right)dt\,d\varphi\\
&+\frac{\Sigma}{\Delta}dr^2+\Sigma\,d\theta^2+\left(r^2+a^2+2M_a^2r\frac{\sin^2\theta}{\Sigma}\right)\sin^2\theta\,d\varphi^2。
\end{aligned}\tag{5-355}
$$

在(5-350)式中取 $Q=0$ 就给出这里的 Δ、Σ 及 a；当 $a=0$ 时，(5-355)式简化为史瓦西度规。巴丁等(Bardeen、Press 和 Teukolsky，1972)给出了环绕一个克尔黑洞的圆形轨道的详尽特性。最内层的稳定轨道的坐标半径由下式给出：

$$r=r_{ms}=\text{右式最外面的根：}\ r^2-6Mr\pm8aM^{1/2}r^{1/2}-3a^2=0。\tag{5-356}$$

当 $a=0$ 时，我们得到 $r_{ms}=6M$；当 $a=M$ 时，我们得到 $r_{ms}=M$ 或 $9M$。最里面的稳定轨道是最大束缚轨道。最大束缚轨道的结合能的变化范围从

$$
\left.\begin{aligned}
&\left(1-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)mc^2 \quad [\text{对史瓦西度规}(a=0)]; \\
\text{至}\quad &\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)mc^2 \quad [\text{对极端克尔度规}(a=m)],
\end{aligned}\right\} \tag{5-357}
$$

式中 m 是作轨道运动粒子的静质量。

黑洞的变化过程受下列各定理及定律的支配(例如参看 Misner, Thorne 和 Wheeler, 1973):

1) 比尔科夫(Birkhoff, 1923)定理　一个是真空中爱因斯坦场方程的解的给定时空区的任何球对称几何,必定是一种史瓦西几何。也就是说,在空虚的空间中的球对称引力场一定是具有史瓦西度规的静态场(角动量为零)。

2) 伊斯雷尔 (Isreal, 1967, 1968) 定理　具有球面拓扑的视界的任何一个静态黑洞的外部场唯一地由其质量 M 及电荷 Q 所决定,而且那些外部场若 $Q=0$ 则就是史瓦西解;若 $Q\neq 0$ 则是赖斯纳-诺德斯特龙(Reissner-Nordstrom)解。霍金(Hawking)已经证明一个稳定的黑洞一定具有球面拓扑的视界,而且它必定或者是静态的或者是轴对称的,或者两者都是。赖斯纳(Reissner, 1916)-诺德斯特龙(Nordstrom, 1918)度规由下式给出:

$$
ds^2=-\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)dt^2+\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1}dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\varphi^2), \tag{5-358}
$$

而电场 E 由下式给出:

$$
E=\frac{Q}{r^2}, \tag{5-359}
$$

式中 Q 是电荷。这里已应用几何单位。

3) 彭罗斯 (Penrose, 1969) 定理　用适当方法把物质注入克尔-纽曼(Kerr-Newman)黑洞就能从黑洞取出能量。也就是说,当某种粒子穿行黑洞的场的时候,它们就可以通过黑洞自转能量的损失而获得能量。

4) 卡特(Carter, 1971)定理　具有球面拓扑视界的所有不带电的、稳定的、轴对称黑洞将归入相互不可变的不相交的一些族中。每一族的黑洞具有由两个参数——质量 M 及角动量 J 所唯一地确定的外部引力场。现在已知的唯一的这种族是克尔度规族。

5) 黑洞遵守热力学第一定律——总能量是守恒的。总动量、角动量及电荷也是守恒的。

6) 黑洞动力学的霍金(Hawking, 1972)第二定律　对于包括黑洞的任何过程,包括所有黑洞的视界的表面积总和 A 是永远不能减少的。一个克尔-纽曼 (Kerr-Newman) 黑洞的视界的表面积 A 由下式给出:

$$
A=8\pi[M^2+M(M^2-a^2-Q^2)^{1/2}-Q^2/2]. \tag{5-360}
$$

对于克尔黑洞,A 成为:

$$
A=8\pi[M^2+(M^4-J^2)^{1/2}], \tag{5-361}
$$

这里对质量 M、角动量 J 及 $a=J/M$ 也已应用了几何单位。

5.9. 引力辐射

根据爱因斯坦场方程,直接得出任何非球形的动力学变化系统一定产生引力波。这些波在它们的源中产生辐射-反作用力,并且这些力从源中取出能量,其速率与引力波带走能量

的速率是相同的。波从光速 c 带走能量，所以能通量是 c 与能量密度的乘积。就象电磁波那样，引力波的振幅随距离成反比地减小，而通量则随行进距离的平方成反比地减小。

对于低速运动、弱引力场系统，在给定方向（单位矢量 n_j）发出的通量 F 由下式给出 (Landau 和 Lifshitz, 1962; Zeldovich 和 Novikov, 1971; Press 和 Thorne, 1972)：

$$F=\frac{1}{8\pi D^2}\frac{G}{c^5}\sum_{j,k}\langle(\dddot{I}^{TT}_{jk})^2\rangle_{推迟}, \tag{5-362}$$

式中[1]"$\cdots$"表示对时间的三阶导数，而

$$I^{TT}_{jk}=\sum_{l,m}(\delta_{jl}-n_j n_l)I_{lm}(\delta_{mk}-n_m n_k), \tag{5-363}$$

式中 δ_{ij} 是克罗内克 δ 函数，n_j 是在 j 方向的单位矢量，缩减四极矩张量 I_{jk} 由下式给出：

$$I_{jk}=\int\rho x_j x_k d^3x-\frac{1}{3}\delta_{jk}\int\rho D^2 d^3x, \tag{5-364}$$

式中 ρ 是质量密度。

所谓缓慢运动的弱引力场系统，是其半径 R 及内部速度 v 满足下列不等式的系统：

$$\left.\begin{aligned}&R\gg\frac{GM}{c^2};\\&v\ll c,\end{aligned}\right\} \tag{5-365}$$

式中 M 是系统质量，$2GM/c^2$ 是史瓦西半径，c 是光速。以四极引力波形式辐射的总光度 L 由下式给出：

$$L=\frac{1}{5}\frac{G}{c^5}\sum_{j,k}\langle(\dddot{I}_{jk})^2\rangle\approx L_0\left(\frac{2GM_{有效}}{c^2R}\right)^2\left(\frac{R}{\lambda}\right)^6, \tag{5-366}$$

式中 $M_{有效}$ 是有效质量，由此振幅改变是 $I_{jk}=M_{有效}R^2$，波长 $\lambda=cR/v$，而天然光度单位 L_0 由下式给出：

$$L_0=\frac{c^5}{G}=3.63\times10^{59}\ 尔格\cdot秒^{-1}=2.03\times10^5 M_\odot c^2\ 秒^{-1}, \tag{5-367}$$

式中 $M_\odot={}^*1.9891\times10^{33}$ 克是太阳质量。对于双星系统，若 P 为轨道周期，a 为半长径，折合质量 $\mu=M_1M_2/(M_1+M_2)$，其中 M_1 及 M_2 是两颗子星的质量，总质量 $M=M_1+M_2$，则引力波光度由下式给出 (Peters 和 Mathews, 1963)：

$$\begin{aligned}L&=\frac{32}{5}\frac{G^5}{c^{10}}\frac{\mu^2M^3}{a^5}L_0f(e)\\&\approx3.0\times10^{33}\ 尔格\cdot秒^{-1}\left(\frac{\mu}{M_\odot}\right)^2\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{4/3}\left(\frac{P}{1小时}\right)^{-10/3}f(e),\end{aligned} \tag{5-368}$$

式中

$$f(e)=\frac{1+\frac{73}{24}e^2+\frac{37}{96}e^4}{(1-e^2)^{7/2}},$$

以及 e 是轨道偏心率。辐射是以轨道频率的两倍为基频而发射的，并且随着 e 的增加而增加谐波。如果引力辐射是改变轨道周期的主要力量，并设轨道是近乎圆形的，则有：

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt}=-\frac{96}{5}\frac{G^3}{c^5}\frac{\mu M^2}{a^4}=\left(\frac{1}{2.8\times10^7年}\right)\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{2/3}\left(\frac{\mu}{M_\odot}\right)\left(\frac{1小时}{P}\right)^{8/3}。 \tag{5-369}$$

对于具有转动惯量为 $I=2MR^2/5$，质量为 M，半径为 R，自转周期为 P 及椭率为 ε 的一颗略微形变的均匀的中子星，引力波光度是 (Ostriker 和 Gunn, 1969)：

---

1) 原文此句为"是克罗内克 δ 函数，n_j 是在 j 方向的单位矢量"，应删去。——译者注

$$L=\frac{32}{5}\frac{G}{c^5}I^2\varepsilon^2\left(\frac{2\pi}{P}\right)^6$$

$$\approx 10^{38}\text{尔格·秒}^{-1}\left(\frac{I}{4\times10^{44}\text{克·厘米}^2}\right)^2\left(\frac{P}{0.033\text{秒}}\right)^{-6}\left(\frac{\varepsilon}{10^{-3}}\right)^2。\quad(5\text{-}370)$$

在它诞生以后的时间 t,

$$L\approx 10^{45}\text{尔格·秒}^{-1}\left(\frac{4\times10^{44}\text{克·厘米}^2}{I}\right)^{1/2}\left(\frac{10^{-3}}{\varepsilon}\right)\left(\frac{10^6\text{秒}}{t+10^4\text{秒}}\right)^{3/2}。\quad(5\text{-}371)$$

普雷斯等(Press 和 Thorne, 1972)综述了可能存在引力辐射的其他的源。

作用在质量 M 上的引力波力由下式给出:

$$F=-M\nabla\varphi=-\sum_j\sum_k M\,R_{j0k0}\,x_k,\quad(5\text{-}372)$$

式中 φ 是引力波的等效牛顿引力势,而黎曼曲率张量的分量 R_{j0k0} 由下式给出:

$$R_{j0k0}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j\,\partial x_k}=-\frac{G}{c^4D}\left[\frac{d^4I_{jk}^{TT}}{dt^4}\right]_{\text{推迟}},\quad(5\text{-}373)$$

式中 D 是源的距离,I_{jk}^{TT} 由(5-363)式给出。当一个引力波作用在相隔距离为 l 的一对自由的或者几乎自由的质量上时,就会产生距离的改变 Δl 如下:

$$\frac{\Delta l}{l}=h(t)=[h_+^2(t)+h_\times^2(t)]^{1/2},\quad(5\text{-}374)$$

式中 $h(t)$ 是无量纲场强,h_+ 及 $h_\times$ 是度规张量 g_{ik} 中微扰的大小。对于共振型引力波探测器来说,位移是在一个弹性固体的两端点之间,而且

$$\frac{\Delta l}{l}\approx\pi\,\nu_0\,h(\nu_0),\quad(5\text{-}375)$$

式中 ν_0 是共振频率,$h(\nu_0)$ 是 $h(t)$ 的傅里叶变换在 ν_0 处的值。

引力波流量 F 由下式给出:

$$F=\frac{c^3}{16\pi G}\langle[\dot h(t)]^2\rangle\text{尔格·厘米}^{-2}\text{·秒}^{-1},\quad(5\text{-}376)$$

式中〈 〉表示对几个波长的平均值,"·"表示对时间的微分。以(5-376)式对时间求积分并应用帕西瓦尔(Parseval)定理,我们得到一次爆发的总能量为:

$$E=4\pi\,\frac{c^3D^2}{16\pi G}\int_{-\infty}^{+\infty}(2\pi\nu)^2h^2(\nu)\,d\nu,\quad(5\text{-}377)$$

式中 D 是源的距离,我们假定源各向同性地辐射,$h(\nu)$ 是 $h(t)$ 的傅里叶变换。设在共振频率 ν_0 以外,引力波具有平坦频谱,一个共振探测器给出下列极限:

$$E\gtrsim\frac{c^3}{4G}\left(\frac{2\Delta l}{l}\right)^2\nu_0D^2\text{尔格}\gtrsim 5.6\times10^{-17}\left(\frac{2\Delta l}{l}\right)^2\nu_0D^2(M_\odot c^2)\text{尔格},\quad(5\text{-}378)$$

式中太阳质量 $M_\odot=^*1.9891\times10^{33}$ 克。

韦伯(Weber, 1960)首创引力波辐射的探测方案并且自从 1969 年以来就已报告探测到引力波辐射的爆发(参看 Weber, 1970)。当一次典型爆发时,对于具有共振频率 $\nu_0=1661$ 赫及长度 $l=153$ 厘米的铝圆柱体来说,$\Delta l\approx5\times10^{-15}$ 厘米。假定一个各向同性辐射体位于距离 D 处,(5-378)式表明韦伯接收到的引力波能量等效于下式给出的质量 M 的蜕变:

$$M\approx 0.5M_\odot\left(\frac{D}{10\text{千秒差距}}\right)^2,\quad(5\text{-}379)$$

这里 D 是源的距离,单位是千秒差距,10 千秒差距是到银心的距离。韦伯每天大约探测到三个事件,所以一个在银心的源所发出的能量就应等于每年损耗约 $500\,M_\odot$ 的质量。若考

虑到韦伯探测器的效率，并设辐射体是非各向同性的，则每年可能发出的引力波能量多达 $10^3 \sim 10^5 M_{\odot} c^2$。不过，莱文等 (Levine 和 Garwin, 1973) 应用一个类似于韦伯的探测器并没有接收到引力波事件，这表示韦伯探测到的事件或者不是引力波产生的或者这种波在 1973 年时不存在类似的次数和强度。普雷斯等(Press 和 Thorne, 1972)从已知的天文现象例如双星、中子星及超新星，评述了将来对引力波源探测的前景。

5.10. 背景辐射、氦合成、星系际气体及星系的形成

现在观测到的物质及辐射的平均密度值为(参看图 29)：

$$\left.\begin{aligned}
&\rho_G \approx 4\times10^{-31}h^2\ \text{克·厘米}^{-3} \approx 10^{-31}\ \text{克·厘米}^{-3} \approx 10^{-10}\ \text{尔格·厘米}^{-3};\\
&\rho_B \approx 5\times10^{-34}\ \text{克·厘米}^{-3} \approx 4.8\times10^{-13}\ \text{尔格·厘米}^{-3};\\
&\rho_S \approx 10^{-34}\ \text{克·厘米}^{-3} \approx 10^{-13}\ \text{尔格·厘米}^{-3};\\
&\rho_{GS} \approx 10^{-35}\ \text{克·厘米}^{-3} \approx 10^{-14}\ \text{尔格·厘米}^{-3};\\
&\rho_X \approx 10^{-37}\ \text{克·厘米}^{-3} \approx 10^{-16}\ \text{尔格·厘米}^{-3};\\
&\rho_R \approx 10^{-40}\ \text{克·厘米}^{-3} \approx 10^{-19}\ \text{尔格·厘米}^{-3},
\end{aligned}\right\} \tag{5-380}$$

其中 ρ_G 表示星系中的物质密度，带有下标 B、S、GS、X 及 R 的 ρ 分别表示背景辐射的、光学可见星光的、星系形成的光学背景的、X 射线背景的及射电波背景的辐射能量密度。这样，在现在我们有：

$$\rho = \Omega\rho_c = \Omega\,\frac{3H_0^2}{c^2 k} = 1.9\times10^{-29}\Omega h^2\ \text{克·厘米}^{-3}, \tag{5-381}$$

式中

$$\Omega_{\text{辐射}} \approx 10^{-8}\,\Omega_{\text{星系}} \approx 10^{-5},$$

这里 $H_0 = 100h$ 公里·秒$^{-1}$·兆秒差距$^{-1}$ 是哈勃常数，爱因斯坦引力常数 $\varkappa = 8\pi G/c^2 =$ *1.866×10^{-27} 达因·克$^{-2}$·秒^2。使宇宙闭合所需的临界密度 ρ_c 由下式给出：

$$\rho_c = 1.9\times10^{-29}h^2\ \text{克·厘米}^{-3}。$$

选取 $H_0 = 50$ 公里·秒$^{-1}$·兆秒差距$^{-1}$ 或 $h = 0.5$，此临界密度相当于：

质量密度	$\rho_c = 4.7\times10^{-30}$ 克·厘米$^{-3}$,
粒子密度	$N_p = 2.8\times10^{-6}$ 厘米$^{-3}$;
氢密度(He/H = 0.1)	$N_{HI} = 2.0\times10^{-6}$ 厘米$^{-3}$;
氦密度	$N_{He} = 2.0\times10^{-7}$ 厘米$^{-3}$;
电子密度——完全电离	$N_e = 2.4\times10^{-6}$ 厘米$^{-3}$;
加权离子密度	$\Sigma N_i Z_i^2 = 2.8\times10^{-6}$ 厘米$^{-3}$;
轫致辐射参数	$\Sigma N_e N_i Z_i^2 = 6.8\times10^{-12}$ 厘米$^{-6}$。

由此清楚地表明观测到的物质远比辐射为多，我们现在正处于物质为主的时代，这样，爱因斯坦场方程中的压力项就可以忽略不计。因而现在物质的平均密度由下式给出：

$$\rho_{m0} = \frac{3q_0 H_0^2}{4\pi G} = \frac{3q_0 kc^2}{4\pi G R_0^2(2q_0-1)} = {}^*3.758\times10^{-29} q_0 h^2\ \text{克·厘米}^{-3}, \tag{5-382}$$

式中曲率常数 $k = \pm1.0$，R_0 是标度因子 $R(t)$ 的现代值，q_0 是减速因子的现代值。在以物质为主的宇宙中物质密度 $\rho_m(t)$、辐射能量密度 $\rho_r(t)$ 及辐射温度 $T_r(t)$ 表现为 (Einstein, 1917; Tolman, 1934)：

$$\left.\begin{aligned}
\rho_m(t) &\propto [R(t)]^{-3};\\
\rho_r(t) &\propto [R(t)]^{-4};\\
T_r(t) &\propto [R(t)]^{-1},
\end{aligned}\right\} \tag{5-383}$$

式中当 $k=0$ 的情况，标度因子由下式给出：

$$R(t) \propto t^{2/3} \propto (1+z)^{-1}。\tag{5-384}$$

这里 t 是从宇宙起源算起的时间，红移 z 相当于历元 t 的值。

由(5-383)式及(5-384)式可知，宇宙在过去是一个密度大的热的火球，盖莫夫(Gamow, 1946) 指出这个原始火球的残迹可能作为背景辐射的一部分而被观测到。彭齐阿斯等(Penzias 和 Wilson, 1965)发现在 3 厘米波长上背景辐射相当的亮温度为 2.7 开，这远强于由较低频段其他类型辐射的测量值外推所预料的值。迪克 (Dicke 等, 1965) 很快指出新型辐射可能是盖莫夫火球的遗迹。因为当火球形成时辐射及物质是处于热平衡状态，辐射应该具有黑体频谱并且在所有时间都保持如此。这样一种频谱已在微波背景辐射中发现了，且已在图 46 中示出。对背景辐射的测量的详尽参考文献可在朗盖尔等(Longair, 1971; Peebles, 1971)的文章或温伯格(Weinberg, 1972)的书中找到。

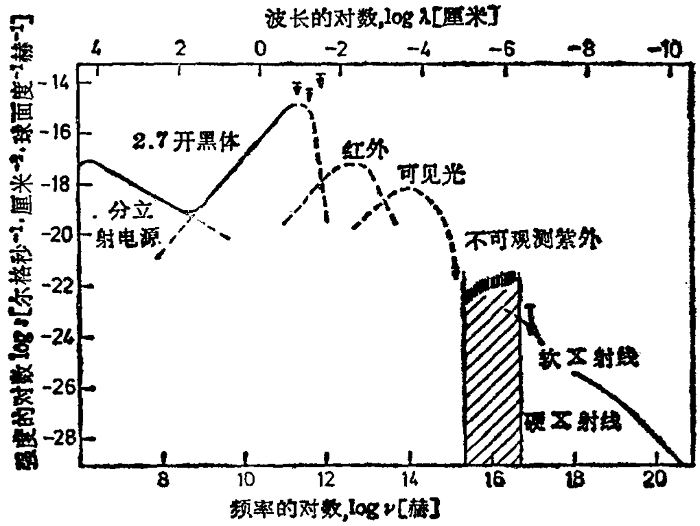


图 46 在频率范围 $10^6 \sim 10^{21}$ 赫以内各向同性背景辐射的频谱(取自 Longair 和 Sunyaev, 1969 的文章)。图中实线表示已被测量到的各向同性背景的波段，而虚线是理论估计值

在康克林等(Conklin 和 Bracewell, 1967; 以及 Wilkinson 和 Partridge, 1967)的开拓性观测之后，已发现在所有角大小大于 1 角分的情况，在 0.1% 的观测精度内，微波背景辐射是各向同性的(参看 Longair, 1971)[1]。而且贾科尼等(Giacconi 等, 1962)发现各向同性的 X 射线背景辐射在所有角大小大于 15 度的情况，在 3% 的观测精度内是各向同性的(Schwartz, 1970)。这些观测为罗伯逊-沃尔克 (Robertson-Walker) 或勒梅特(Lemaître)度规提供附加的支持。事实上，埃勒斯等(Ehlers, Geren 和 Sachs, 1968)已证明，若背景的各向同性是精确无误的，则宇宙严格地是罗伯逊-沃尔克 (Robertson-Walker) 宇宙。不过背景辐射的发现并未导致对宇宙学模型作太多的检验，而只是增进了我们对宇宙可能是如何进行物理演化这一问题的理解。例如，盖莫夫(Gamow, 1946)指出，在遥远的过去，宇宙是以辐射为主的，以及(参看 Tolman, 1934)

1) 最近在 33 京赫 (波长 0.9 厘米) 上对宇宙黑体辐射的各向异性的测量所显示的各向异性可以用地球相对于背景辐射以 390±60 公里·秒$^{-1}$ 的速度运动来解释(Smoot 等, 1977)。除了此分量以外，宇宙黑体辐射在 1/3000 的精度内是各向同性的。

$$\left.\begin{aligned}T_r(t)&=2.7(1+Z)\propto[R(t)]^{-1};\\ \rho_r(t)&=aT_r^4(t)\propto[R(t)]^{-4};\\ \rho_m(t)&\propto[R(t)]^{-3},\end{aligned}\right\}\tag{5-385}$$

式中我们已给定 T_r 的现代值是 2.7 开，辐射常数

$$a^{1)}=\frac{8\pi^5k^4}{15c^3h^3}={}^*7.565660\times10^{-15}\text{ 尔格·厘米}^{-3}\text{·开}^{-4}。$$

标度因子 $R(t)$ 由下式给出：

$$R(t)\propto t^{1/2}\propto(1+z)^{-1};\tag{5-386}$$

以及 P_r、ρ_r 及 T_r 分别表示辐射压力、密度及温度。当我们注意到在时刻 t_0 的下列现代值：

$$\left.\begin{aligned}\rho_r(t)&=\rho_{r0}=4.4\times10^{-34}\text{ 克·厘米}^{-3};\\ T_r(t)&=T_{r0}=2.7\text{ 开}。\end{aligned}\right.\tag{5-387}$$

由(5-382)式及(5-383)式可知，在下式给出的临界温度 T_{rc} 时，物质及辐射能量密度相等：

$$T_{rc}=\frac{\rho_{m0}}{\rho_{r0}}T_{r0}\approx2.3\times10^5q_0h^2\text{ 开},\tag{5-388}$$

这相当于下式给出的红移 z_c：

$$z_c=\frac{T_{rc}}{T_{r0}}-1\approx10^5q_0h^2,\tag{5-389}$$

以及临界时间 t_c 由下式给出：

$$t_c=\left(\frac{T_{r0}}{T_{rc}}\right)^2t_0\approx10^{-10.5}q_0^{-2}h^{-4}t_0。\tag{5-390}$$

由(5-286)式及(5-385)式进一步得出：

$$t_c\approx\left[\frac{c^2}{32\pi GaT_c^4}\right]^{1/2}\approx5\times10^2q_0^{-2}h^{-4}\text{ 年}。\tag{5-391}$$

在时间 t_c 以后，膨胀遵守(5-383)式及(5-384)式，而在时间 t_c 以前，膨胀遵守(5-385)式及(5-386)式。

盖莫夫(Gamow, 1946)提出，设元素是在原始火球中形成的，那就能够解释现在元素的丰度，而且阿尔弗等(Alpher、Bethe 和 Gamow, 1948; Alpher 和 Herman, 1948, 1950; 以及 Alpher, Follin 和 Herman, 1953)已作出详尽考虑。正如第四章中描述的，恒星核合成足以解释重元素的丰度，而氢、氦以及或许还有某些轻元素可能是在宇宙早期阶段产生的。例如，霍伊尔等(Hoyle 和 Tayler, 1964)指出，由观测到的银河系光度可推知在银河系的寿命以内恒星内部只有 2% 或 3% 的氢能够由核聚变转换成氦。然而，在恒星大气及内部、行星状星云、新星、星际介质以及河外星系系统中所测出的氦丰度，都表明高度均匀的氦丰度按质量计算约为 25%(Danziger, 1970)。根据盖莫夫(Gamow, 1948)对氦的原始形成的论证，我们从(5-391)式得出膨胀时间为：

$$t=\left(\frac{c^2}{32\pi GaT^4}\right)^{1/2}\approx10^{20}T^{-2}\text{ 秒}。\tag{5-392}$$

在高温时，宇宙是处于热平衡状态的，并且含有光子、中微子、反中微子、电子及正电子。当宇宙冷却时，在约 10^{12} 开时 μ 子将首先湮没，然后电子及正电子将湮没而形成中子及质子。中子及质子直到下列时间为止将与其他粒子处于平衡状态：

$$t\gtrsim\tau\approx10^{30}T^{-5}\text{ 秒},\tag{5-393}$$

1) 原文误为 $a=8\pi^2k^4/(15c^3h^3)$。——译者注

式中 τ 是弱相互作用时间尺度。由(5-392)式，在此时刻我们得出 $T\approx10^{10}$ 开，而中子-质子比值由平衡值粗略给出：

$$\frac{N_n}{N_p}=\exp\left(-\frac{\Delta mc^2}{kT}\right)=0.22, \tag{5-394}$$

式中 Δm 是中子与质子的质量差，N_n 及 N_p 分别表示中子及质子的数密度。中子与质子将相互作用以形成氘核，氘核在后来将引起氦的合成。最后大多数中子消耗了，每一对中子给出一个氦核，而丰度比可望是：

$$\frac{N(\mathrm{He}^4)}{N(\mathrm{He}^4)+N(\mathrm{H})}=0.36, \tag{5-395}$$

式中 $N(\mathrm{He}^4)$ 及 $N(\mathrm{H})$ 分别表示氦及氢的数密度。设所有其他重元素的质量百分数是 $Z=2\%$，则可得出氦的质量百分数 $Y\approx28\%$。包括许多可能的原始核反应的详细计算给出类似的 Y 值(参看 Hoyle 和 Tayler, 1964; Peeblos, 1966; Wagoner, Fowler 和 Hoyle, 1967; 以及图 27)。

在宇宙的过去历史中另一个关键点是临界时间 t_r，此时温度已降低到足以使氢复合。有关温度是 4000 开，由(5-392)式可知(参看 Peebles, 1968)：

$$t_r\approx10^{13}\ 秒\approx10^5\ 年, \tag{5-396}$$

此时 $z\approx1500$。在此时刻 t_r 后，宇宙成为透明的，而物质的运动不受黑体辐射的影响。在 t_r 以前，星系可能已形成了，在 t_r 时间内，通过电子对光子的康普顿散射，物质与辐射一定已经强烈地相互作用了。不过，难于想象有一种形成星系的过程它足以有效地使所有物质都凝聚成星系。不过已假设，星系际氢气体以下列密度存在着：

$$\rho_{星系际氢}=\Omega\,\rho_c\approx10^{-5}\,\Omega h^2\ 粒子数\cdot厘米^{-3}, \tag{5-397}$$

式中
$$q_0=\frac{1}{2}\,\Omega\left(1+\frac{3P_0}{\rho_0c^2}\right)\approx\frac{\Omega}{2}$$

以及
$$\rho_c=1.9\times10^{-29}\,h^2\ 克\cdot厘米^{-3},$$

式中 $H_0=100h$ 公里·秒$^{-1}$·兆秒差距$^{-1}$。宇宙闭合所需的临界质量密度值 ρ_c 根据(5-381)式对氢、氦及电子给出。第二章中已讨论过探测星系际中性氢的方法，我们得出下列极限，根据 21 厘米发射研究(Penzias 和 Wilson, 1969)得出：

$$\Omega_{\mathrm{HI}}\leqslant0.4h^{-1}\quad 或\quad N_{\mathrm{HI}}\leqslant5\times10^{-6}\,h\ 厘米^{-3}。 \tag{5-398}$$

根据 21 厘米吸收研究(Penzias 和 Scott, 1968)得出：

$$\Omega_{\mathrm{HI}}\leqslant2.7\times10^{-3}T_sh^{-1}\quad 或\quad N_{\mathrm{HI}}\leqslant3\times10^{-8}T_sh\ 厘米^{-3}, \tag{5-399}$$

式中按照凯勒(Koehler, 1966) $3<T_s<30$(参看 Field, 1959, 1962; 以及 Peebles, 1971; 对 T_s 的讨论)，在低于红移了的赖曼 α 线(在 $\lambda=1216$ 埃)区域，类星射电源的连续辐射没有被吸收(Shklovskii, 1964; Scheuer, 1965; Gunn 和 Peterson, 1965)，根据这一点得出：当 $z\geqslant2$ 时，

$$\Omega_{\mathrm{HI}}\leqslant4\times10^{-7}h^{-1}\quad 或\quad N_{\mathrm{HI}}\leqslant4.7\times10^{-12}h\ 厘米^{-3}。 \tag{5-400}$$

还有，对于分子氢(Field, Solomon 和 Wampler, 1966)得出：

$$\Omega_{\mathrm{HII}}\leqslant7\times10^{-4}h^{-1}\quad 或\quad N_{\mathrm{HII}}\leqslant4\times10^{-9}h\ 厘米^{-3}\quad (当\ z\geqslant2\ 时)。 \tag{5-401}$$

所有这些检验表明，如果存在星系际氢气的话，很可能几乎百分之百都电离了。正如第四章中所讨论的，软 X 射线背景可能就是由于这样一种气体的轫致辐射引起的(参看 Field 和 Henry, 1964; Weymann, 1966, 1967; Bowyer, Field 和 Mack, 1968; Henry 等, 1968;

Bergeron, 1969)。设 $\Omega_{星系际气}\approx 1$ 以及软 X 射线背景起源于红移为 z 的远处，则我们得出温度极限：

$$T_{星系际气}(z)\leqslant 10^6(1+z)\text{开}, \tag{5-402}$$

式中 $T_0=10^6$ 开认为是在 $z=0$ 处的温度。高温星系际气体的轫致辐射所用到的详尽公式可以在上面所给出的参考文献中找到，也可以在皮布尔斯等 (Peebles, 1971; Weinberg, 1972; Field, 1972; 以及 Scheuer, 1974) 的文章及书中找到。

在充满截面为 $\sigma_a(\nu)$ 的吸收介质的罗伯逊-沃尔克 (Robertson-Walker) 宇宙中，在频率 ν_1 处发射的辐射及在频率 ν_0 处接收到的辐射，若要在频率 ν_a 处受到吸收，其条件为：

$$\nu_0<\nu_a<\nu_1;$$

$$I_a=\frac{1}{\nu_a}\int\sigma_a(\nu)d\nu\approx\frac{\sigma(\nu_a)}{\nu_a}。 \tag{5-403}$$

在接收频率 ν_0 处，光学深度 $\tau(\nu_0)$ 由下式给出：

$$\begin{aligned}\tau(\nu_0)&=\frac{\nu_0 N(t_a)}{\nu_a H_0}I_a\left[1-2q_0+2q_0\frac{\nu_a}{\nu_0}\right]^{-1/2}\left[1-\exp\left(-\frac{h\nu_a}{kT(t_a)}\right)\right]\\&\approx\frac{N(t_0)\sigma(\nu_a)}{H_0\nu_a}\frac{(1+z)^2}{(1+2q_0z)^{1/2}}\left[1-\exp\left(-\frac{h\nu_a}{k(1+z)T(t_0)}\right)\right]\\&\quad(\text{当 }\nu_a(1+z)^{-1}\leqslant\nu_0\leqslant\nu_a\text{ 式中 }z=(\nu_1/\nu_0)-1),\\&\approx 0\quad(\text{当 }\nu_0>\nu_a\text{ 以及 }\nu_0<\nu_a(1+z)^{-1})。\end{aligned} \tag{5-404}$$

这里，在时间 t 的吸收原子数密度 $N(t)$ 与现代的数密度 $N(t_0)$ 之间的关系式为：

$$N(t)=N(t_0)\left[\frac{\nu}{\nu_0}\right]^3=N(t_0)[1+z]^3, \tag{5-405}$$

式中 z 是相应于频率 ν 的红移。类似地，温度 $T(t)$ 由下式给出：

$$T(t)=T(t_0)\left[\frac{\nu}{\nu_0}\right]=T(t_0)[1+z]。 \tag{5-406}$$

氢密度的现代值 $N(t_0)$ 与临界密度 ρ_c 及参数 Ω 的关系式为：

$$N(t_0)=\frac{\Omega\rho_c}{m_H}=\frac{3\Omega H_0^2}{8\pi G m_H}\approx 2\times10^{-6}\Omega\left(\frac{H_0}{50\text{ 公里·秒}^{-1}\text{·兆秒差距}^{-1}}\right)^2, \tag{5-407}$$

式中 $\Omega=2q_0$。预期在频率范围 $\nu_a(1+z)^{-1}\leqslant\nu_0\leqslant\nu_a$ 中存在的吸收谷的测量，即可估计在 (5-399) 式及 (5-400) 式中所给出的 $N(t_0)$。

设星系际介质是电离的，则由于在红移 z 处一个源来的辐射的汤姆孙散射，光学深度 $\tau(z)$ 由下式给出 (Bahcall 和 Salpeter, 1965; Bahcall 和 May, 1968; Rees, 1969)：

$$\tau(z)=\frac{\sigma_T c N_{e0}}{3H_0q_0^2}\{(3q_0+q_0z-1)(1+2q_0z)^{1/2}-(3q_0-1)\}, \tag{5-408}$$

式中 $q_0=\Omega/2\neq 0$ 以及当 $q_0=0$ 时，

$$\tau(z)=\frac{\sigma_T c N_{e0}}{2H_0}(1+z)^2。$$

这里汤姆孙散射截面 $\sigma_T={}^*6.652448\times10^{-25}$ 厘米^2，N_{e0} 是由 (5-407) 式给出的电子密度，$\tau(z)$ 中的系数由下式给出：

$$\frac{H_0\sigma_T c}{4\pi G m_H q_0}=\frac{\sigma_T c N_{e0}}{3H_0q_0^2}\approx\frac{0.035}{q_0}\left(\frac{H_0}{75\text{ 公里·秒}^{-1}\text{·兆秒差距}^{-1}}\right)。 \tag{5-409}$$

一种电离的星系际介质就象散射一样会延迟信号，而由于频率为 ν_0 的信号的星系际色散，延迟值 Δt 由下式给出 (Haddock 和 Sciama, 1965; Weinberg, 1972)：

$$\Delta t=\frac{[\nu_p(t_0)]^2}{2q_0\nu_0^2 H_0}\{[1+2q_0z]^{1/2}-1\}\approx10^{20}\frac{1}{\nu_0^2}\{(1+z)^{1/2}-1\}\text{秒}\quad(\text{当 }\Omega=1),\tag{5-410}$$

式中 z 是源的红移，$\Omega=2q_0$，这里等离子体频率 $\nu_p(t_0)$ 的现代值由下式给出：

$$\nu_p(t_0)=\left[\frac{e^2N_e(t_0)}{\pi m_e}\right]^{1/2}={}^*8.976785\times10^3[N_e(t_0)]^{1/2}\text{ 赫},\tag{5-411}$$

式中 $N_e(t_0)$ 是电子密度的现代值，单位是厘米$^{-3}$，并由(5-407)式给出。

在低的射电频段上，星系际气体的自由-自由吸收可能是重要的，若回到红移 z 处，电子温度 T_e 是常数，则光学深度 $\tau(z)$ 由下式给出(Scheuer, 1974; Longair, 1971)：

$$\tau(z)=\frac{2\tau_0}{\Omega^3}\left[(1+\Omega z)^{1/2}\left\{\frac{1}{5}(1+\Omega z)^2+\frac{2}{3}(\Omega-1)(1+\Omega z)+(\Omega-1)^2\right\}\right.$$
$$\left.-\Omega^2+\frac{4}{3}\Omega-\frac{8}{15}\right],\tag{5-412}$$

式中
$$\tau_0=2\times10^{11}\left(\frac{\Omega}{\nu}\right)^2\left(\frac{T_e}{10^4}\right)^{-3/2},$$

以及 $\Omega\simeq2q_0$。对于大的红移值，$\tau(z)$ 随 $(1+z)^{5/2}$ 而变。舒尔(Scheuer, 1974)给出稳恒态宇宙、绝热膨胀宇宙及等温膨胀宇宙中由于轫致辐射所引起的光学深度及温度的类似公式。

牛顿(Newton, 1692)在他同本特利(Bentley)的著名通信中首先提出，在无限宇宙的空间中会由于重力聚集而形成观测到的天体。正如在第三章中所详尽讨论过的，琼斯(Jeans, 1902)把线性微扰理论应用于理想流体，从而证明具有的波长 λ 大于

$$\lambda_J=\left(\frac{\pi s^2}{G\rho}\right)^{1/2}=\left(\frac{5}{3}\frac{\pi kT}{G\rho m_H}\right)^{1/2}\tag{5-413}$$

的涨落是不稳定的而发生引力坍缩。这里对于温度为 T、氢质量为 m_H、气体密度 $\rho=Nm_H$ 的单原子氢气体，声速 s 是 $[5kT/(3m_H)]^{1/2}$。当质量 M 大于琼斯(Jeans)质量 M_J 时，

$$M_J=\frac{\pi}{6}\rho\lambda_J^3\approx\left(\frac{\pi}{3}\right)^{5/2}\left(\frac{5kT}{G}\right)^{3/2}N^{-1/2}m_H^{-2}.\tag{5-414}$$

在微扰时，物质的自引力吸引不能被气体的内部压力所支持，结果就发生引力坍缩。具有尺度 $\lambda<\lambda_J$ 的涨落将为压力梯度所稳定，并将象声波那样振荡，而具有 $\lambda>\lambda_J$ 的涨落将按指数律随时间 t 增长，在最大速率时

$$\frac{\Delta\rho}{\rho}\propto\exp\left[\frac{st}{\lambda_J}\right],\tag{5-415}$$

式中 $\Delta\rho$ 是密度 ρ 中的微扰。

琼斯(Jeans, 1902)理论可用于静态宇宙中星系的形成。勒梅特(Lemaître, 1931)首先研究了在宇宙常数 $\Lambda\neq0$ 的膨胀宇宙中的引力不稳定性，而利夫希茨(Lifshitz, 1946)提出了在 $\Lambda=0$ 的均匀的、各向同性的、膨胀宇宙中线性微扰的经典处理。对于 $k=0$ 的爱因斯坦-德西特(Einstein-de Sitter)宇宙，利夫希茨得到下列结果：

$$\frac{\Delta\rho}{\rho}\propto t^{2/3}\propto R(t)\propto(1+z)^{-1},\tag{5-416}$$

邦纳(Bonner, 1957)采用牛顿近似已推导出这个结果。这个结果可以应用于时间 t 大于复合时间 $t_r\approx10^5q_0^{-1/2}$ 年的范围，此期间宇宙是爱因斯坦(Einstein, 1917)的物质为主的"尘埃"宇宙。在这种情况，可应用(5-383)式及(5-384)式，我们得出：

$$\left.\begin{aligned}&\lambda_J\approx0.046T^{1/2}h^{-1}\text{ 兆秒差距 }\propto[R(t)]^{-1/2}\propto t^{-1/3}\quad(\text{当 }t>t_r);\\&M_J\approx10^5T^{3/2}h^{-1}M_\odot\propto[R(t)]^{-3/2}\propto t^{-2}\quad(\text{当 }t>t_r),\end{aligned}\right\}\tag{5-417}$$

式中 1 兆秒差距 $=^*3.086\times10^{24}$ 厘米，太阳质量 $M_\odot=^*1.9891\times10^{33}$ 克，哈勃常数 $H_0=100h$ 公里·秒$^{-1}$·兆秒差距$^{-1}$，我们已假定 $\rho=\rho_c=2\times10^{-29}h^2$ 克·厘米$^{-3}$。这里 M_J 是在复合时间 t_r 以后能够自由凝聚的最小质量。正如利夫希茨(Lifshitz, 1946)指出的，问题不在于所到达的质量象大多数天体质量那样大，而是在于由现代值 $\Delta\rho/\rho\approx1$ 和(5-416)式可知，要求 $\Delta\rho/\rho$ 在过去也有大的值。设 z_0 表示 $\Delta\rho/\rho=1$ 的历元，则在复合历元时可预期的温度涨落是(Sunyaev 和 Zeldovich, 1970)：

$$\frac{\Delta T}{T}\approx10^{-5}\left[\frac{M\Omega^{1/2}}{10^{15}M_\odot}\right]^{5/6}(1+z_0)。\tag{5-418}$$

上式适用于质量 $M<10^{15}\Omega^{1/2}M_\odot$ 以及角大小

$$\theta\approx10\left(\frac{M\Omega^2}{10^{15}M_\odot}\right)^{1/3}\text{ 角分。}\tag{5-419}$$

当时间 t 是在时间 $t_c\approx500\,q_0^{-2}$ 年以前(t_c 是物质与辐射去耦合的时刻)，声速 s 由下式给出：

$$s=\frac{c}{\sqrt{3}}\left[1+\frac{3}{4}\ \frac{\rho_m}{\rho_r}\right]^{-1/2}\approx\frac{c}{\sqrt{3}},\tag{5-420}$$

式中 ρ_m 是物质的密度，$\rho_r=aT^4$ 是辐射能量密度。在这种辐射为主的时代，以密度 ρ 表示的微扰 $\Delta\rho$ 随时间 t 的增长为：

$$\frac{\Delta\rho}{\rho}\propto t\propto R^2(t)\propto(1+z)^{-2}。\tag{5-421}$$

另一方面我们又留下了不自洽，即微扰增长只是与时间成线性，但在现在 $\Delta\rho/\rho=1$，而因为背景辐射的均匀性，在过去却是 $\Delta\rho/\rho\ll1$。尽管如此，为了完整起见，我们给出琼斯质量(Weinberg, 1972)：

$$\begin{aligned}M_J&=\frac{2\pi^{5/2}k^2\sigma^2}{9a^{1/2}m_H^2G^{3/2}(1+\sigma kT/m_\mathrm{H})^3}\quad(\text{当 }t<t_r)\\&\approx9.06\,\sigma^2\left(1+\frac{\sigma kT}{m_\mathrm{H}}\right)^{-3}M_\odot,\end{aligned}\tag{5-422}$$

式中

$$\sigma=\frac{4aT^3}{3Nk},$$

a 是辐射常数，m_H 是氢质量，物质密度 $\rho_m=Nm_\mathrm{H}$，T 是辐射温度。在 $t=t_c\simeq500\,q_0^{-2}$ 年以前，琼斯质量 M_J 正好小于粒子视界内的质量 M_H

$$\begin{aligned}M_J&\approx M_\mathrm{H}\approx10^{11}t^{3/2}M_\odot\quad(\text{当 }t<t_c)\\&\approx10^{31}T^{-3}M_\odot\quad(\text{当 }t<t_c),\end{aligned}\tag{5-423}$$

式中 t 是膨胀的时标，单位是年，T 是辐射温度，单位是开。

在时间 t_c 与 t_r 之间，琼斯质量是常数，具有下式给出的值：

$$M_J\approx10^{15}q_0^{-2}M_\odot\quad(\text{当 }t_c<t<t_r),\tag{5-424}$$

而涨落作声振荡。在此阶段，耗散过程使小尺度涨落阻尼，而质量 M 小于下列临界质量(Silk, 1968; Weinberg, 1972)的振荡在氢开始复合时剧烈地衰减了：

$$M_c\approx\frac{32\pi^4}{3}\left(\frac{4m_\mathrm{H}}{45\sigma_T}\right)^{3/2}(15.5\pi aT^4G)^{-3/4}(N_rm_\mathrm{H})^{-1/2}\approx10^{12}q_0^{-5/4}M_\odot,\tag{5-425}$$

这里 $\sigma_T=^*6.652448\times10^{-25}$ 厘米^2 是汤姆孙散射截面，下标 r 表示氢复合时间。例如，设现代质量密度是 10^{-30} 克·厘米$^{-3}$，在复合时存留的涨落将具有约为 $10^{12}M_\odot$ 的最小质量，相当于一个大的星系的质量。

利夫希茨(Lifshitz, 1946)指出，只要宇宙是以辐射为主，并且不计粘滞阻尼，当物质与辐射去耦合时，任何初始湍流速度将免于被耗尽。威札克等(Weizsäcker, 1951; 以及Gamow, 1952)首先论证，星系形成可能发生在一个湍流介质中。这样的论证对克服前面几节中讨论过的绝热微扰的缓慢增长率问题是需要的。一般认为，在辐射为主的时代，存在亚声速的大尺度运动，而雷诺(Reynolds)数 Re 由下式给出(Ozernoy 和 Chibisov, 1971)：

$$\mathrm{Re}=vr\nu^{-1}\approx 5\times10^{5}\,\Omega^{-2}\left(\frac{v_c}{c}\right)\left(\frac{z}{z_c}\right), \tag{5-426}$$

式中 v 是湍流速度，r 是物理尺度，z 是红移，Ω 是总星系总密度与弗里德曼模型的临界密度之比，下标 c 表示物质密度 ρ_m 等于辐射密度 ρ_r 的时间，$z_c\approx 2\times10^4\,\Omega$，运动粘滞系数 ν 由下式给出(Ledoux 和 Walraven, 1958)：

$$\nu=\frac{4}{15}\,\frac{m_p}{\sigma_T\,\rho_m}\,\frac{c\rho_r}{\rho_r+\rho_m}, \tag{5-427}$$

式中 σ_T/m_p 是不透明度。尺度小于 $(\nu t)^{1/2}$ 的涡动为粘滞性所消耗，所以在时间 t 存留的涡流满足下列质量要求(Sato, Matsuda 和 Takeda, 1970)：

$$\begin{aligned} M&\gtrsim\frac{4\pi}{3}\,\rho_m(\nu t)^{3/2}\gtrsim 10^{9.8}\,\Omega^{-11/4}\,M_\odot \quad (\text{在 } t=t_r \text{ 以及当 } \Omega>10^{-1.1})\\ &\gtrsim 10^{12.2}\,\Omega^{-1/2}\,M_\odot \quad (\text{在 } t=t_r \text{ 以及当 } \Omega<10^{-1.1})。\end{aligned} \tag{5-428}$$

威札克等(Weizsäcker, 1951; 以及 Ozernoy 和 Chernin, 1968)假设在辐射为主的时代建立尺度大小为 λ 的柯尔莫戈洛夫(Kolmogorov)涡流谱，以密度 ρ 表示的微扰 $\Delta\rho$ 及湍流速度 v，满足

$$\frac{\Delta\rho}{\rho}\propto\lambda^{-2},\quad v\propto\lambda^{1/3}。 \tag{5-429}$$

奥尔特等(Oort, 1969; Harrison, 1970; 以及 Peebles, 1971)给出了星系形成的湍流理论的进一步讨论。哈里森等(Harrison, 1967; Alfvén, 1971; Klein, 1971; 以及 Omnès, 1971)讨论了星系形成的另外的理论，该理论涉及物质与反物质问题[1)]。

1) 对星系形成理论的最近的综述参见琼斯(Jones, 1976)(总概念)、多罗什凯维奇等(Doroshkevich 等, 1976)(绝热微扰)、奥泽诺伊(Ozernoy, 1976)(转动微扰)、戈特(Gott, 1977)(熵扰动)的文章。——译者注